Alain Durand

Un critère de transcendance

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G11, p. G1-G9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G11, 9 p.

11 mars 1974

UN CRITÈRE DE TRANSCENDANCE

par Alain DURAND

0. Introduction.

Étant donné un polynôme $P \in \underset{\sim}{C}[X]$,

$$P(X) = p_N X^N + \ldots + p_0 \quad \text{avec} \quad p_N \neq 0 ,$$

on note

$$\partial(P) = N , \quad H(P) = \sup_{0 \leq k \leq N} |p_k| , \quad s(P) = \partial(P) + \log H(P) .$$

On appelle $\partial(P)$ et $H(P)$ respectivement le degré et la hauteur de P .

Si α est un nombre algébrique non nul et si P est son polynôme minimal, on note $\partial(\alpha)$, $H(\alpha)$ et $s(\alpha)$ les quantités $\partial(P)$, $H(P)$ et $s(P)$.

Le but de ce travail est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Soit θ un nombre complexe. Pour que θ soit transcendant, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ de nombres algébriques deux à deux distincts tels que, pour n assez grand, $0 < |\theta - \theta_n| < 1$ et*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{s(\theta_n)}{\log|\theta - \theta_n|} = 0 .$$

Dans une première partie, après une note historique et quelques lemmes auxiliaires, nous démontrerons la condition suffisante (théorème 1.4).

Dans une seconde partie, après quelques rappels sur les nombres transcendants, nous démontrerons la condition nécessaire (théorème 2.1).

Enfin, dans une troisième partie, nous appliquerons ce critère à l'étude des séries lacunaires, et démontrerons un théorème dû à P. L. CIJSOUW (corollaire 3.1).

1. Étude de la condition suffisante.

(a) Note historique.

Dans un article intitulé "Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques" [7], J. LIOUVILLE fut le premier, en 1844, à donner une condition nécessaire pour qu'un nombre soit algébrique et, par là même, une condition suffisante pour qu'un nombre soit transcendant. Il montra le résultat suivant :

(1.1) THÉORÈME de Liouville. - *Si α est un nombre algébrique de degré $n \geq 2$, alors il existe une constante $c = c(\alpha) > 0$ telle que, pour tous entiers rationnels p , q $(q > 0)$, on ait $|\alpha - p/q| \geq c/q^n$.*

Ce théorème permit la première construction de nombres transcendants, nombres que l'on a appelés nombres de Liouville : en effet, on déduit du théorème 1.1 que, ξ étant un nombre donné, si, pour tout $\omega > 0$, l'inégalité

$$0 < |q\xi - p| < \frac{1}{q^{\omega}} \quad , \qquad q > 1 \ ,$$

a une solution (p , q) en nombres entiers, alors ξ est transcendant.

Un exemple de nombre de Liouville est donné par

$$\xi = \sum_{n\geq 1} q^{-N_n} \ ,$$

où $q > 1$ est un entier fixé et $N_1 < N_2 < \ldots$ est une suite d'entiers positifs tels que

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} N_{n+1}/N_n = +\infty$$

(en particulier si $N_n = n!$).

On peut formuler le critère de transcendance de Liouville sous la forme suivante.

(1.2) THÉORÈME. - Soit ξ un nombre complexe. On suppose qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombres rationnels $(q_n > 0$ pour tout $n \geq 1)$ et une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels positifs tels que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Si

$$0 < |\xi - p_n/q_n| \leq 1/q_n^{s_n} \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \ .$$

alors ξ est un nombre de Liouville (donc transcendant).

Ce théorème sera généralisé par FRANKLIN [5] (voir également FABER [4]). Il obtint le résultat suivant :

(1.3) THÉORÈME. - Soit $(\alpha_i)_{i\geq 0}$ une suite convergente de nombres algébriques appartenant à un corps de nombres K fixe, leurs conjugués étant uniformément bornés. On suppose que l'ensemble $\{\alpha_i \ ; \ i \in \underset{\sim}{N}\}$ est infini. Soit $\theta = \lim_{i\to+\infty} \alpha_i$ et soient $(c_i)_{i\geq 0}$ et $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ deux suites d'entiers tendant vers l'infini avec i telles que les nombres $c_i\,\alpha_i$ soient entiers algébriques et $|\theta - \alpha_i| < 1/c_i^{\lambda_i}$. Alors θ est transcendant.

Le but du paragraphe suivant est d'améliorer le résultat de FRANKLIN.

(b) Énoncé du théorème (1.4) et lemmes auxiliaires.

Le théorème en question est le suivant.

(1.4) THÉORÈME. - Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de nombres algébriques deux à deux distincts, et soit θ leur limite. On suppose que

(1.4.1) $\qquad |\theta - \theta_n| \leq \exp(-\,\gamma_n\ s(\theta_n))$ avec $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty$.

Alors θ est transcendant.

(1.5) Remarques.

(1.5.1) La conclusion du théorème reste vraie si on remplace la condition (1.4.1) par la condition plus faible

$$|\theta - \theta_n| \leq \exp(-\gamma_n\ s(\theta_n)) \quad \text{avec} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty .$$

(1.5.2) De même, la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement qu'il existe une infinité de θ_n deux à deux distincts.

(1.5.3) Comme pour toute suite convergente les conditions "$\theta_{n+1} = \theta_n$ pour $n \geq n_0$" et "il n'existe qu'un nombre fini de θ_n deux à deux distincts" sont équivalentes, en utilisant la remarque (1.5.2), la conclusion du théorème reste vraie si l'on suppose seulement qu'il existe une infinité d'indices $n \geq 1$ pour lesquels $\theta_{n+1} \neq \theta_n$.

(1.5.4) Par contre, on ne peut remplacer simultanément les deux conditions du théorème (1.4) par les conditions plus faibles énoncées dans les remarques (1.5.1) et (1.5.2). Un contre-exemple est fourni par la suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$, définie par

$$\theta_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$\theta_n = 1 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

(1.5.5) Avant d'énoncer cette dernière remarque, quelques rappels nous sont nécessaires. Si α est un nombre algébrique, tout entier $m \in \underset{\sim}{N}^*$, tel que $m\alpha$ soit un entier algébrique, est appelé un dénominateur de α . Plus généralement, $M \in \underset{\sim}{N}$ est un dénominateur des nombres $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ si $M\alpha_1 , \dots , M\alpha_n$ sont tous entiers algébriques. Le plus petit dénominateur $\mu(\alpha)$ du nombre algébrique α s'appelle le dénominateur de α . D'autre part, si $\alpha^{(1)} = \alpha , \dots , \alpha^{(p)}$ sont les conjugués de α , on note

$$|\overline{\alpha}| = \max_{1\leq k\leq p} |\alpha^{(k)}| .$$

On appelle alors taille de $\alpha \neq 0$ le nombre

$$t(\alpha) = \max\{\log |\overline{\alpha}| , \log \mu(\alpha)\} .$$

La condition (1.4.1) du théorème peut être alors remplacée par la condition plus forte :

(1.5.6) $|\theta - \theta_n| \leq \exp\{-\gamma_n\ \partial(\theta_n)(1 + t(\theta_n))\}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty$.

Cela résulte du lemme suivant (dont la preuve est celle donnée par P. L. CIJSOUW).

(1.5.7) LEMME. - *Soit* α *un nombre algébrique de degré* d *et de hauteur* h ; *soit* m *un dénominateur de* α . *Alors*

$$h \leq \{2m|\overline{\alpha}|^*\}^d ,$$

où $|\overline{\alpha}|^* = \max\{1 , |\overline{\alpha}|\}$. *En particulier,*

$$s(\alpha) < 2\partial(\alpha)(1 + t(\alpha)) .$$

Preuve. - Soit

$$Q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_d z^d = q_d(z - \alpha^{(1)})\dots(z - \alpha^{(d)}) , \quad q_d > 0 ,$$

le polynôme minimal de α . Les nombres q_i/q_d $(i = 0 , \dots , d - 1)$ sont donnés (à un coefficient ± 1 près) par les fonctions symétriques élémentaires des racines $\alpha^{(1)} = \alpha , \dots , \alpha^{(d)}$ de Q . D'où

$$|q_i| \leq q_d\binom{d}{i}|\overline{\alpha}|^i \leq q_d \, 2^d(|\overline{\alpha}|^*)^d \quad (i = 0 , \dots , d - 1 \text{ et } i = d) .$$

Puisque $m\alpha$ est un entier algébrique, il existe un polynôme

$$R(z) = (mz)^d + r_{d-1}(mz)^{d-1} + \dots + r_1(mz) + r_0$$

pour lequel $R(\alpha) = 0$. Puisque Q est le polynôme minimal de α , R est donc multiple de Q et par suite $q_d \leq m^d$. D'où

$$h \leq \{2m|\overline{\alpha}|^*\}^d .$$

Il vient alors

$$s(\alpha) = \partial(\alpha) + \log H(\alpha) \leq \partial(\alpha)[1 + \log 2 + 2t(\alpha)] < 2\partial(\alpha)(1 + t(\alpha)) .$$

La démonstration du théorème (1.4) reposera essentiellement sur le lemme suivant.

(1.6) LEMME. - Soit α un nombre algébrique non nul. Il existe une constante $c = c(\alpha) > 0$ telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, on ait

$$P(\alpha) = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad |P(\alpha)| \geq \exp(- c \; s(P)) .$$

Preuve. - Notons m le dénominateur de α . Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$,

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_N X^N , \qquad a_N \neq 0 ,$$

un polynôme non nul de degré N et de hauteur H . Si $P(\alpha) \neq 0$, le nombre $m^N P(\alpha)$ est alors un entier algébrique non nul, donc

$$|N[m^N P(\alpha)]| \geq 1 , \tag{1.6.1}$$

où $N(\beta)$ désigne la norme $N_{\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}}(\beta)$ du nombre algébrique β .

Soient $\alpha^{(1)} = \alpha , \dots , \alpha^{(p)}$ les conjugués de α . Il vient

$$N[m^N P(\alpha)] = \prod_{i=1}^{p} m^N P(\alpha^{(i)}) = m^{pN} P(\alpha) \prod_{i=2}^{p} P(\alpha^{(i)}) .$$

Or,

$$|P(\alpha^{(i)})| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k||\alpha^{(i)}|^k \leq H(N + 1) \max\{1 , |\overline{\alpha}|\}^N = H(N + 1) \Delta^N ,$$

avec $\Delta = \operatorname{Sup}\{1 , |\overline{\alpha}|\}$. D'où

$$|\prod_{i=2}^{p} P(\alpha^{(i)})| \leq [H(N + 1) \Delta^N]^{p-1} ,$$

et par suite, compte tenu de la relation (1.6.1),

$$|P(\alpha)| \geq [H(N + 1) \Delta^N]^{1-p} m^{-pN} \geq [H2^N \Delta^N]^{1-p} m^{-pN} = (2^{1-p} \Delta^{1-p} m^{-p})^N H^{1-p} .$$

Posons

$$c = \log[2^{p-1} \Delta^{p-1} m^p] + (p - 1) .$$

On obtient alors

$$|P(\alpha)| \geq \exp(-c\ s(P)) \quad \text{avec} \quad c = c(\alpha) \geq 0 \ .$$

(c) Preuve du théorème (1.4).

On raisonne par l'absurde en supposant θ algébrique. D'après le lemme (1.6), il existe une constante $c = c(\theta) > 0$ telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, on ait

$$P(\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad |P(\theta)| \geq \exp(-c\ s(P)) \ .$$

Soit P_n le polynôme minimal de θ_n ; notons d_n son degré et h_n sa hauteur, de sorte que $s(P_n) = s(\theta_n) = d_n + \log h_n$.

Pour n assez grand, comme les θ_n sont deux à deux distincts, les nombres θ et θ_n ne sont pas conjugués ; on a donc $P_n(\theta) \neq 0$, et par suite,

(1.7) $$|P_n(\theta)| \geq \exp(-c\ s(\theta_n)) \ .$$

Si $P_n(X) = \sum_{k=0}^{d_n} a_{nk} X^k$, il vient

(1.8) $$|P_n(\theta)| = |P_n(\theta) - P_n(\theta_n)| \leq \sum_{k=1}^{d_n} |a_{nk}|\,|\theta^k - \theta_n^k| \leq d_n\ h_n \sup_{1\leq k\leq d_n} |\theta^k - \theta_n^k| \ .$$

Par hypothèse, on a

$$|\theta - \theta_n| \leq \exp(-\gamma_n\ s(\theta_n)) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty \ .$$

Pour n assez grand, il vient $|\theta - \theta_n| \leq 1$ et, par suite, pour $1 \leq k \leq d_n$:

$$|\theta^k - \theta_n^k| \leq k(1 + |\theta|)^k\ |\theta - \theta_n| \leq d_n(1 + |\theta|)^{d_n} \exp(-\gamma_n\ s(\theta_n)) \ .$$

D'où, d'après (1.8) :

(1.9) $$|P_n(\theta)| \leq d_n^2\ h_n(1 + |\theta|)^{d_n} \exp(-\gamma_n\ s(\theta_n)) \leq \exp(-(\gamma_n - d)\ s(\theta_n))$$

avec $d = 2 + \log(1 + |\theta|)$.

Des relations (1.7) et (1.9) on tire, pour n assez grand,

$$(\gamma_n - d)\ s(\theta_n) \leq c\ s(\theta_n) \ ,$$

ou encore $\gamma_n \leq d + c$, ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty$. Par suite θ est transcendant.

2. Étude de la condition nécessaire.

(a) Énoncé du théorème (2.1) et rappels de quelques propriétés des nombres transcendants.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

(2.1) THÉORÈME. - Soit θ un nombre transcendant. Il existe alors une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques deux à deux distincts tels que

$$\partial(\theta_n) \leq n \quad \underline{\text{et}} \quad |\theta - \theta_n| \leq \exp(-\tfrac{1}{4}\, n\ s(\theta_n)) \ .$$

Auparavant, rappelons quelques propriétés des nombres transcendants.

Soit θ un nombre complexe quelconque, et soit $n \in \underset{\sim}{N}$. En vue de sa classification des nombres complexes, MAHLER [8] définit $\omega_n(\theta)$ comme étant la borne supérieure des nombres réels ω pour lesquels il existe une infinité de polynômes P à coefficients entiers rationnels et de degré $\leq n$ tels que

$$0 < |P(\theta)| \leq H(P)^{-\omega} .$$

Si θ est transcendant, il vient alors

(2.1.1) $\omega_n(\theta) \geq n$ pour tout n (si θ est réel),

(2.1.2) $\omega_n(\theta) \geq (n - 1)/2$ pour tout n (si θ n'est pas réel).

De même, KOKSMA [6] définit $\omega_n^*(\theta)$ comme étant la borne supérieure des nombres réels ω^* pour lesquels il existe une infinité de nombres algébriques β de degré $\leq n$ tels que

$$|\theta - \beta| \leq H(\beta)^{-1-\omega^*} .$$

Il est facile de voir que l'on a $\omega_n^*(\theta) \leq \omega_n(\theta)$, et WIRSING [9] montra que si θ est transcendant, on a alors

(2.1.3) $\omega_n^*(\theta) \geq \frac{1}{2}(\omega_n(\theta) + 1)$ pour tout n (si θ est réel),

(2.1.4) $\omega_n^*(\theta) \geq \sup[\frac{1}{2}\,\omega_n(\theta)\ ,\ (\omega_n(\theta))/(2\omega_n(\theta) - n + 2)]$ pour tout n (si θ n'est pas réel).

Si θ est transcendant, on déduit donc des relations (2.1.1) et (2.1.3)

$$\omega_n^*(\theta) \geq \frac{1}{2}(n + 1) \quad \text{pour tout } n \quad (\text{si } \theta \text{ est réel}),$$

et de la relation (2.1.4)

$$\omega_n^*(\theta) \geq \frac{n}{4} \quad \text{pour tout } n \quad (\text{si } \theta \text{ n'est pas réel}).$$

Donc, pour tout nombre θ transcendant, on a

(2.1.5) $\omega_n^*(\theta) \geq \frac{n}{4}$ pour tout n.

(b) Preuve du théorème (2.1).

Cette preuve repose sur le lemme suivant.

(2.2) LEMME. - *Soit θ un nombre transcendant, et soit $n \in \underset{\sim}{N}$. Il existe alors une infinité de nombres β algébriques de degré $\leq n$ tels que*

$$|\theta - \beta| \leq \exp(-\frac{1}{4}\, n\, s(\beta)) .$$

Preuve. - D'après la relation (2.1.5), compte-tenu de la définition de $\omega_n^*(\theta)$, il existe une infinité de nombres algébriques β de degré $\leq n$ tels que

$$|\theta - \beta| \leq \exp[-(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}) \log H(\beta)] .$$

Or pour $H(\beta)$ assez grand, on a $(1/4)n\, s(\beta) \leq (n/4 + 1/2) \log H(\beta)$, d'où la conclusion.

Pour démontrer le théorème (2.1), on construit la suite $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence sur n. D'après le lemme (2.2), il existe θ_1 algébrique tel que

$$\partial(\theta_1) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\theta - \theta_1| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{4}\, s(\theta_1)) .$$

Supposons construits des nombres algébriques $\theta_1 , \ldots , \theta_m$ deux à deux distincts et vérifiant

$$\partial(\theta_k) \leqslant k \quad \text{et} \quad |\theta - \theta_k| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{4}\, k\, s(\theta_k)) \quad \text{pour} \quad k = 1 , \ldots , m .$$

D'après le lemme (2.2), il existe une infinité de nombres algébriques β de degré $\partial(\beta) \leqslant n + 1$ tels que

$$|\theta - \beta| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{4}\,(n + 1)\, s(\beta)) .$$

Il existe donc un nombre algébrique $\beta = \theta_{n+1}$, distinct de $\theta_1 , \ldots , \theta_n$ et vérifiant

$$\partial(\theta_{n+1}) \leqslant n + 1 \quad \text{et} \quad |\theta - \theta_{n+1}| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{4}\,(n + 1)\, s(\theta_{n+1})) .$$

3. Applications aux séries lacunaires.

Soit $\sigma(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{e_k}$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, dont les coefficients a_k sont des nombres algébriques non nuls et où $(e_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite croissante d'entiers positifs. On pose $A_k = \max_{0\leqslant i\leqslant k} |\overline{a_i}|$ et soit M_k un dénominateur de $a_0 , a_1 , \ldots , a_k$; soit D_k le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(a_0 , a_1 , \ldots , a_k)$.

H. COHN [3] montra que, si $a_k \in \mathbb{Q}$ $(k = 0 , 1 , \ldots)$ et

$$\lim_{k\to+\infty} (e_k + \log M_k)/e_{k+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \log A_k/e_{k+1} = 0 ,$$

alors $\sigma(\theta)$ est transcendant pour tout θ algébrique avec $0 < |\theta| < R$.

G. BARON et E. BRAUNE [1] firent une généralisation partielle du résultat de COHN en montrant, dans le cas d'entiers algébriques a_k de degré t_k $(k=0,1,\ldots)$ que, si

$$B^{-k} < |\overline{a_k}| < B^k \quad (k = 0 , 1 , \ldots) \quad \text{pour une constante} \quad B \geqslant 1$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} e_k T_k^2/e_{k+1} = 0 \quad \text{où} \quad T_k = t_0\, t_1 \ldots t_k ,$$

alors $\sigma(\theta)$ est transcendant pour tout θ algébrique tel que $0 < |\theta| < R$.

Enfin, P. L. CIJSOUW et R. TIJDEMAN [2] généralisèrent les résultats de COHN, BARON et BRAUNE en prouvant que $\sigma(\theta)$ est transcendant pour tout θ algébrique tels que $0 < |\theta| < R$ si a_k est algébrique $(k = 0 , 1 , \ldots)$ et

$$\lim_{k\to+\infty} (e_k + \log M_k)D_k/e_{k+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} (\log A_k)D_k/e_{k+1} = 0 .$$

On peut démontrer ce dernier théorème à l'aide du théorème (1.4) ; on obtient alors le résultat suivant.

(3.1) COROLLAIRE du théorème 1.4 [CIJSOUW, TIJDEMAN]. - Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres algébriques non nuls. Posons $A_k = \max_{0\leq i\leq k} |\overline{a_i}|$, et soit D_k le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_k)$. On suppose que M_k est un dénominateur de $a_0, a_1, \dots, a_k$. Soit $(e_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante d'entiers positifs, et soit R (qu'on suppose > 0) le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{e_k} .$$

Si

$$\lim_{k\to+\infty} (e_k + \log M_k)D_k/e_{k+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} (\log A_k)D_k/e_{k+1} = 0 ,$$

alors le nombre $\sigma(\theta)$, défini par

$$\sigma(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \theta^{e_k} ,$$

est transcendant pour tout θ algébrique tel que $0 < |\theta| < R$.

Preuve. - On pose

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \theta^{e_k} .$$

Soit p tel que $|\theta| < p < R$. Puisque $\overline{\lim}_{n\to+\infty} |a_n|^{1/e_n} = \frac{1}{R}$, on a, pour $n\geq n_0$ assez grand, l'inégalité $|a_n| < p^{-e_n}$. Donc, pour $n \geq m_0$, on a :

(3.2) $|\theta-\theta_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k||\theta|^{e_k} < \sum_{h=e_{n+1}}^{+\infty} (|\theta|p^{-1})^k = (|\theta|p^{-1})^{e_{n+1}} (1-|\theta|p^{-1})^{-1}$.

Soient d_n le degré de θ_n et d le degré de θ ; comme $\theta_n \in \mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_n, \theta)$, il vient $d_n \leq dD_n$. Si M est un dénominateur de θ, alors $M^{e_n} M_n$ est un dénominateur de θ_n, et, en outre,

$$|\overline{\theta_n}| \leq \sum_{k=0}^{n} |\overline{a_k}||\overline{\theta}|^{e_k} \leq A_n(1 + |\overline{\theta}|)^{e_n} .$$

D'où

$$\text{(3.3)} \quad t(\theta_n) \leq \sup[e_n \log M + \log M_n , \log A_n + e_n \log(1 + (\overline{\theta}))]$$

$$\leq ce_n + \sup[\log M_n , \log A_n] ,$$

avec $c = \sup[\log M , \log(1 + |\overline{\theta}|)] > 0$.

Des relations (3.2) et (3.3), compte tenu des relations (3.1) de l'hypothèse, on déduit

$$|\theta - \theta_n| \leq \exp(-\gamma_n \partial(\theta_n)(1 + t(\theta_n))) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty .$$

Comme $\theta_n \neq \theta_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ puisque $a_k \theta^{e_k} \neq 0$ pour tout $k \geq 0$, le théorème (1.4), compte tenu des remarques (1.5.3) et (1.5.6), montre que $\sigma(\theta)$ est transcendant.

Exemple. - $\sigma(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{n!}$ est transcendant pour tout θ algébrique tel que $0 < |\theta| < 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARON (G.) et BRAUNE (E.). - Zur Transzendenz von Lückenreihen mit ganzalgebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, Comp. Math., Groningen, t. 22, 1970, p. 1-6.

[2] CIJSOUW (P. L.) and TIJDEMAN (R.). - On the transcendence of certain power series of algebraic numbers, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 301-305.

[3] COHN (H.). - Note on almost-algebraic numbers, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 1042-1045.

[4] FABER (G.). - Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen, Math. Annalen, t. 58, 1904, p. 545-557.

[5] FRANKLIN (P.). - A new class of transcendental numbers, Trans. Amer. math. Soc., t. 42, 1937, p. 155-182.

[6] KOKSMA (J. F.). - Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, Monatsh. für Math., t. 48, 1939, p. 176-189.

[7] LIOUVILLE (J.). - Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 18, 1844, p. 883-885 et 910-911.

[8] MAHLER (K.). - Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I., J. für reine und angew. Math., t. 166, 1931, p. 118-136.

[9] WIRSING (E.). - Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, J. für reine und angew. Math., t. 206, 1961, p. 67-77.

(Texte reçu le 24 avril 1974)

Alain DURAND
13 boulevard Georgette Agutte
95210 SAINT-GRATIEN