

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

ETIENNE FOUVRY

## **Construction d'une suite d'entiers ayant certaines propriétés additives**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 1 (1975-1976),  
exp. n° 13, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_1\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A12_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »  
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction  
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION D'UNE SUITE D'ENTRIERS  
AYANT CERTAINES PROPRIÉTÉS ADDITIVES

par Etienne FOUVRY

Soit  $\mathcal{K}$  une partie de  $\underline{\mathbb{N}}^*$  ; le but de cet exposé est de résumer la construction d'une suite  $\mathcal{A}$  de  $\underline{\mathbb{N}}$ , telle que les puissances  $k$ -ièmes des éléments de  $\mathcal{A}$  forment une base additive si, et seulement si,  $k$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

1. Définitions et notations.

Les parties de  $\underline{\mathbb{N}}$  seront notées par des majuscules rondes :  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , ... et on appellera :  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  ... le nombre d'éléments de :  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  ... strictement positifs inférieurs ou égaux à  $n$ .

On appelle  $\bar{d}\mathcal{A}$  (densité asymptotique supérieure) la limite supérieure de  $A(n)n^{-1}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $h \in \underline{\mathbb{N}}^*$  et  $\mathcal{A} \subset \underline{\mathbb{N}}$ , on note  $h\mathcal{A} = \{a_{r_1} + \dots + a_{r_h} ; 1 \leq i \leq h, a_{r_i} \in \mathcal{A}\}$ .  $\mathcal{A}$  est appelée base (resp. base asymptotique), s'il existe  $h$  (resp.  $h$  et  $N$ ) tel que  $h\mathcal{A} = \underline{\mathbb{N}}$  (resp. tels que  $h\mathcal{A} \supset \{N, N+1, \dots\}$ ).

Si  $\mathcal{A}$  est une base (resp. base asymptotique), la borne inférieure des  $h$  définis auparavant est appelée ordre de  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{A}$  est une base, 0 et 1 appartiennent à  $\mathcal{A}$ , si  $\mathcal{A}'$  est une base asymptotique  $\mathcal{A}' \cup \{0, 1\}$  est une base.

Si  $\mathcal{A} \subset \underline{\mathbb{N}}$ , on note  $\mathcal{A}^{(k)} = \{a^k ; a \in \mathcal{A}\}$ .

Si  $\alpha \in \underline{\mathbb{R}}$ ,  $\{\alpha\}$  est la partie fractionnaire de  $\alpha$ ,  $\|\alpha\|$  est la distance de  $\alpha$  à l'entier le plus proche ( $\|\alpha\| = \inf(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ ) et  $e(\alpha) = \exp(2\pi i \alpha)$ .

2. Présentation du résultat.

Si  $k \in \underline{\mathbb{N}}^*$ ,  $\underline{\mathbb{N}}^{(k)}$  est une base (théorème de Hilbert). On est ainsi amené à se poser les questions suivantes :

Si  $\mathcal{A}$  est une base,  $\mathcal{A}^{(k)}$  en est-elle une ?

Si  $\mathcal{B}$  n'est pas une base, en est-il de même de  $\mathcal{B}^{(k)}$  ?

Suite au problème posé par DRESS d'existence de deux suites  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  telles que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}^{(2)}$  soient des bases, mais que ni  $\mathcal{B}^{(2)}$  ni  $\mathcal{C}$  n'en soient, DESHOILLERS, ERDÖS et SARKÖZY, en 1974, [1] construisent  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , avec l'ordre de  $\mathcal{B}$  inférieur ou égal à 3, et celui de  $\mathcal{C}^{(2)}$  inférieur ou égal à 6. Par leur méthode, on peut aussi construire une suite  $\mathcal{Q}$ , telle que  $\mathcal{Q}$  ne soit pas une base mais,

pour tout  $k \geq 2$ ,  $\mathcal{B}^{(k)}$  en soit une.

A la fin de leur article est conjecturé le résultat suivant, que DESHOUILLEERS et FOUVRY démontrent en 1975 [2].

THÉOREME. - Pour toute partie  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe une suite  $\alpha$  d'entiers telle que  $\alpha^{(k)}$  soit une base si, et seulement si,  $k$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

### 3. Résumé de la démonstration (Pour une démonstration complète, se reporter à [2]).

La principale étape de la démonstration est d'établir la proposition suivante. Soient  $\mathcal{K}$  une partie de  $\mathbb{N}^*$ , et  $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$ .

PROPOSITION 1. - Si  $\eta$  est un nombre réel strictement positif,  $K$  un entier strictement positif, et si  $\mathcal{B}(\eta, K) = \{n; \forall \ell \leq K, \ell \notin \mathcal{K} : \{\rho n^\ell\} \leq \eta\}$ ,  $\mathcal{B}_{(\eta, K)}^{(k)}$  est une base asymptotique d'ordre au plus  $2^{k+1}$ , pourvu que  $k$  soit supérieur ou égal à 3, et appartienne à  $\mathcal{K}$ .

Ainsi il existe un entier  $N(\eta, K, k)$  tel que

$$\{N(\eta, K, k), N(\eta, K, k) + 1, \dots\} \subset 2^{k+1} \mathcal{B}^{(k)}(\eta, K).$$

D'autre part, on a un critère permettant d'affirmer qu'une suite n'est pas une base.

PROPOSITION 2. - Si  $\alpha$  est une suite d'entiers telle qu'il existe  $\alpha$  irrationnel avec la propriété  $\lim_{a \in \alpha, a \rightarrow +\infty} \{\alpha a\} = 0$ , la suite  $\alpha$  n'est pas une base.

Ceci s'obtient facilement en montrant par récurrence sur  $h$  que  $\overline{dh}\alpha = 0$  (voir [1], où un critère plus général est donné).

Avec l'aide des propositions 1 et 2, on obtient le théorème.

Supposons que  $\mathcal{K}$  ne contienne ni 1 ni 2 : D'après la proposition 1, il existe une suite strictement croissante d'entiers  $N_u$  tels que

$$\forall k \in \{1, u\} \cap \mathcal{K} : n \geq N_u^k \implies n \in (2^k + 1) \mathcal{B}^{(k)}((1/u), u)$$

(on pose  $N_1 = 2$ ).

La suite  $\alpha$  est construite ainsi :

- elle contient 0 et 1,

-  $\alpha \cap (N_u, N_{u+1}[ = \mathcal{B}((1/u), u) \cap (N_u, N_{u+1}[$  pour  $u \geq 1$ .

Soit  $k$  un entier de  $\mathcal{K}$ , et  $n \geq N_k^k$ , il existe donc  $u \geq k$  tel que  $N_u^k \leq n < N_{u+1}^k$ . D'après la définition de  $N_u$ ,  $n$  s'exprime en somme de  $2^k + 1$  éléments de  $\mathcal{B}^{(k)}(u, (1/u))$ , donc en somme de  $2^k + 1$  éléments de  $\alpha^{(k)}$  (on a l'inclusion  $\mathcal{B}((1/u), u) \cap \{0, N_{u+1}[ \subset \alpha$ ).

Si  $k \in \mathcal{K}$ ,  $k \geq 3$ ,  $\alpha^{(k)}$  est une base d'ordre inférieur ou égal à  $\max(2^k + 1, N_k^k)$ .

Par contre, si  $l \geq 1$ ,  $l \notin K$ ,  $\{\rho a^l\} \leq \frac{1}{u}$  si  $a \in \mathcal{A}$ , et  $N_u \leq a < N_{u+1}$ ,  $u \geq l$ , et  $\mathcal{A}^{(l)}$  n'est pas une base (proposition 2).

Le théorème est démontré si  $K$  ne contient ni 1, ni 2.

Si  $K$  est quelconque : Soit  $K'$  l'ensemble des triples des éléments de  $K$ , d'après ce qui précède il existe une suite  $\mathcal{A}'$  correspondant à  $K'$ , la suite  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'^{(3)}$  correspond à  $K$ , et le théorème est démontré.

Obtention de la proposition 1. - Cette proposition se démontre grâce à la méthode du cercle. On a suivi l'exposé qu'en donne VINOGRADOV [4] dans le cas du problème de Waring, aussi on suppose  $k \geq 3$ .

Soit  $l_1 < l_2 < \dots < l_{K^*}$  l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $K$  n'appartenant pas à  $K$ .

$N$  est un entier (suffisamment grand), et on pose

$$P = [N^{1/k}], \quad s = 2^k + 1, \quad S(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{B}, n \leq P} e(\alpha n^k), \quad \text{où } \mathcal{B} = \mathcal{B}(\eta, K)$$

$$S(a, q) = \sum_{u=0}^{q-1} e(au^k/q), \quad I(z) = \int_0^P e(zx^k) dx, \quad M = P^{a_3}, \quad \tau = P^{k-a_1},$$

$$Q = P^{a_2} \quad \text{avec } 0 < a_3 < 1, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

$$\mathcal{M}(a, q) = [(a/q) - (1/\tau), (a/q) + (1/\tau)] \quad \text{avec } (a, q) = 1, \quad 1 \leq a \leq q \leq Q.$$

Si  $\alpha \in \mathcal{M}(a, q)$ , on écrit  $\alpha = (a/q) + z(\alpha)$ .

$\mathcal{M} = \bigcup_{1 \leq q \leq Q} \bigcup_{(a, q)=1} \mathcal{M}(a, q)$ ,  $\mathcal{m}$  est le complémentaire de  $\mathcal{M}$  dans  $[(1/\tau), 1 + (1/\tau)]$ .  $r(N) = \int_{1/\tau}^{1+(1/\tau)} (S(\alpha))^s e(-\alpha N) d\alpha$  est le nombre de représentations de  $N$  en somme d'éléments de  $\mathcal{B}^{(k)}(\eta, K)$ .

(a) Evaluation de la contribution des arcs majeurs :

Pour évaluer  $r_1(N) = \int_{\mathcal{M}} (S(\alpha))^s e(-\alpha N) d\alpha$ , il faut un lemme renseignant sur la répartition des éléments de  $\mathcal{B}$  dans les progressions arithmétiques.

LEMME 1. - Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers ( $a > 0$ ), il existe deux constantes  $\delta > 0$  et  $c$  ( $0 < c < 1$ ) telles que :

$$\text{Card}\{n ; n \in \mathcal{B}, n \leq V, n \equiv b \pmod{a}\} = \eta^{K^*}(V/a) + O((V/a)^{1-\delta}),$$

où le 0 est uniforme pour  $a$  et  $b$  inférieurs à  $V^c$ .

Ce résultat s'obtient par utilisation d'un théorème d'Erdős-Turan-Koksma (cf. [3], p. 116) qui permet de majorer dans  $\mathcal{R}^{K^*}$  la discrédence de la suite

$$x_n = (\rho(an + b)^{l_1}, \dots, \rho(an + b)^{l_{K^*}}).$$

On est amené à évaluer des sommes du type :  $\sum_{n=1}^{[V/a]} e(P(n))$ , où  $P(n)$  est un polynôme de degré  $r \leq K$ , dont le premier coefficient est  $ma^r \rho$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), mais  $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$ , par son développement en fractions continues qui ne comporte que des 1, on peut prendre  $\tau = 1$  dans le théorème I de Vinogradov ([4], page 101); ou du type

$$\left| \sum_{n=1}^{\lfloor V/a \rfloor} e(\rho h_1 n a) \right| \leq \frac{1}{\|\rho h_1 a\|} \ll \frac{1}{|h_1 a|} \quad (h_1 \text{ entier}).$$

car  $\rho$  est racine d'une équation du 2e degré.

Lorsque ce lemme est établi, en supposant  $a_2 \leq c$ , on reprend le traitement classique du problème de Waring, on obtient

$$r_1(N) = \eta^{sk^*} \int_{-\infty}^{+\infty} e(-zN) (I(z))^s dz \sum_{q \leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left( \frac{S(a,q)}{q} \right)^s e\left(\frac{-aN}{q}\right) + O(P^{sa_4 - k + a_1 + 2a_2 + P^{s-k-1+a_4} + P^{s-k-sa_1/k + a_1})}$$

pourvu que  $a_1 + a_3 < 1$ ,  $2a_2 + a_1 < k$ ,  $a_4 = \sup(a_1 + a_3, 2 - a_3 + \delta(a_2 - 1))$ .

Pour un certain choix de  $a_1, a_2, a_3$ , le terme reste est  $\ll N^{(s/k)-1-\gamma}$  où  $\gamma > 0$ , et par les évaluations classiques.

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left( \frac{S(a,q)}{q} \right)^s e\left(\frac{-aN}{q}\right) \gg 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (I(z))^s e(-zN) dz = \frac{\Gamma(1 + (1/k))^s}{\Gamma(s/k)} N^{(s/k)-1} + O(N^{(s/k)-k-(1/k)})$$

On a ainsi le lemme 2.

LEMME 2. - Pour  $N$  suffisamment grand,  $r_1(N) \gg N^{(s/k)-1}$ .

(b) Contribution des arcs mineurs :

$$r_2(N) = \int_{\mathfrak{m}} (S(\alpha))^s e(-\alpha N) d\alpha$$

$$|r_2(N)| \leq \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^{2k} d\alpha$$

On montre le lemme suivant (lemme de Hua généralisé).

LEMME 3. - Soient  $k$  un entier strictement positif, et  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $k$  et de  $\varepsilon$  telle que pour tout entier  $\nu$  ( $0 < \nu \leq k$ ) et toute suite  $(c_n)$  de nombres complexes de module plus petit que 1, on ait

$$\int_0^1 \left| \sum_{1 \leq n \leq P} c_n e(\alpha n^k) \right|^{2\nu} d\alpha \leq CP^{2\nu - \nu + \varepsilon}$$

Il suffit de prendre  $\nu = k$ ,  $c_n = 1$  ou 0 suivant que  $n$  appartient ou n'appartient pas à  $\mathcal{B}$ , et on a

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^{2k} d\alpha \ll_{\varepsilon} N^{(s/k)-1-(1/k)+\varepsilon}$$

Si on montre le lemme suivant :

LEMME 4. - Il existe une constante  $a > 0$  telle que  $\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll N^{(1/k)-a}$ .

On en déduira que  $r_2(N) \ll N^{(s/k)-1-b}$  où  $b > 0$ , donc  $r(N) > 0$  pour  $N$  suffisamment grand, et la proposition 1 sera démontrée.

Soit  $\chi$  la fonction périodique de période 1, dont la restriction à  $[0, 1[$  est la fonction caractéristique de  $[0, \eta]$ .

$$\text{Ainsi } S(\alpha) = \sum_{n=0}^P \chi(\rho n^{\ell_1}) \dots \chi(\rho n^{\ell_{K^*}}) e(\alpha n^k) .$$

Le développement de  $\chi$  en série de Fourier n'est pas absolument convergent, aussi on approche  $\chi$  par une fonction  $\chi_\Delta$ , périodique de période 1, continûment dérivable vérifiant les 4 propriétés suivantes (on suppose  $0 < \Delta < \eta < 1 - \Delta$ )

- (i)  $\chi_\Delta(x) = 1$  si  $\Delta/2 \leq x \leq \eta - (\Delta/2)$
- (ii)  $\chi_\Delta(x) = 0$  si  $\eta + (\Delta/2) \leq x \leq 1 - (\Delta/2)$
- (iii)  $0 \leq \chi_\Delta(x) \leq 1$  pour tout  $x$
- (iv)  $\chi_\Delta(x) = \eta + \sum_{-\infty, m \neq 0}^{+\infty} c_m e(mx)$  avec  $|c_m| \ll m^{-2} \Delta^{-1}$ .

Une telle fonction  $\chi_\Delta$  existe (cf. [4], page 32).

En appliquant le lemme 1 avec  $\Delta \gg P^{-\delta}$  :

$$S(\alpha) = \sum_{n=0}^P \chi_\Delta(\rho n^{\ell_1}) \dots \chi_\Delta(\rho n^{\ell_{K^*}}) e(\alpha n^k) + O(P\Delta) .$$

$$\text{D'où } S(\alpha) = \sum_{m \in \underline{\mathbb{Z}}^{K^*}} t_m \sum_{n=0}^P e(P_m(n)) \quad \text{où } m = (m_1, \dots, m_{K^*}) \in \underline{\mathbb{Z}}^{K^*} ,$$

$$t_m = c_{m_1} \dots c_{m_{K^*}} , \quad P_m(n) = \alpha n^k + m_{K^*} \rho n^{\ell_{K^*}} + \dots + m_1 \rho n^{\ell_1} .$$

Or  $\alpha \in \mathfrak{m}$ , donc  $\alpha$  peut s'écrire  $\alpha = (a/q) + (\theta/q^2)$  avec  $P^{a_2} < q < P^{k-a_1}$ .

D'après le théorème I, page 101 de [4],

$$\sum_{n=0}^P e(P_m(n)) = O(P^{1-\gamma}) , \quad \text{où } \gamma > 0 \text{ et } O \text{ uniforme en } m \in \underline{\mathbb{Z}}^{K^*} \text{ et } \alpha \in \mathfrak{m} .$$

D'où  $S(\alpha) = O(P^{1-\gamma} \Delta^{-K^*} + P\Delta)$  ; en prenant  $\Delta = P^{-b}$  avec  $2b = \min(\delta, (\gamma/K^*))$ , on obtient l'évaluation du lemme 4.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DESHOILLERS (J. M.), ERDÖS (P.) and SÄRKÖZY (A.). - On additive bases, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 30, 1976, p. 121-132.
- [2] DESHOILLERS (J. M.) and FOUVRY (E.). - On additive bases, II (à paraître).
- [3] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).
- [4] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. - London, Interscience publishers, 1965.

(Texte reçu le 15 janvier 1976)

Etienne FOUVRY  
Ecole Normale Supérieure  
45 rue d'Ulm  
75230 PARIS CEDEX 05