

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

CHRISTIAN RADOUX

## Divisibilité de $\sigma_k(n)$ par un nombre premier

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 19, n° 1 (1977-1978),  
exp. n° 3, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1977-1978\\_\\_19\\_1\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A2_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »  
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction  
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DIVISIBILITÉ DE  $\sigma_k(n)$  PAR UN NOMBRE PREMIER

par Christian RADOUX

Résumé. - Cet article expose une méthode de calcul du nombre  $N_k(x, p)$  d'entiers  $n \leq x$  pour lesquels  $\sigma_k(n)$  n'est pas divisible par  $p$  (premier impair).

Soit  $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ . Soit  $x > 1$ .

Appelons  $N_k(x, p)$  le nombre d'entiers  $n$  ( $1 \leq n \leq x$ ) pour lesquels  $\sigma_k(n)$  n'est pas divisible par  $p$  (premier impair). Dans tout ce qui suit,  $(m, n)$  désignera le p. g. c. d. de  $m$  et  $n$ .

THÉOREME. - Soit  $p$  premier  $> 2$ . Posons

$$(1) \quad q = (p - 1)/(k, p - 1).$$

Il existe des constantes  $C_1, C_2$ , dépendant seulement de  $k$  et  $p$ , effectivement calculables telles que, si  $x \rightarrow \infty$ , alors

$$(2) \quad N_k(x, p) \simeq C_1 x / (\log x)^{1/q}, \text{ si } q \text{ est pair,}$$

$$(3) \quad N_k(x, p) \simeq C_2 x, \text{ si } q \text{ est impair.}$$

N. B. - Si  $k$  est impair,  $q$  est évidemment pair. Si  $k = p - 1$ , évidemment  $q = 1$ .

Démonstration.

1° Posons

$$(4) \quad \delta_k(n, p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p | \sigma_k(n), \\ 1, & \text{si } p \nmid \sigma_k(n). \end{cases}$$

$\sigma_k(n)$  étant une fonction multiplicative de  $n$ , il en va de même pour  $\delta_k(n, p)$ .

$$(5) \quad [(m, n) = 1] \implies [\delta_k(mn, p) = \delta_k(m, p) \delta_k(n, p)].$$

En outre, si  $t$  est premier, on a

$$\sigma_k(t^i) = \sum_{j=0}^i t^{jk} = \frac{t^{(i+1)k} - 1}{t^k - 1}.$$

Ainsi,  $\delta_k(t^i, p)$  est nul

$$(6) \quad \text{lorsque } t^k \equiv 1 \pmod{p} \text{ et } (i+1) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(7) \quad \text{lorsque } t^k \not\equiv 1 \pmod{p} \text{ et } t^{(i+1)k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$(8) \quad \delta_k(t^i, p) = 1 \text{ dans tous les autres cas.}$$

Si  $t \neq p$ , soit  $r$  une racine primitive modulo  $p$ . Soit donc  $\alpha_t$  tel que

$$(9) \quad r^{\alpha_t} \equiv t \pmod{p}, \quad 0 \leq \alpha_t < p - 1.$$

Posons encore

$$(10) \quad \beta_t = \begin{cases} p & \text{si } q | \alpha_t \\ q/(q, \alpha_t) & \text{si } q \nmid \alpha_t. \end{cases}$$

En d'autres termes,  $\beta_t$  est l'ordre de  $t^k$  modulo  $p$ , excepté dans le cas où  $t^k \equiv 1 \pmod{p}$ , auquel cas  $\beta_t = p$ . Par conséquent, (6) (7) et (8) peuvent être rassemblées en une seule ligne.

$$(11) \quad [\delta_k(t^i, p) = 0] \iff [i + 1 \equiv 0 \pmod{\beta_t}].$$

2° A la fonction  $\delta_k(n, p)$ , associons la série de Dirichlet

$$(12) \quad L_\delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_k(n, p)}{n^s}, \quad (s = \sigma + i\tau).$$

Vu la définition de  $\delta_k(n, p)$ , et vu ce que l'on sait de la fonction  $\zeta$  de Riemann, il est clair que  $f_\delta$  est holomorphe sur le demi-plan ouvert  $\sigma > 1$ . Ainsi, pour  $\sigma > 1$ , d'après (5), on peut développer  $L_\delta$  en produit eulérien :

$$\begin{aligned} L_\delta(s) &= \prod_{t \text{ premier}} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(t^m, p) t^{-ms} \\ &= \left( \sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(p^m, p) p^{-ms} \right) \left( \prod_{t \text{ premier} \neq p} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(t^m, p) t^{-ms} \right) \\ &= \left( \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \right) \left( \prod_{t \text{ premier} \neq p} \left( \sum_{m=0}^{\infty} t^{-ms} - \sum_{\substack{m \geq 0 \\ \delta_k(t^m, p) = 0}} t^{-ms} \right) \right) \\ &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \prod_{t \text{ premier} \neq p} \left( \frac{1}{1 - t^{-s}} - \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m+1 \equiv 0 \pmod{\beta_t}}} t^{-ms} \right) \quad [\text{vu (11)}] \\ &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \prod_{t \text{ premier} \neq p} \left( \frac{1}{1 - t^{-s}} - \sum_{m=1}^{\infty} t^{-s(-1+m\beta_t)} \right) \\ &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \prod_{t \text{ premier} \neq p} \left( \frac{1}{1 - t^{-s}} - t^s \frac{t^{-s\beta_t}}{1 - t^{-s\beta_t}} \right) \\ &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \prod_{t \text{ premier} \neq p} \left( \frac{1 - t^{-s\beta_t} - t^{-s(\beta_t-1)} + t^{-s\beta_t}}{(1 - t^{-s})(1 - t^{-s\beta_t})} \right) \\ &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \prod_{t \text{ premier} \neq p} \frac{1 - t^{-s(\beta_t-1)}}{(1 - t^{-s})(1 - t^{-s\beta_t})}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire encore, d'après l'identité d'Euler pour la fonction  $\zeta$ ,

$$(13) \quad L_\delta(s) = \zeta(s) \prod_{t \text{ premier} \neq p} \frac{(1 - t^{-s(\beta_t-1)})}{(1 - t^{-s\beta_t})} \quad (\sigma > 1).$$

Il est évident que d'après sa définition même (cf. (10)),  $\beta_t$  ne peut être pair lorsque  $q$  est impair. D'autre part,  $\beta_t$  est toujours évidemment un entier strictement supérieur à 1. Donc

$$(14) \quad [q \text{ impair}] \implies [\beta_t \geq 3].$$

Mais alors, de (13) et (14), on déduit que,

si  $q$  est impair,  $L_\delta(s)$  est méromorphe sur le demi-plan ouvert  $\sigma > \frac{1}{2}$ , avec un seul pôle (simple) en  $s = 1$ , de résidu  $\prod_{t \text{ premier} \neq p} ((1 - t^{1-\beta_t}) / (1 - t^{-\beta_t}))$ , et cela en vertu de propriétés bien connues de  $\zeta(s)$ . Du théorème taubérien de Ikehara résulte alors l'existence de la constante  $C_2$  annoncée en (3).

3° Examinons maintenant le cas où  $q$  est pair : Dans ce cas,  $\beta_t = 2$  chaque fois que  $\alpha_t$  est un multiple impair de  $q/2$ , et le raisonnement précédent n'est donc plus valable.

Soit alors  $\chi(n)$  le caractère de Dirichlet modulo  $p$  défini par

$$(14) \quad \chi(n) = \begin{cases} \exp(2i\pi/q)\alpha_n, & \text{où } n \equiv r^{\alpha_n} \pmod{p} \text{ (cf. (9), si } n \not\equiv 0 \pmod{p}) \\ 0, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

(d'où

$$(15) \quad \chi(mn) = \chi(m) \chi(n), \text{ quels que soient } m \text{ et } n).$$

Posons encore

$$(16) \quad L_{\chi^j}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^j(n)/n^s$$

et

$$(17) \quad F(s) = \prod_{j=1}^q L_{\chi^j}(s) / L_{\chi^{2j}}(s).$$

Vu (15),

$$(18) \quad F(s) = \prod_{j=1}^q \prod_{t \text{ premier} \neq p} (1 - \chi^{2j}(t)t^{-s}) / (1 - \chi^j(t)t^{-s})$$

Soit  $t$  un nombre premier,  $t \neq p$ , pour lequel  $q/\alpha_t$ , c'est-à-dire (10) pour lequel  $\beta_t = q/(q, \alpha_t)$ .

Alors

$$(\alpha_t, \frac{q}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_t, q) & \text{si } \beta_t \text{ est impair} \\ (\alpha_t, q) & \text{si } \beta_t \text{ est pair.} \end{cases}$$

En effet,  $\beta_t$  est impair si, et seulement si,  $\alpha_t$  est divisible par 2 au moins autant de fois que  $q$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^q \frac{1 - \chi^{2j}(t)t^{-s}}{1 - \chi^j(t)t^{-s}} &= \prod_{j=1}^q \frac{1 - (\exp(4i\pi j\alpha_t)/q)t^{-s}}{1 - (\exp(2i\pi j\alpha_t)/q)t^{-s}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_t \text{ est impair} \\ \left( \frac{1 - t^{-s\beta_t/2}}{1 - t^{-s\beta_t}} \right)^2 & \text{si } \beta_t \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

De sorte que, vu (18),

$$(19) \quad F(s) = \prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t \text{ pair}}} \left( \frac{(1-t^{-s\beta_t/2})^2}{1-t^{-s\beta_t}} \right)^{q/\beta_t}$$

Mais alors, d'après (13),

$$(20) \quad L_\delta(s) = \zeta(s)(F(s))^{1/q} G(s),$$

où  $G(s)$  est holomorphe sur le demi-plan ouvert  $\sigma > \frac{1}{2}$  et borné sur le demi-plan fermé  $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ , quel que soit  $\varepsilon > 0$ . En effet,  $G(s)$  est un produit infini de puissances de facteurs  $1/(1-t^{-\beta_t s})$ , où  $\beta_t \geq 2$ .

4° Rappelons maintenant quelques résultats concernant les séries de Dirichlet. Soit la série  $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ , où

$$(a) \quad \forall n, \quad a_n \geq 0.$$

$$(b) \quad L(s) \text{ est holomorphe sur le demi-plan ouvert } \sigma > 1.$$

$$(c) \quad L(s) = (\zeta(s))^{1-(1/q)} M(s),$$

avec  $M(s)$  holomorphe sur le domaine  $D(c, \rho)$  défini par

$$\begin{aligned} \sigma &> 1 - (c/(\log |\tau|)^\rho), \quad \text{pour } |\tau| \geq 3 \\ \sigma &> 1 - (c/(\log 3)^\rho), \quad \text{pour } |\tau| \leq 3 \end{aligned} \quad (c, \rho > 0).$$

(d) Sur  $D(c, \rho)$ , lorsque  $|\tau| \rightarrow \infty$ ,  $M(s) = O((\log |\tau| + 3)^\gamma)$ , avec  $\gamma > 0$ .

Alors,

$$(21) \quad \sum_{n=1}^x a_n \sim \frac{x^M(1)}{\Gamma(1-(1/q))(\log x)^{1/q}} \quad (\text{cf. [4]}).$$

En outre, si  $\chi(n)$  est un caractère de Dirichlet modulo  $p$  distinct du caractère principal, il existe des constantes positives  $\gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2$  telles que pour tout  $s$  dans  $D(c, \rho)$ ,

$$(22) \quad c_1(\log |\tau| + 3)^{-\gamma_1} \leq |L_\chi(s)| \leq c_2(\log |\tau| + 3)^{\gamma_2}.$$

Ce résultat est dû, dans le cas où  $|\tau| \leq 3$  à E. LANDAU [2]. Il y prend  $\rho = 7$ ,  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$ . (22) s'en déduit facilement.

De (22) et de (20), on déduit que  $L_\delta(s)$  vérifie les hypothèses de (21) pour des constantes positives  $c, \gamma, \rho$  convenables. En effet, la contribution des séries  $L$ , associées au caractère principal modulo  $p$ , c'est-à-dire à

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{p} \\ 0, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

dans (17), est  $(1-p^{-s})^{-1}(\zeta(s))^{-1}$ . On en tire (2), avec

$$(23) \quad c_1 = \frac{M(1)}{\Gamma(1-(1/q))}.$$

En outre, en rassemblant (13), (19) et (20), on obtient

$$G(1) = \left( \prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t > 2}} \frac{1-p}{1-p^{-\beta_t}} \right) \left( \prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t > 2, \beta_t \text{ pair}}} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{1/\beta_t} \right) \left( \prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t = 2}} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

D'autre part, vu (20),

$$M(1) = G(1) \lim_{s \downarrow 1} (\zeta(s)(F(s)))^{1/q},$$

c'est-à-dire, d'après (17)

$$(24) \quad M(1) = \frac{G(1)}{(1-p^{-1})^{1/q}} \left( \frac{\prod_{j=1}^{q-1} L_{\chi^j}(1)}{\prod_{j=1}^{(q/2)-1} L_{\chi^{2j}}(1)} \right)^{1/q}$$

(23) et (24) permettent enfin le calcul de  $C_1$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

On trouvera des résultats concernant des fonctions multiplicatives plus générales dans [3]. Voir aussi [1].

- [1] DELANGE (H.). - Généralisation du théorème de Ikehara, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 71, 1954, p. 213-242.
- [2] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bände 1 und 2. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.
- [3] SCOURFIELD (E. J.). - Non-divisibility of some multiplicative functions, Acta Arithm., Warszawa, t. 22, 1973, p. 287-314.
- [4] WATSON (G. N.). - Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfallungszahlen, I, Math. Z., t. 39, 1935, p. 712-731.

(Texte reçu le 21 novembre 1977)

Christian RADOUX  
 Faculté des Sciences  
 Université de l'Etat à Mons  
 15 avenue Maistriau  
 B-7000 MONS (Belgique)