JEAN-JACQUES RISLER

Complexité et géométrie réelle

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 637, p. 89-100

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__89_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 637 Novembre 1984

COMPLEXITÉ ET GÉOMÉTRIE RÉELLE
[d'après A. Khovansky]

par Jean-Jacques RISLER

§ 1. Introduction

A.G. Khovansky a fait une série de travaux sur le thème suivant : "une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^n$ ayant des équations simples a une topologie simple".

Dans le cas algébrique, un polynôme sera "simple" si par exemple il peut s'écrire avec peu de termes, ou si sa complexité additive est petite (cf. § 2 et § 3) et dans le cas analytique le mot simple sera précisé au § 5 (les fonctions élémentaires telles que e^x , Arctg x , x^α , etc... sont "simples") ; pour les fonctions simples définies sur des sous-variétés simples, on aura en particulier un analogue du théorème de Bezout.

A part le théorème de Bezout habituel, les résultats connus sur les bornes de la topologie des variétés algébriques réelles sont les résultats de Thom-Milnor qui bornent les nombres de Betti en fonction du degré des équations (le résultat est grosso-modo celui-ci : la somme des nombres de Betti d'une variété algébrique réelle projective est plus petite que celle de sa complexifiée).

L'intérêt des résultats de Khovansky est d'une part qu'il borne la topologie d'une variété algébrique indépendamment du complexifié, et d'autre part qu'il construit une classe très large de variétés analytiques qui se comportent de ce point de vue comme des variétés algébriques (classe dans laquelle entrent les cycles limites des champs de vecteurs polynômiaux : § 4).

Signalons le lemme suivant, dont la démonstration contient la quintessence des idées développées plus loin :

Lemme 1.1 ("Lemme de Descartes").— *Soit* $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ *un polynôme à coefficients réels ; alors le nombre de racines* > 0 *de* P *est inférieur ou égal au nombre de changements de signes dans la suite* $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Démonstration.— Elémentaire, par récurrence sur n , en utilisant le lemme de Rolle.

COROLLAIRE 1.2.— *Si* $P \in \mathbb{R}[X]$ *s'écrit avec* k *monômes non nuls,* P *a au plus* $k-1$ *racines* > 0 *(et donc au plus* $2k-1$ *racines).*

En effet, dans une suite de k éléments, il y a au plus $k-1$ changements de signes.

Le § 7 traite des équations complexes simples, et généralise le fait suivant : "les racines complexes de l'équation $X^N = 1$ (qui a peu de monômes !) s'équirépartissent en fonction des arguments lorsque $N \to +\infty$".

Je remercie J.-M. Kantor qui m'a traduit les derniers papiers de Khovansky, et A. Marin pour ses explications sur le § 7.

§ 2. Un analogue réel du théorème de Bezout

THÉORÈME 2.1 ([K₁]).— *Posons* $X = (X_1,\dots,X_n)$, $Y = (Y_1,\dots,Y_k)$, $Y_i = e^{\langle a_i,x\rangle}$, *avec* $a_i \in \mathbb{R}^n$ *et* $\langle a_i,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^j X_j$. *Considérons* n *polynômes* $F_i \in \mathbb{R}[X,Y]$ *de degrés* m_i $(1 \le i \le n)$ *; alors le nombre de solutions non dégénérées des équations* $F_i = 0$ $(1 \le i \le n)$ *est fini et* $\le \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)(1+\Sigma m_i)^k 2^{(k(k-1))/2}$.

COROLLAIRE 2.2.— *Soient* $P_i \in \mathbb{R}[X]$ $(1 \le i \le n)$ n *polynômes réels à* n *variables. Alors si le nombre total de monômes entrant dans l'écriture des* P_i *est* k, *le système d'équations* $P_i = 0$ *a au plus* $(1+n)^k 2^{(k(k-1))/2}$ *solutions non dégénérées dans le quadrant* $(\mathbb{R}_+)^n$.

Remarques.— 1) Pour un résultat analogue plus indépendant du système de coordonnées, cf. § 3.

2) Le cas $n = 1$ laisse penser que la borne $(1+n)^k 2^{(k(k-1))/2}$ est trop grande (une borne polynomiale en k serait plus agréable ; toute conjecture est bienvenue !).

Démonstration du corollaire.— Le changement de variables $X_i = e^{T_i}$ permet d'appliquer le théorème 2.1 (avec les F_i de degré 1).

Démonstration du théorème 2.1.— Elle se fait par récurrence sur k , le cas $k = 0$ étant le théorème de Bezout classique.

Soit donc (1) $F(X,Y) = 0$ un système avec k exponentielles $Y = (Y_1,\dots,Y_k)$. On considère l'application $F_t(X,Y(X)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ où l'on a remplacé dans F $Y_k(X)$ par $tY_k(X)$.

En utilisant Sard, on peut supposer que l'équation $F_t(X,Y(X)) = 0$ définit une courbe lisse $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ transverse au plan $t = 1$ (le recours à Sard explique que l'on a un résultat seulement pour les solutions non dégénérées).

Il faut maintenant borner le nombre de points d'intersection de Γ avec $\{t = 1\}$.

Lemme 2.3.— *Ce nombre est* $\le \alpha + \beta$, *où :*

- α *est le nombre de composantes non compactes de* Γ *;*
- β *est le nombre de points où la tangente à* Γ *est "horizontale".*

La preuve de ce lemme est immédiate (c'est une version du lemme de Rolle).

On voit donc que β est inférieur ou égal au nombre de solutions de

$$(2) \qquad \begin{cases} F_t(X,Y(X)) = 0 \\ \mathrm{Det}\left(\dfrac{\partial F_t(X,Y(X))}{\partial X}\right) = 0 \ . \end{cases}$$

Mais dans (2) l'exponentielle Y_k apparaît toujours sous la forme tY_k (car $(\partial tY_k(X))/\partial X_i = a_k^i tY_k$) ; le changement de variables $tY_k(X) = U$ permet alors de "tuer" l'exponentielle Y_k et d'appliquer l'hypothèse de récurrence (après une autre utilisation de Sard pour pouvoir supposer que les solutions de (2) sont non dégénérées).

Pour borner α il suffit de remarquer qu'il existe un hyperplan (affine) rencontrant Γ en p points si Γ a p composantes non compactes et donc que α est inférieur ou égal au nombre de solutions de

$$(3) \qquad \begin{cases} F_t(X,\tilde{Y}(X),U) = 0 \\ b_0U + \sum_{i=1}^{n} b_iX_i = c \end{cases}$$

(avec $\tilde{Y} = (Y_1,\ldots,Y_{k-1})$).

Un calcul soigneux donne alors la borne du théorème 2.1.

Remarque.— On utilise de manière essentielle que l'exponentielle satisfait à l'équation différentielle $Y' = Y$; l'idée du § 5 est de généraliser ce résultat à des fonctions vérifiant des équations différentielles algébriques plus compliquées.

§ 3. Complexité additive et zéros des polynômes réels ([R])

Si k est un entier > 0 , notons $\mathbb{R}(k)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de complexité additive $\leq k$, i.e. qui peuvent être évalués (à partir des constantes et de la variable X) avec k additions-soustractions (les multiplications et divisions n'étant pas comptabilisées).

Autrement dit, un polynôme P est dans $\mathbb{R}(k)$ s'il existe un "programme" pour l'évaluer :

$$(1) \qquad \begin{cases} S_0 = X \\ S_1 = c_1 S_0^{m_{0,1}} + d_1 S_0^{m'_{0,1}} \\ \vdots \\ S_k = c_k \prod_{i=0}^{k-1} S_i^{m_{i,k}} + d_k \prod_{i=0}^{k-1} S_i^{m'_{i,k}} \\ P_* = c_{k+1} \prod_{i=0}^{k} S_i^{m_{i,k+1}} \end{cases}$$

avec $m_{i,j}$, $m'_{i,j} \in \mathbb{Z}$, c_i , $d_i \in \mathbb{R}$ et $P(X)$ étant évalué à partir de P_* par élimination successive des S_i $(0 \leq i \leq k)$.

La même définition est valable pour les polynômes à n variables (évalués à partir des constantes et des variables $X_1,\ldots,X_n$).

Contrairement au nombre de monômes, la notion de complexité est presque invariante par changements linéaires de coordonnées (qui introduisent peu de signes $\pm$ supplémentaires).

En appliquant 2.2 au système (1) qui a peu de monômes (on considère les S_i comme des inconnues), on obtient facilement :

PROPOSITION 3.1.– *Désignons par* $\rho(k)$ *le sup du nombre de racines distinctes des* $P \in \mathbb{R}(k)$ *; il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $\rho(k) \leq c^{k^2}$.

Remarques.– a) Ceci est une amélioration d'un résultat de Borodin-Cook ([B-C]).

b) On peut raisonnablement conjecturer que $\rho(k) = 3^k$, borne atteinte pour les polynômes de Tchebytchef (tels que $T_n(\cos t) = \cos nt$).

Dans le cas de plusieurs variables, on a :

PROPOSITION 3.2.– *Il existe une fonction* $\psi(k,n) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que pour tout* P *de* $\mathbb{R}(k)$ $(P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n])$, *le nombre de composantes connexes de* $P^{-1}(0)$ *soit* $\leq \psi(k,n)$.

Démonstration.– Elle se fait par récurrence sur n , le cas $n=1$ étant 3.1. Soit $C_c(P)$ le nombre de composantes compactes de $P^{-1}(0)$ et $C_n(P)$ le nombre de composantes non compactes.

On montre qu'il existe un hyperplan affine H qui rencontre au moins $C_n(P)/2$ composantes non compactes : on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $P|H$ pour borner $C_n(P)$. On remarque ensuite que $C_c(P)$ est majoré par la moitié du nombre de points critiques de la fonction X_n sur $P^{-1}(0)$ (on peut supposer, après changement linéaire de coordonnées, que $P^{-1}(0)$ est lisse et que $X_n|P^{-1}(0)$ est une fonction de Morse). On doit donc majorer le nombre de solutions du système : $\begin{cases} P = 0 \\ \partial P/\partial X_i = 0 \ (1 \leq i \leq n-1) \end{cases}$; on écrit alors un système d'équations (analogue à (1)) servant à évaluer P et les $\partial P/\partial X_i$, on compte le nombre de monômes, et on lui applique le corollaire 2.2.

§ 4. Cycles limites dans le plan (ou courbes de Pfaff) ([K_2])

Les courbes de Pfaff sont un cas particulier des sous-variétés de Pfaff (§ 5). La technique utilisée est toujours une variation sur le lemme de Rolle.

DÉFINITION 4.1.– *Considérons un champ de vecteurs polynomial dans le plan :*

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X,Y) \\ \dot{X}_2 = F_2(X,Y) \end{cases}$$

avec $F_i(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ *de degré* $\leq n$.

Une courbe Γ *lisse orientée est une solution séparante de* (1) *(on dit alors que* Γ *est une "courbe de Pfaff de degré* n*") si :*

a) Γ *se compose d'une ou plusieurs trajectoires (orientées) du système.*

b) Γ *ne passe pas par les points singuliers du système.*

c) Γ *est le bord orienté d'une région du plan.*

Remarques.— 1) Les composantes connexes d'une courbe de Pfaff sont soit des cycles, soit des trajectoires non compactes allant vers l'infini quand $t \to \pm\infty$; la condition c) élimine les trajectoires qui spirallent autour d'un cycle limite.

2) Si $P(X,Y)$ est un polynôme de degré $n+1$, une ligne de niveau non critique $P(X,Y) = a$, orientée comme bord de la région $P(X,Y) > a$, est une courbe de Pfaff de degré n (considérer le système : $\begin{cases} \dot{X} = \partial P/\partial Y \\ \dot{Y} = -\partial P/\partial X \end{cases}$). Les courbes de Pfaff généralisent donc les courbes algébriques.

La remarque (analogue à celle du § 2) qui va être utilisée est la suivante :

Lemme 4.2.— *Soit* Γ *une solution séparante d'un système dynamique du plan ; si* C *est une courbe de classe* $\mathscr{C}^1$ *lisse et connexe, entre deux points d'intersection de* C *avec* Γ, *il y a un point où le système dynamique est tangent à* C.

On déduit facilement de ce lemme les conséquences suivantes :

PROPOSITION 4.3.— *Soit* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *une courbe de Pfaff de degré* n ; *alors* :

1) *La restriction d'un polynôme* $Q(X,Y)$ *de degré* m *à* Γ *possède au plus* $m(n+m)$ *racines isolées (en particulier, en faisant* $m=1$ *et* $n=2$, *on retrouve que les cycles limites des systèmes quadratiques sont convexes).*

2) *La restriction d'un polynôme* Q *de degré* m *à* Γ *n'a pas plus de* $(n+m-1)(2n+m-1)$ *points critiques isolés.*

3) Γ *a au plus* n^2 *composantes compactes et* $n+1$ *composantes non compactes (remarquons que si* Γ *est algébrique de degré* $n+1$, *elle a au plus* $\frac{n(n-1)}{2}+1$ *composantes, et que cette borne est atteinte : "théorème de Harnack").*

4) Γ *a au plus* $(3n-1)(4n-1)$ *points d'inflexion.*

5) *Si* Γ' *est une courbe de Pfaff de degré* m, Γ *et* Γ' *ont au plus* $(m+n)(m+2n)+n+1$ *points d'intersection isolés.*

§ 5. Variétés et fonctions de Pfaff ([K_3])

Nous allons maintenant construire une classe de variétés analytiques (qui va généraliser les courbes de Pfaff) ayant des propriétés de finitude analogues à celles des variétés algébriques.

Je me bornerai ici au cas de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$; la théorie ne me semble pas encore parfaitement au point, et la définition n'est sûrement pas la plus générale (ni peut-être la meilleure) possible.

DÉFINITION 5.1.— *Soient* M *une variété lisse,* $\dim M \geq 2$, α *une* 1-*forme sur* M ; *une sous-variété* $V \subset M$ *de codimension* 1 *est dite solution séparante de l'équation de Pfaff* $\alpha = 0$ *si* :

1) $\alpha | V \equiv 0$.

2) α *est non singulière en tout point de* V.

3) V *peut être orientée comme le bord d'une région* U *de* M, *de façon à ce*

que α *prenne des valeurs* ≥ 0 *sur tout vecteur sortant de* U .

Si $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ *est une famille (ordonnée) de* 1-*formes sur* M , *une sous-variété* $\Gamma \subset M$ *de codimension* k *est une solution séparante du système de Pfaff* $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, *s'il existe une suite de sous-variétés :*

$$M = \Gamma_0 \supset \dots \supset \Gamma_k = \Gamma$$

dans laquelle chaque Γ_i *est une solution séparante de* $\alpha_i|\Gamma_{i-1} = 0$.

DÉFINITION 5.2.– a) *Une sous-variété analytique* $V \subset \mathbb{R}^n$ *de codimension* k *est dite* sous-variété de Pfaff simple (SVPS) *s'il existe un nombre fini d'ouverts semi-algébriques* U_i *recouvrant* $\mathbb{R}^n$, *et pour chaque* i *une solution séparante* $X_i \subset U_i$ *d'un système de Pfaff* $\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_k} = 0$ *formé de* 1-*formes polynomiales, tels que pour tout* i , $V \cap U_i$ *soit ouvert et fermé dans* X_i .

b) *Une sous-variété analytique* $V \subset \mathbb{R}^n$ *est dite* sous-variété de Pfaff (SVP) *s'il existe une SVPS,* $W \subset \mathbb{R}^m$, *un morphisme rationnel* φ *défini au voisinage de* W : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, *tel que* $\varphi(W) = V$ *et que* $\varphi|W$ *soit un isomorphisme analytique.*

c) *Si* $V \subset \mathbb{R}^n$ *est une SVP,* $f : V \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Pfaff si* f *est analytique réelle et si son graphe* $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *est une SVP.*

PROPOSITION 5.3.– 1) *Le produit de deux SVP est une SVP.*

2) *Si* $V \subset \mathbb{R}^n$ *est une SVP,* $F \subset \mathbb{R}^n$ *un sous-ensemble algébrique tel que* $W = V \cap F$ *soit lisse, alors* W *est une SVP.*

3) *Si* f_i $(1 \leq i \leq k)$ *sont des fonctions de Pfaff sur une SVP,* $V \subset \mathbb{R}^n$, *et si* $W = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(0)$ *est une sous-variété de codimension* k , *c'est une SVP. En particulier les niveaux non critiques* $f = c$ *d'une fonction de Pfaff sont des exemples de SVP.*

4) *Si* $V \subset \mathbb{R}^n$ *est une SVP, et* f *une fonction de Pfaff sur* V , *l'ouvert* $U = \{x \in V \mid f(x) > 0\}$ *est une SVP.*

5) *L'ensemble des fonctions de Pfaff sur une SVP forme un anneau.*

Les démonstrations sont faciles à partir des définitions.

Donnons maintenant des exemples de fonctions de Pfaff :

PROPOSITION 5.4.– *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $F(t,y)$ *une fonction de Pfaff sur* $I \times \mathbb{R}$, y *une solution de l'équation différentielle* $y' = F(t,y)$; *alors* y *est une fonction de Pfaff sur* I .

Démonstration.– Le graphe Γ de la fonction y est une solution séparante de l'équation de Pfaff $\alpha = dy - F(t,y)dt = 0$.

Par hypothèse le graphe W de la fonction F , défini dans $\mathbb{R}^3$ par $U = F(t,y)$ est une SVP, et Γ est la projection d'une solution séparante de la forme de Pfaff algébrique $dy - Udt$ sur W : Γ est donc une SVP (5.2, b)) de $\mathbb{R}^2$ et y est une fonction de Pfaff.

On en déduit que les fonctions élémentaires sont des fonctions de Pfaff ; en particulier e^t et Arctg t (sur $\mathbb{R}$), Log t et t^α ($\alpha \in \mathbb{R}_+$, sur $\mathbb{R}_+$), Arc sin t et Arc cos t (sur $]-1,+1[$), sin t et cos t (sur $]0,\frac{\pi}{2}[$) sont des fonctions de Pfaff. (En revanche sin t et cos t ne sont pas de Pfaff sur $\mathbb{R}$, car elles ont une infinité de zéros !)

Comme la composée de deux fonctions de Pfaff est une fonction de Pfaff, on voit que toute fonction analytique s'écrivant avec des fonctions "élémentaires" est une fonction de Pfaff (si l'expression comporte des sin et cos , il faut une restriction sur l'intervalle de définition).

Passons maintenant aux théorèmes de finitude : on peut attacher à chaque SVP $V \subset \mathbb{R}^n$ sa *complexité* qui est la suite finie des degrés de tous les polynômes ayant servi à définir V (cette notion n'est pas très au point, et peut certainement être raffinée en remplaçant par exemple le degré par la complexité additive du § 3).

PROPOSITION 5.5.– *La somme des nombres de Betti (et en particulier le nombre de composantes connexes) d'une SVP de $\mathbb{R}^n$ est finie et explicitement bornée en fonction de la complexité ; en particulier si f est une fonction de Pfaff sur une SVP, le nombre de composantes connexes des variétés de niveau $f^{-1}(c)$ est uniformément borné.*

Démonstration.– L'analogue du lemme de Rolle est ici :

Lemme 5.6.– *Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ une SVP de codimension 1, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ une application polynomiale ; alors le nombre de solutions non dégénérées de l'équation $f|V = x$ est uniformément borné (en fonction de la complexité de V et du degré de f).*

On déduit facilement de ce lemme un énoncé analogue pour V de codim k et le

COROLLAIRE 5.7.- *Sur une SVP de dimension k , les solutions communes (non dégénérées) à k équations de Pfaff $f_1 = \ldots = f_k = 0$ sont en nombre fini, explicitement borné en fonction des complexités.*

(Le corollaire 5.7 généralise donc le théorème 2.1).

Démontrons maintenant la proposition 5.5 : on peut supposer que V est une SVPS. Il suffit alors de majorer le nombre de points critiques d'une fonction de Morse sur V ; soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ des formes polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ dont V est une solution séparante ; si l'on pose $\varphi_a = \sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i)^2$, les points critiques de $\varphi_a|V$ sont donnés par l'annulation (sur V) des coefficients de la forme $d\varphi_a \wedge d\alpha_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_k$: il suffit alors d'appliquer la proposition 5.3, 2) et le corollaire 5.7.

Pour la fin de l'argument, on peut se reporter à [R].

§ 6. Cas analytique

On peut faire la même construction qu'au § 4, en partant d'une sous-variété analytique V de $\mathbb{R}^n$, sous-analytique (ou semi-analytique) et relativement compacte (à la place de $\mathbb{R}^n$), et en considérant l'anneau A des fonctions analytiques sur V "méromorphes" sur $\overline{V}$ (i.e. les fonctions f analytiques sur V telles qu'en chaque point $x \in \overline{V} \setminus V$, il existe un ouvert $U \ni x$ et deux fonctions g et h analytiques sur U telles que $\frac{g}{h}|V = f$) au lieu des polynômes (c'est d'ailleurs le point de vue de [K3]). On a alors une notion de solution séparante d'une équation de Pfaff $\alpha = 0$ (α étant une 1-forme à coefficients dans A) et une notion de sous-variété de Pfaff de V.

Les théorèmes de finitude sont encore valables dans ce cas (mais il n'y a plus de notion de complexité) : on a en particulier une majoration uniforme pour la somme des nombres de Betti des variétés de niveau des fonctions de Pfaff en ce nouveau sens.

Les démonstrations sont les mêmes que celles du cas algébrique, par récurrence sur la codimension k de la sous-variété de Pfaff, le cas $k = 0$ (qui vient du théorème de Bezout dans le cas algébrique) résultant ici d'un théorème de Gabrielov :

PROPOSITION 6.1 ([G]).– *Soit* $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ *un sous-ensemble sous-analytique relativement compact,* $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *la projection canonique ; alors le nombre de composantes connexes de* $\pi^{-1}(\xi) \cap X$ *est uniformément borné (pour* $\xi \in \mathbb{R}^k$ *).*

Khovansky applique ces notions aux "fonctions abéliennes" et retrouve ainsi des résultats récents de Varchenko ([V]) en montrant que les "fonctions abéliennes" (définies sur un ouvert semi-algébrique d'une variété algébrique complexe et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$) sont des cas particuliers d'applications de Pfaff (à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$).

La remarque est la suivante : les fonctions abéliennes se décrivent localement à l'aide d'expressions de la forme $Z^{\alpha}\mathrm{Log}(Z)^n U(Z)$ $(\alpha \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, U analytique) (solutions de systèmes différentiels à points singuliers réguliers) dont les parties réelles et imaginaires sont des fonctions de Pfaff (ce ne serait pas le cas si α n'était pas réel).

§ 7. Quasi-polynômes complexes ([K4])

Il s'agit de résultats qui précisent la répartition des arguments des solutions de systèmes algébriques (complexes) comportant peu de termes ; ces résultats généralisent ceux du § 2.

Considérons un système d'équations :

$$(f) \begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

où chaque f_i est un "quasi-polynôme" de la forme $f = \sum_{a \in \Lambda} \lambda_a \exp\langle a,z\rangle$ avec $\lambda_a \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\langle a,z\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$, et où Λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$ dont l'enveloppe convexe Δ s'appelle le *polyèdre de Newton* de f .

On obtient en particulier un tel système en partant d'un système de n équations algébriques $g_i(X) = 0$ et en faisant le changement de variables $X_i = e^{z_i}$ (les Λ_i sont alors des sous-ensembles de $\mathbb{Z}^n$).

Si Δ_i est le polyèdre de Newton de f_i , nous dirons qu'un choix de faces Γ_i de Δ_i est *bon* s'il existe une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$ dont la borne supérieure sur Δ_i est atteinte sur Γ_i ; on peut alors considérer le système réduit : $f_1^{\Gamma_1} = \ldots = f_n^{\Gamma_n}$, et on dit que (f) est *générique* dans l'ouvert $\mathbb{R}^n \times iG$ (G ouvert de $\mathbb{R}^n$) si :

a) Toutes les racines du système dans cet ouvert sont non dégénérées (et donc isolées).

b) Pour tout bon choix (Γ_i) de faces des Δ_i , le système réduit associé est sans solution dans $\mathbb{R}^n \times iG$.

Notons $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^n$ déterminé par les inégalités :

$$\{|\langle\alpha,\varphi\rangle| < \frac{\pi}{2}\} ,$$

φ parcourant la réunion des Λ_i , et $\pi(\delta G,\Delta)$ le nombre minimum de translatés de Δ nécessaires pour revouvrir δG .

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1.— *Désignons par* $N(f,G)$ *le nombre de racines non dégénérées du système* (f) *dans l'ouvert* $\mathbb{R}^n \times iG$ *; il existe une fonction* $\varphi(k,n)$ *(explicitement donnée dans* [K4]) *telle que l'on ait :*

$$|N(f,G) - \frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)V(G)| < \varphi(k,n)\pi(\delta G,\Delta) .$$

Dans cette formule, k est le nombre total de termes dans (f), $V(G)$ le volume de l'ouvert G (supposé fini) et $V(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ le volume mixte de Minkowski des convexes Δ_i .

Le même énoncé (avec la même démonstration) est valable si (f) est un système d'équations algébriques, $\mathbb{R}^n \times iG$ étant remplacé par un cône de $\mathbb{C}^n$ s'appuyant sur un ouvert G de tore T^n .

Voici quelques conséquences qui se déduisent facilement du théorème :

a) Dans le cas algébrique, si l'on fait $G = T^n$, on a $\delta G = \emptyset$ et l'on trouve $N(f,G) = n!V(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$: c'est un résultat dû à Berstein ([B]).

b) Toujours dans le cas algébrique, on retrouve le théorème 2.1 en faisant tendre G vers le point $0 \in T^n$ (on a alors $\pi(\delta G,\Delta) = 1$).

c) Pour un système (f) donné, appelons R le plus grand rayon des sphères exinscrites aux Δ_i , et n le plus petit des rayons des sphères inscrites ; alors si l'on considère une suite de systèmes non dégénérés dans $\mathbb{R}^n \times iG$ telle que le nombre de termes k soit borné et que R tende vers l'infini avec $\frac{R}{r}$

borné ("on fait grossir les polyèdres de Newton sans les aplatir"), alors

$$N(f,G)/\frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)V(G) \longrightarrow 1$$

(c'est une généralisation du fait que pour l'équation $X^n = 1$, les racines "s'équirépartissent" sur l'ensemble S^1 lorsque $n \to +\infty$).

Démonstration du théorème 7.1.– L'ensemble des systèmes de spectres $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ fixés s'identifie à un sous-ensemble du produit d'espaces projectifs $S = \mathbb{C}P^{\Lambda_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{\Lambda_n}$. L'ensemble des systèmes génériques dans $\mathbb{R}^n \times iG$ est un ouvert dense de S , et on a :

PROPOSITION 7.2.– *Il existe dans* S *une mesure* $d\mu$ *telle que* $\int N(f,G)d\mu = \frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)V(G)$ *(l'intégration porte sur les systèmes génériques).*

Démonstration.– Elle suit la démonstration donnée par Atiyah [A₁] du théorème de Bernstein.

Considérons l'action de $\mathbb{C}^n$ sur S :

$$\mathbb{C}^n \times S \xrightarrow{\varphi} S$$

telle que

$$\varphi(z,[\xi]) = [e^{<a,z>}\xi] ,$$

où $z \in \mathbb{C}^n$ et $[\xi]$ représente les coordonnées homogènes sur S (dans le cas algébrique, i.e. lorsque les a_i^j sont entiers, l'action φ se factorise par une action du tore $T^n_{\mathbb{C}}$).

Soit $y \in S$ le point dont toutes les coordonnées homogènes valent 1 : le nombre $N(f,g)$ est égal au nombre de points d'intersection de l'orbite de y , $Y = \varphi(\mathbb{R}^n \times iG,[y])$ avec la sous-variété linéaire H de S de codimension n et d'équations :

$$[<\lambda_a,\xi>] = 0$$

(avec une notation évidente !).

Soient $\pi_i : S \to \mathbb{C}P^{\Lambda_i}$ la projection canonique, ω_i la forme symplectique canonique sur $\mathbb{C}P^{\Lambda_i}$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une suite d'entiers positifs et $\omega_\lambda = \Sigma\, \lambda_i\tilde{\omega}_i$, avec $\tilde{\omega}_i = \pi_i^*(\omega_i)$. L'action φ se fait facteur par facteur et donne naissance à des "applications des moments"

$$\mu_i : \mathbb{C}P^{\Lambda_i} \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

et Atiyah ([A₂]) montre que l'image de l'orbite Y_i de $\pi_i(y)$ est l'intérieur du convexe Δ_i , et que $\mu_i|Y_i$ est une fibration de fibre G .

Si l'on pose $\tilde{\mu}_i = \mu_i \circ \pi_i$ et $\mu_\lambda = \Sigma\, \lambda_i\tilde{\mu}_i : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mu_\lambda|Y$ est aussi une fibration de fibre G , et on en déduit par Fubini que

(1) $$\frac{1}{n!}\int_Y \omega_\lambda^n = \mathrm{Vol}\, G \times \mathrm{Vol}(\mathrm{Im}\, \mu_\lambda) .$$

Or $\mathrm{Im}\, \mu_\lambda$ est le convexe $\Sigma\, \lambda_i\Delta_i$, et les deux membres de (1) sont des polynômes de degré n en $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ (cela est évident pour ω_λ^n, et redonne une démonstration pour le membre de droite).

En considérant les termes en $\lambda_1\ldots\lambda_n$, on obtient :

$$\frac{(2\pi)^n}{n!}\int_Y \Omega_1\wedge\ldots\wedge\Omega_n = \mathrm{Vol}\ G \times V(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$$

(par définition du volume mixte) en normalisant $\tilde{\omega}_i$: $\tilde{\omega}_i = 2\pi\Omega_i$.

Or la formule de Crofton nous dit que $\int_Y \Omega_1\wedge\ldots\wedge\Omega_n$ est la moyenne du nombre de points d'intersection de Y avec une variété linéaire générique H duale de la classe de cohomologie représentée par $\Omega_1\wedge\ldots\wedge\Omega_n$, ce qui achève de montrer 7.2.

Montrons maintenant le théorème : d'après 7.2, il existe dans S un système b générique tel que $N(b,G) \leq \frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)V(G)$; considérons un autre système générique a et évaluons la différence $|N(a,G)-N(b,G)|$: on considère pour cela le système $a_t = (1-t)a + tb$ $(0 \leq t \leq 1)$ que l'on peut supposer générique : d'après le théorème des fonctions implicites, les solutions de a_t sont analytiques en t.

Si y^t est la courbe des parties imaginaires des solutions de a_t, $|N(a,G)-N(b,G)|$ est majoré par le nombre de points d'intersection de la courbe y^t avec δG ; mais si on regarde les équations (réelles) définissant y^t, ce nombre est majoré dans l'ouvert $\pi(\delta G,\Delta^*)$ à l'aide de la proposition suivante :

PROPOSITION 7.3 ([K_5]).— *Soit* $P_1 = \ldots = P_n = 0$ *un système de* n *équations en* n *variables réelles* $x = (x_1,\ldots,x_n)$, *où* P_i *est un polynôme de degré* m_i *en* $n+k+2\rho$ *variables réelles* x, y, u, v, *avec*

$$\begin{cases} y = (y_1,\ldots,y_k) \ , & y_i = \exp\langle a_i,x\rangle \ , \\ u = (u_1,\ldots,u_\rho) \ , & u_i = \sin\langle b_i,x\rangle \ , \\ v = (v_1,\ldots,v_\rho) \ , & v_i = \cos\langle b_i,x\rangle \ . \end{cases}$$

Alors le nombre de solutions non dégénérées de ce système dans l'ouvert

$$|\langle b_i,x\rangle| < \frac{\pi}{2} \qquad (1 \leq i \leq \rho)$$

est inférieur à $\prod_{i=1}^{n} m_i(\Sigma m_i + \rho + 1)^{\rho+k}2^{\rho+((\rho+k)(\rho+k-1))/2}$.

Démonstration.— Elle se fait par récurrence sur ρ, le cas $\rho = 0$ étant le théorème 2.1.

La démonstration suit ensuite le schéma de celle de 2.1, consistant à "tuer" les sin et cos par un changement de variables adéquat.

Ceci achève la démonstration de 7.1.