

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

PIERRE GABRIEL

Le théorème de Serre

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 2, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A2_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

LE THÉORÈME DE SERRE

par Pierre GABRIEL

A. Ensembles algébriques affines et foncteurs classiques.

1. Espaces topologiques annelés.

A partir de maintenant, et sauf mention du contraire, les anneaux considérés seront supposés commutatifs, à élément unité et noethériens. On appelle espace topologique annelé (V, \mathcal{A}) un espace topologique V muni de la structure définie par la donnée d'un faisceau d'anneaux \mathcal{A} . Si (V, \mathcal{A}) et (W, \mathcal{B}) sont deux espaces topologiques annelés, on appelle morphisme du premier dans le second la donnée :

a. d'une application continue $\psi : V \rightarrow W$.

b. pour tout ouvert U de W , d'un homomorphisme d'anneaux

$$\varphi_U : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{A}(\psi^{-1}(U)),$$

compatible avec les opérations de restriction.

Le composé de deux morphismes est défini de façon évidente et on parlera de la catégorie des espaces topologiques annelés. Dans la suite V sera presque toujours un espace de Zariski. A un tel V on a l'habitude d'associer un espace topologique $S(V)$, qui est le schéma de V et qui est défini de la manière suivante :

Les points de $S(V)$ sont les fermés irréductibles de V .

Les fermés de $S(V)$ sont les ensembles \mathfrak{F} , où F est un fermé de V et où \mathfrak{F} désigne l'ensemble des fermés irréductibles de V contenus dans F .

Il est alors clair que la correspondance $F \rightarrow \mathfrak{F}$ entre fermés de V et de $S(V)$ est biunivoque, que $S(V)$ est un espace de Zariski et que tout fermé irréductible de $S(V)$ est l'adhérence d'un point unique. A tout faisceau sur V est associé de manière canonique un faisceau sur $S(V)$. En particulier si (V, \mathcal{A}) est un espace topologique annelé, et si V est un espace de Zariski on notera par $(S(V), S(\mathcal{A}))$, et on appellera schéma de (V, \mathcal{A}) , l'espace topologique annelé formé par $S(V)$ et le faisceau d'anneaux associé à \mathcal{A} . Bien

entendu le schéma de $(S(V), S(\mathcal{O}))$ est isomorphe à $(S(V), S(\mathcal{O}))$.

Si A est un anneau de Jacobson noethérien et $(\mathcal{O}(A), \mathcal{D}(A))$ l'espace topologique annelé défini par son spectre maximal, le schéma associé n'est autre que $(V(A), \mathcal{D}(A))$ (voir l'exposé n° 1). Si (V, \mathcal{O}) est un ensemble algébrique muni du faisceau des germes de fonctions régulières, le schéma associé a été défini par CHEVALLEY dans [3], et [4]. Dans ce cas V est le sous-espace de $S(V)$ formé par les points fermés et \mathcal{O} est la restriction de $S(\mathcal{O})$ à V . Dorénavant nous nous bornerons presque toujours au cas des ensembles algébriques sur un corps algébriquement clos.

2. Faisceaux d'idéaux d'un ensemble algébrique.

Si V est un ensemble algébrique et \mathcal{O} son faisceau des germes de fonctions régulières, la notion de faisceau quasi-cohérent, resp. cohérent, généralise la notion de module, resp. de module de type fini sur l'anneau des coordonnées d'un ensemble algébrique affine. On généralise de même la notion de support et de dimension : Ainsi si F est un faisceau algébrique cohérent sur V , son support est l'ensemble des points x de V où la fibre F_x de F n'est pas nulle (si la fibre de F est nulle en x , elle est nulle dans un voisinage de x , car F est cohérent, et le support est donc fermé). On appellera alors dimension de F la dimension de son support. Lorsque V est affine et que le faisceau cohérent F est associé au module de type fini M , alors le support de F est formé de l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau des coordonnées qui contiennent l'annulateur de M .

La notion d'idéal se généralise de la manière suivante : On appelle faisceau d'idéaux de (V, \mathcal{O}) tout sous-faisceau quasi-cohérent (et donc cohérent) de \mathcal{O} . On retrouve alors l'éternelle correspondance entre idéaux et fermés :

Si I est un faisceau d'idéaux, on lui associe le fermé $W(I)$ de V suivant :

$x \in W(I)$ si et seulement si I_x , fibre de I en x , est un idéal propre de \mathcal{O}_x (i.e. $I_x \neq \mathcal{O}_x$), ou encore si et seulement si les germes de fonctions définis par I en x sont nuls. $W(I)$ est donc le support de \mathcal{O}/I .

Réciproquement si W est un fermé de V on lui associe le faisceau d'idéaux $I(W)$ suivant :

Les sections de $I(W)$ sur un ouvert U sont les fonctions régulières définies sur U et qui s'annulent sur $U \cap W$. Si $I(U, x)$ désigne l'image réciproque dans $\mathcal{O}(U)$ de l'idéal maximal de \mathcal{O}_x , alors $\Gamma(U, I(W))$ est l'intersection

des $I(U, x)$ quand x parcourt $U \cap W$. Si U est un ouvert affine le faisceau d'idéaux $I(W)|_U$ n'est autre que le faisceau associé à l'idéal $\Gamma(U, I(W))$ de $\mathcal{O}(U)$ ce qui montre que $I(W)$ est cohérent.

PROPOSITION 1.

a. L'application $W \rightarrow I(W)$ établit une correspondance biunivoque entre les fermés de V et les faisceaux d'idéaux I satisfaisant à la condition suivante :
pour tout $x \in V$, I_x est soit égal à \mathcal{O}_x , soit intersection d'idéaux premiers de \mathcal{O}_x .

b. L'application $W \rightarrow I(W)$ associe les fermés dont toutes les composantes connexes sont irréductibles aux faisceaux d'idéaux premiers (pour tout x , I_x est soit égal à \mathcal{O}_x , soit un idéal premier).

(a) il suffit de faire la démonstration dans le cas où (V, \mathcal{O}) est un ensemble algébrique affine. Soit alors $A = \mathcal{O}(V)$ et $\mathcal{O} = \Gamma(V, I(W))$. On a déjà vu qu'alors \mathcal{O} est intersection des idéaux premiers $I(V, x)$ quand x parcourt W . Ainsi \mathcal{O} est une intersection d'idéaux premiers. Comme la correspondance entre intersections d'idéaux premiers de A et fermés de V est biunivoque, il en va de même de la correspondance entre idéaux de A et faisceaux d'idéaux de (V, \mathcal{O}) ; il reste à montrer que réciproquement le faisceau associé à une intersection d'idéaux premiers \mathcal{O} satisfait aux conditions de la proposition : ceci résulte des propriétés de conservation de la décomposition primaire par localisation.

(b) le raisonnement est analogue.

3. Anneau des fonctions rationnelles d'un ensemble algébrique.

On rappelle que si V est un ensemble algébrique, on appelle fonction rationnelle sur V une application régulière f d'un ouvert partout dense de V dans le corps des constantes K . On suppose en outre que le domaine de définition de f ne peut pas être prolongé. Les fonctions rationnelles sur V forment une algèbre $K(V)$ sur K . Si on note par V_i les composantes irréductibles de V alors $K(V)$ est isomorphe au produit $\prod_i K(V_i)$, l'isomorphisme étant évident. Enfin si V est irréductible, et si U est un ouvert affine de V , $K(V)$ n'est autre que le corps des fractions de l'anneau des coordonnées de U .

Le faisceau $\mathcal{K}(V)$ des fonctions rationnelles sur V est alors défini de la manière suivante : à tout ouvert U de V on associe l'anneau $K(U)$ des

fonctions rationnelles sur U , les restrictions étant évidentes. Il est clair qu'on définit de cette manière un faisceau quasi-cohérent sur V . En outre si on note par V_i les composantes irréductibles de V , $K(U)$ n'est autre que le produit $\prod_{V_i \cap U \neq \emptyset} K(V_i)$. Il en résulte que le faisceau $\mathcal{K}(V)$ est obtenu de la manière suivante : soit \mathcal{K}_i le faisceau sur V qui est nul en dehors de V_i , qui est constant et de fibre $K(V_i)$ sur V_i . Alors $\mathcal{K}(V)$ est le produit des faisceaux \mathcal{K}_i .

4. Caractérisation des ensembles algébriques affines.

Soit (V, \mathcal{O}) un ensemble algébrique muni de son faisceau d'anneaux, et soit $A = \Gamma(V, \mathcal{O})$ l'anneau des coordonnées de V . On sait qu'on a alors un morphisme canonique de $(V, \mathcal{O}) \rightarrow (S(V), S(\mathcal{O}))$ et (V, \mathcal{O}) est affine si et seulement si $(S(V), S(\mathcal{O}))$ est le spectre premier d'une algèbre sur K , de type fini et sans éléments nilpotents.

Nous allons maintenant définir un morphisme $(S(V), S(\mathcal{O})) \rightarrow (V(A), \mathcal{O}_A)$. Pour cela soit x un élément quelconque de $S(V)$ et $S(\mathcal{O})_x$ la fibre de $S(\mathcal{O})$ en x : c'est un anneau local et on a un homomorphisme de restriction : $A \rightarrow S(\mathcal{O})_x$. Nous noterons \mathfrak{p}_x l'idéal premier de A , image réciproque par cet homomorphisme, de l'idéal maximal de $S(\mathcal{O})_x$. C'est l'idéal des fonctions de V qui sont nulles sur le fermé x .

L'application $\varphi : x \rightarrow \mathfrak{p}_x$ est une application continue de $S(V)$ dans $V(A)$. Il suffit en effet de montrer que l'image réciproque d'un ouvert spécial U_f de $V(A)$ est un ouvert de $S(V)$. Mais $\varphi^{-1}(U_f)$ est formé des points x de $S(V)$ tels que l'image f_x de f dans \mathcal{O}_x soit inversible et si f_x est inversible en x , f_y est inversible pour y voisin de x

C. Q. F. D.

Il résulte de ce qui précède que $\frac{1}{f}$ est une section de $S(\mathcal{O})$ sur $\varphi^{-1}(U_f)$ et ainsi l'application canonique de A dans $\Gamma(\varphi^{-1}(U_f), S(\mathcal{O}))$ se prolonge en un homomorphisme :

$$\varphi_{U_f} : A_f \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U_f), S(\mathcal{O}))$$

Les φ_{U_f} sont compatibles avec les opérations de restriction, et, par "passage à la limite inductive", ils définissent un morphisme d'espaces topologiques annelés :

$$\varphi : (S(V), S(\mathcal{O})) \rightarrow (V(A), \mathcal{O})$$

Il est clair que φ est un isomorphisme si et seulement si (V, \mathcal{O}) est un ensemble algébrique affine. Le théorème suivant étudie ce cas :

THÉOREME (SERRE). - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a. (V, \mathcal{O}) est un ensemble algébrique affine.
- b. Si $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents, alors les sections sur V forment une suite exacte.
- c. Si $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux cohérents, alors les sections sur V forment une suite exacte.
- d. Il existe des sections f_i de \mathcal{O} sur V telles que :
 - l'idéal engendré par les f_i est égal à A ,
 - les ouverts V_{f_i} de V , où les f_i ne s'annulent pas, sont des ouverts affines et ils recouvrent V .

Reste à démontrer que $(c) \Rightarrow (d)$ et $(d) \Rightarrow (a)$. $(c) \Rightarrow (d)$:

LEMME 1. - Si F est un faisceau cohérent non nul, alors $\Gamma(V, F)$ n'est pas nul.

En effet le support de F contient un point fermé, soit x .

La fibre F_x de F n'est pas nulle en x , et, si \mathfrak{m}_x désigne l'idéal maximal de \mathcal{O}_x , $F_x | \mathfrak{m}_x F_x$ n'est pas nul (lemme de Nakayama). Le faisceau G qui est nul en dehors de x et qui "vaut" $F_x | \mathfrak{m}_x F_x$ en x est alors cohérent et on a manifestement une surjection :

$$F \rightarrow G \rightarrow 0$$

Il en résulte un épimorphisme de $\Gamma(V, F)$ sur $\Gamma(V, G) = F_x | \mathfrak{m}_x F_x$ et $\Gamma(V, F)$ n'est pas nul.

Ceci étant démontré, soit f une section de \mathcal{O} sur V (fonction régulière sur V). Si U est un ouvert quelconque de V nous noterons U_f l'ensemble des points de U où f ne s'annule pas. L'existence du recouvrement (U_{f_i}) sera une conséquence du

LEMME 2. - Si x est un point quelconque de V et U un ouvert affine de V contenant x , il existe une fonction régulière f sur V telle que $V_f = U_f$ et que V_f contienne x .

En effet, soient W le complémentaire de U dans V , $I(W)$ et $I(W, x)$ les faisceaux des germes de fonctions qui s'annulent sur W , respectivement sur W et x . On a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow I(W, x) \rightarrow I(W) \rightarrow I(W)|I(W, x) \rightarrow 0$$

et le faisceau $I(W)|I(W, x)$ n'est manifestement pas nul. Il existe donc une section f de $I(W)$ qui n'appartient pas à $\Gamma(I(W, x))$: elle résoud le problème.

Le lemme 2 et la quasi-compacité de V entraînent l'existence d'un recouvrement affine de V par un nombre fini de V_{f_i} . Reste à montrer que l'idéal engendré par les f_i est A . Mais si U est un ouvert affine, les U_{f_i} recouvrent U et il en résulte que les restrictions des f_i à $\mathcal{O}(U)$ engendrent l'idéal unité. Autrement dit s'il y a p sections f_i et si \mathcal{O}^p désigne la somme directe de p faisceaux isomorphes à \mathcal{O} , le morphisme de \mathcal{O}^p dans \mathcal{O} défini par les f_i est surjectif. Il en va donc de même pour le morphisme de $A^p \rightarrow A$ défini par les f_i . (d) \Rightarrow (a) : nous allons montrer que le morphisme

$$\varphi : (S(V), S(\mathcal{O})) \rightarrow (V(A), \mathcal{S}\mathcal{A})$$

est un isomorphisme et que A est une algèbre de type fini et sans éléments nilpotents.

Remarquons d'abord que si $f \in A$ est une fonction régulière de V , l'anneau des coordonnées de V_f n'est autre que A_f . En effet si A_i désigne l'anneau des coordonnées de V_{f_i} , $A_{ij} = A_{if_j} = A_{jf_i}$, celui de $V_{f_i} \cap V_{f_j} = V_{f_i \cdot f_j}$, on a la fameuse suite exacte (voir l'exposé n° 1) :

$$0 \rightarrow A \rightarrow \prod_i A_i \rightarrow \prod_{i \neq j} A_{ij}$$

D'où l'on déduit (le foncteur $M \Rightarrow M_f$ est exact) :

$$0 \rightarrow A_f \rightarrow \prod_i (A_i)_f \rightarrow \prod (A_{ij})_f$$

Mais les $(A_i)_f$ et $(A_{ij})_f$ sont évidemment les anneaux de coordonnées de

$V_{f_i} \cap V_f$ et $V_{f_i} \cap V_{f_j} \cap V_f : A_f$ est donc l'anneau des coordonnées de V_f .

On en déduit que l'application $S(V) \rightarrow V(A)$ est injective et qu'elle induit un isomorphisme

$$(S(V_{f_i}), \omega(S(V_{f_i}))) \rightarrow (V(A)_{f_i}, \mathcal{O}_A(V(A)_{f_i}))$$

D'autre part les $V(A)_{f_i}$ recouvrent $V(A)$, car les f_i engendrent l'unité. Par recollement des morceaux on obtient donc un isomorphisme

$$(S(V), S(\omega)) \rightarrow (V(A), \mathcal{O}_A)$$

et il reste à montrer que A est de type fini et sans éléments nilpotents.

Mais A est une algèbre de fonctions et n'a pas d'éléments nilpotents. D'autre part, pour tout i , soit a_{i_k} un nombre fini d'éléments de A tels que les images de f_i et a_{i_k} dans A_{f_i} engendrent l'anneau A_{f_i} . Soit enfin $a_i \in A$ tels que $\sum a_i f_i = 1$ dans A . On va prouver que les f_i, a_{i_k}, a_i engendrent l'anneau A :

En effet, en élevant la formule $\sum a_i f_i = 1$ à une puissance suffisante on obtient des formules $\sum a_i^{(m)} f_i^m = 1$, où les $a_i^{(m)}$ s'expriment à l'aide des a_i et des f_i . Si maintenant x un élément de A , son image dans A_{f_i} , peut s'écrire x_i / f_i^p , pour p assez grand. Il en résulte (voir exposé n° 1) que, pour n assez grand, on a :

$$x = \sum_i a_i^{(n+p)} x_i f_i^n, \text{ ce qui démontre l'assertion.}$$

COROLLAIRE. - Si V est un ensemble algébrique affine, U un ouvert de V , A l'anneau des coordonnées de V , $\mathcal{O}_A(U)$ l'anneau des coordonnées de U , on a les équivalences :

a. U est un ouvert affine

b. si M est un A -module, l'homomorphisme canonique

$$M \otimes_A \mathcal{O}_A(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$$

est bijectif.

En outre si l'une de ces propositions équivalentes est satisfaite, alors $\Omega(U)$ est A -plat.

(a) \Rightarrow (b) : En effet, le foncteur $M \Rightarrow \Omega(U)$ est alors exact à droite, lorsque M parcourt les A -modules. En particulier si

$$L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

est une résolution de M par des A -modules libres, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 \otimes_A \Omega(U) & \rightarrow & L_0 \otimes_A \Omega(U) & \rightarrow & M \otimes_A \Omega(U) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u & & \\ \Omega_1(U) & \rightarrow & \Omega_0(U) & \rightarrow & \Omega(U) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme v et w sont des isomorphismes, u en est un. (b) \Rightarrow (a) : On va montrer que si

$$0 \rightarrow F' \rightarrow G' \rightarrow H' \rightarrow 0$$

forme une suite exacte de faisceaux cohérents de U , alors les sections sur U forment une suite exacte.

Or il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

de faisceaux cohérents de V tels que $F|U = F'$, $G|U = G'$, $H|U = H'$ (voir [1], la démonstration est reprise en appendice [2]). Si M , N et P sont alors les modules associés à F , G et H , la suite

$$M \otimes_A \Omega(U) \rightarrow N \otimes_A \Omega(U) \rightarrow P \otimes_A \Omega(U) \rightarrow 0$$

est exacte, ce qui montre que l'homomorphisme

$$G'(U) = N \otimes_A \Omega(U) \rightarrow H'(U) = P \otimes_A \Omega(U)$$

est surjectif,

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). - Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, n° 2.
- [2] GROTHENDIECK (Alexander). - La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, n° 2.
- [3] Séminaire CARTAN-CHEVALLEY : Géométrie algébrique, t. 8, 1955/56.
- [4] Séminaire CHEVALLEY : Classification des groupes de Lie algébrique, t. 1, 1958.