SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

R. CROISOT

Sur une généralisation de la théorie des A-modules de Grundy

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 25, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 25

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES A-MODULES DE GRUNDY.

(Exposé de R. CROISOT, le 16 mai 1955)

-:-:-:-

INTRODUCTION.

Dans un mémoire en cours de publication (sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne, à paraître au Bull. Soc. Math.), L. Lesieur a donné une théorie unifiée des idéaux bilatères d'un anneau A ou d'un demi-groupe D . En exploitant la même idée, on peut étendre la théorie des A-modules de Grundy (A generalization of additive ideal theory, Proc. of Cambridge Phil. Soc. 38, 1942, p. 242 - Voir l'exposé n° 14 de ce séminaire, par J. Guérindon) aux ensembles munis d'un demi-groupe D d'opérateurs. Une partie de l'étude ainsi envisagée est valable sans qu'il soit imposé à l'anneau A ou au demi-groupe D d'être commutatif et conduit ainsi, en particulier, à des propriétés qui semblent nouvelles des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe. Un autre cas particulier important qui généralise d'ailleurs ces deux-ci et pour lequel cette étude fournit des résultats intéressants est celui des demi-groupes réticulés résidués avec élément universel, quasi-entiers à gauche.

Précisons ces divers points :

1°) Soit A un anneau quelconque (pas nécessairement commutatif ni noethérien, et n'ayant pas nécessairement d'élément unité). Il est bien connu que l'ensemble de ses idéaux bilatères constitue un demi-groupe réticulé complet T quasi-entier.

Soit $\mathfrak{M}$ un A-module. L'ensemble de ses sous-modules constitue un treillis complet $\mathfrak{L}$ modulaire et $\cap$-continu. Les éléments de T opèrent dans $\mathfrak{L}$, cette opération externe ayant les propriétés suivantes :

$$\forall I \in T , \mathfrak{N}_1 , \mathfrak{N}_2 \in \mathfrak{L} \quad , \quad I(\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2) = I\mathfrak{N}_1 \cup I\mathfrak{N}_2 \qquad (1)$$

$$\forall I_1 , I_2 \in T , \mathfrak{N} \in \mathfrak{L} \quad , \quad (I_1 \cup I_2)\mathfrak{N} = I_1\mathfrak{N} \cup I_2\mathfrak{N} \qquad (1)$$

---

(1) $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ ou $I_1 \cup I_2$ représente naturellement la somme des sous-modules $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ ou des idéaux I_1 et I_2 . Ces deux formules s'étendent à des familles infinies de sous-modules ou d'idéaux.

$$\forall I_1, I_2 \in T, \mathcal{M} \in \mathcal{L}, \quad (I_1 I_2)\mathcal{M} = I_1(I_2\mathcal{M})$$
$$\forall \mathcal{M} \in \mathcal{L}, \quad A\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}.$$

De plus, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ étant deux sous-modules quelconques, l'ensemble des éléments a de A tels que $a\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$ est un idéal de A appelé résiduel à gauche de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$ et noté $\mathcal{M}_1 \,{}^{\bullet}\!\!.\, \mathcal{M}_2$; $\mathcal{M}$ étant un sous-module quelconque et I un idéal quelconque, l'ensemble des éléments μ de $\mathfrak{M}$ tels que $I\mu \subseteq \mathcal{M}$ est un sous-module de $\mathfrak{M}$ appelé résiduel à droite de $\mathcal{M}$ par I et noté $\mathcal{M} \,.\!{}^{\bullet}\, I$. $\mathcal{M}_1 \,{}^{\bullet}\!\!.\, \mathcal{M}_2$ peut être défini comme étant le plus grand idéal I' tel que $I'\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M} \,.\!{}^{\bullet}\, I$ comme le plus grand sous-module $\mathcal{M}'$ tel que $I\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$.

Dans le cas où $\mathfrak{M} = A$, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des idéaux à gauche de A.

2°) Soit D un demi-groupe avec élément zéro z. L'ensemble de ses idéaux bilatères constitue un demi-groupe réticulé complet T quasi-entier.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble ayant D comme domaine d'opérateurs. On impose :

a) $\forall d_1 d_2 \in D, \ \xi \in \mathcal{E}, \ (d_1 d_2)\xi = d_1(d_2\xi)$.

b) l'existence de $\zeta \in \mathcal{E}$ tel que $d\zeta = \zeta$, $\forall d \in D$ et $z\xi = \zeta$, $\forall \xi \in \mathcal{E}$.

L'ensemble des sous-ensembles stables de $\mathcal{E}$ constitue un treillis complet $\mathcal{L}$ distributif et $\cap$-continu.

Les éléments de T opèrent dans $\mathcal{L}$, les propriétés du 1°) ayant encore lieu.

Si $\mathcal{E} = D$, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des idéaux à gauche de D.

<u>REMARQUE 1</u> : Si les éléments z et ζ n'existent pas dans D et $\mathcal{E}$, on peut toujours les adjoindre, leur adjonction entraînant seulement l'adjonction d'un élément zéro $\{z\}$ à l'ensemble des idéaux de D et d'un élément nul $\{\zeta\}$ à l'ensemble des sous-ensembles stables de $\mathcal{E}$, les résultats des opérations existant préalablement n'étant pas modifiés.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que z et ζ existent et nous ne le préciserons pas à nouveau.

<u>REMARQUE 2</u> : Pour appliquer la théorie qui va suivre, l'associativité dans D n'est pas indispensable (la condition $(d_1 d_2)\xi = d_1(d_2\xi)$ étant

maintenue) ; le produit de deux idéaux I_1 et I_2 sera alors défini comme étant le plus petit idéal contenant tous les produits $i_1 i_2$ avec $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$. En fait, la généralisation est plutôt illusoire car on voit aisément que l'élément $(d_1 d_2 \ldots d_n)\xi$ de $\mathcal{E}$ est le même quelle que soit la position des parenthèses permettant le calcul du produit $d_1 d_2 \ldots d_n$ et que le quotient de D par l'équivalence $\mathcal{R}$ (régulière) :

$$a \equiv b\ (\mathcal{R}) \Longleftrightarrow a\xi = b\xi\ ,\ \forall \xi \in \mathcal{E}$$

est un demi-groupe.

De même, dans le cas du 1°), on pourrait supposer A non associatif, l'associativité mixte étant toujours supposée vérifiée.

3°) Soit $\mathcal{L}$ un demi-groupe réticulé résidué avec élément universel u, quasi-entier à gauche (on a $ua \leq a$, $\forall a \in \mathcal{L}$) et soit T l'ensemble des éléments quasi-entiers de $\mathcal{L}$ ($x \in T \Longleftrightarrow xu \leq x$). T est alors un sous-demi-groupe réticulé de $\mathcal{L}$, contenant u et quasi-entier. Quels que soient $y, z \in \mathcal{L}$, le résiduel à gauche $y \cdot\!. z$ est quasi-entier, donc appartient à T et est, par suite le plus grand élément x de T tel que $xz \leq y$: en effet, $(y \cdot\!. z)\, z \leq y$ entraîne $(y \cdot\!. z)\, u\, z \leq y$, d'où $(y \cdot\!. z)\, u \leq y \cdot\!. z$.

<u>EXEMPLES</u> : a) $\mathcal{L}$ est l'ensemble des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro.

b) Si $\mathcal{L}$ est quasi-entier, on a $T = \mathcal{L}$ et on retrouve le cas étudié par L. Lesieur.

L'étude qui suit étend pas à pas les résultats de L. Lesieur (loc. cit.) ; pour chaque propriété ainsi étendue, mention est faite de la propriété correspondante qui l'a inspirée.

1.- <u>Hypothèses générales et remarques préliminaires</u>.

Soient <u>deux ensembles ordonnés</u> T <u>et</u> $\mathcal{L}$; nous représentons les éléments de T par des minuscules latines a, b, c, x, y, ... et les éléments de $\mathcal{L}$ par des minuscules grecques $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \ldots$; la relation d'ordre est notée, indifféremment dans T et dans $\mathcal{L}$, $\leq$.
Dans tout ce qui suit, la condition suivante est supposée vérifiée :

<u>Condition (A)</u> : a) T est un <u>groupoïde ordonné quasi-entier avec élément universel</u>, ce qui impose :

$$\forall a \text{ et } b\ ,\ \exists\, a\, b\ ;$$

$\forall x$ et $\forall a \leq b$, $xa \leq xb$ et $ax \leq bx$;

$\exists u$ tel que, $\forall x$, $x \leq u$;

$\forall x$, $ux \leq x$ et $xu \leq x$;

b) Les éléments de T sont <u>opérateurs</u> dans $\mathcal{L}$, le résultat de l'opération de $a \in T$ sur $\beta \in \mathcal{L}$ étant noté simplement $a\beta (\in \mathcal{L})$; on impose de plus les propriétés suivantes :

$\forall x$ et $\alpha \leq \beta$, $x\alpha \leq x\beta$;

$\forall a \leq b$ et ξ , $a\xi \leq b\xi$;

$\forall a$, b et ξ , $(ab)\xi = a(b\xi)$;

$\forall \xi$, $u\xi \leq \xi$;

$\forall \alpha$ et $\forall \beta$, $\exists$ au moins un x tel que $x\beta \leq \alpha$ et l'ensemble des tels x possède un élément maximum noté $\alpha \cdot\!\!\!^{\cdot}\, \beta$ et appelé <u>résiduel à gauche de</u> α <u>par</u> β ;

$\forall \alpha$ et $\forall b$, $\exists$ au moins un ξ tel que $b\xi \leq \alpha$ et l'ensemble des tels ξ possède un élément maximum noté $\alpha \,.^{\cdot}\, b$ et appelé <u>résiduel à droite de</u> α <u>par</u> b .

Cette condition (A) est naturellement vérifiée dans les trois cas cités dans l'introduction.

<u>THÉORÈME 1</u> : α <u>étant un élément quelconque de</u> $\mathcal{L}$, <u>l'ensemble</u> T_α <u>des résiduels à gauche de</u> α <u>et l'ensemble</u> $\mathcal{L}_\alpha$ <u>des résiduels à droite de</u> α <u>sont deux ensembles ordonnés duaux l'un de l'autre</u>.[1]

En effet, l'application $b \longrightarrow \alpha \,.^{\cdot}\, b$ de T dans $\mathcal{L}$ et l'application $\beta \longrightarrow \alpha \cdot\!\!\!^{\cdot}\, \beta$ de $\mathcal{L}$ dans T définissent une correspondance de Galois[2] dont les éléments fermés sont ceux de T_α et de $\mathcal{L}_\alpha$.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>La condition de chaîne descendante sur les résiduels à gauche de</u> α <u>équivaut à la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite de</u> α ; <u>la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à gauche de</u> α <u>équivaut à la condition de chaîne descendante sur les résiduels à droite de</u> α .

---

(1) Ceci est un cas particulier d'une propriété de la "résiduation" sous sa forme la plus générale.

(2) Cf. P. Dubreil, Algèbre, p. 119 .

Dans toute la suite, nous supposons que la condition suivante est également réalisée :

<u>Condition (B)</u> : <u>Toute chaîne de résiduels (à gauche ou à droite) d'un élément</u> α <u>quelconque de</u> $\mathcal{L}$ <u>est finie</u>.

D'après le corollaire du théorème 1, ceci a lieu en particulier dans l'un ou l'autre des cinq cas suivants :

1°) T et $\mathcal{L}$ vérifient la condition de chaîne ascendante ;

2°) $\mathcal{L}$ vérifie la condition de chaîne descendante affaiblie et T la condition de chaîne descendante ;

3°) T et $\mathcal{L}$ vérifient la condition de chaîne descendante affaiblie et $\mathcal{L}$ possède un élément universel ;

4°) Toutes les chaînes de T sont de longueur finie ;

5°) Toutes les chaînes de $\mathcal{L}$ sont de longueur finie.

Dans les deux premiers cas cités dans l'introduction, la condition (B) est réalisée moyennant l'une ou l'autre des hypothèses 1°), 3°), 4°); 5°). De plus, dans le cas d'un A-module sur un anneau <u>commutatif</u>, d'après le théorème 3 de l'exposé 14, il suffit d'imposer la condition de chaîne ascendante dans $\mathcal{L}$.

Dans le troisième cas cité dans l'introduction, la condition (B) est réalisée si $\mathcal{L}$ vérifie la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante affaiblie ou si T a toutes ses chaînes de longueur finie.

Parmi les résultats qui vont suivre, certains peuvent être précisés dans le cas où la condition supplémentaire suivante est réalisée :

<u>Condition (C)</u> : $\forall a$, b et ξ, $(ab)\xi = (ba)\xi$.

Dans les cas cités dans l'introduction, ceci a lieu si l'anneau A, le demi-groupe D ou le sous-treillis T sont commutatifs.

<u>REMARQUE</u> : On n'a pas imposé l'associativité dans T mais on utilisera fréquemment le fait que l'élément $(a_1 a_2 \dots a_n)\xi$ est le même quelle que soit la position des parenthèses permettant le calcul de $a_1 a_2 \dots a_n$. Ceci résulte de la loi $(ab)\xi = a(b\xi)$. En effet, soit $\mathcal{R}$ l'équivalence définie dans T par $a \equiv b(\mathcal{R}) \Longleftrightarrow a\xi = b\xi$, $\forall \xi$. $\mathcal{R}$ est régulière à droite et à gauche par rapport à la multiplication de T et T/R est un demi-groupe car, $\forall a$, b, c, $a(bc) \equiv (ab)c$ $(\mathcal{R})$; la propriété énoncée en résulte.

D'ailleurs, $\mathcal{R}$ est régulière par rapport à la relation d'ordre T[1]. En effet, si on a $a_1 \equiv a'_1\ (\mathcal{R})$ $a'_1 \leq a_2$, $a_2 \equiv a'_2\ (\mathcal{R})$, ... $a_n \equiv a'_n(\mathcal{R})$, $a'_n \leq a_1$, on en déduit, quel que soit ξ,

$a_1 \xi = a'_1 \xi \leq a_2 \xi = a'_2 \xi \leq \dots \leq a_n \xi = a'_n \xi \leq a_1 \xi$, d'où

$a_1 \xi = a_2 \xi = \dots = a_n \xi$ et $a_1 \equiv a_2 = \dots \equiv a_n\ (\mathcal{R})$.

Il en résulte qu'on peut, dans certaines parties de la théorie, remplacer T par T/R. Néanmoins, il semble que certaines conditions introduites ultérieurement ne se transfèrent pas de T à $T/\mathcal{R}$; c'est pourquoi nous préférons éviter de supposer T associatif.

2.- Etude des résiduels à gauche premiers d'un élément $\alpha \in \mathcal{L}$.

Dans tout ce paragraphe, les conditions imposées sont les conditions (A) et (B).

Un élément $x \in T$ est dit premier si $ab \leq x \Longrightarrow a \leq x$ ou $b \leq x$.

DÉFINITION : Un résiduel à gauche de $\alpha \in \check{\mathcal{L}}$ est dit propre s'il est de la forme $\alpha \,\dot{}.\, \beta$ avec $\beta \nleq \alpha$ (Lesieur, déf. 1.1).

LEMME 1 : Pour que $x \in T$ soit un résiduel à gauche propre de $\alpha \in \check{\mathcal{L}}$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$x = \alpha \,\dot{}.\, (\alpha \,.\dot{}\, x) \text{ avec } \alpha \,.\dot{}\, x > \alpha \text{ (Lesieur, lemme 1.1).}$$

La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, si on a $x = \alpha \,\dot{}.\, \nu$ avec $\nu \nleq \alpha$; on a d'abord $x = \alpha \,\dot{}.\, (\alpha \,.\dot{}\, x)$, d'après une propriété classique du calcul des résiduels ; de plus, on a $x\nu \leq \alpha$ qui entraîne $\nu \leq \alpha \,.\dot{}\, x$ et, par suite, $\alpha \,.\dot{}\, x \neq \alpha$, donc $\alpha \,.\dot{}\, x > \alpha$.

PROPRIÉTÉ 1 : Pour tout $\alpha \in \check{\mathcal{L}}$, tout résiduel à gauche propre de α maximal (en tant que résiduel à gauche propre de α) est premier.

Soit $p = \alpha \,\dot{}.\, \nu$ maximal parmi les $\alpha \,\dot{}.\, \beta$ ($\beta \nleq \alpha$). Supposons p non premier, il existe b et c tels que $b \nleq p$, $c \nleq p$ et $bc \leq p$. Considérons alors $\alpha \,\dot{}.\, c\nu$; de $\alpha \,\dot{}.\, c\nu \geq b$ et de $\alpha \,\dot{}.\, c\nu \geq p$, résulte $\alpha \,\dot{}.\, c\nu > p$. De plus, $\alpha \,\dot{}.\, c\nu$ est un résiduel à gauche propre de α car $c\nu \leq \alpha$ entraînerait $c \leq \alpha \,\dot{}.\, \nu = p$. Donc, p ne serait pas maximal.

PROPRIETE 2 : Tout $\alpha \in \check{\mathcal{L}}$, qui n'est pas élément universel de $\mathcal{L}$, possède un résiduel à gauche propre premier. (Lesieur, prop. 1.2).

---

(1) Voir Equivalences régulières dans un ensemble ordonné par M.L. Dubreil Jacotin et R. Croisot, Bull. Soc. Math., 80, 1952, p 11-35.

Il suffit de considérer, d'après la propriété 1, un résiduel à gauche propre maximal de α, dont l'existence est assurée par la condition (B).

PROPRIETE 3 : Si p est un résiduel à gauche propre premier de $\alpha \in \mathcal{L}$ et si $b \neq p$, p est un résiduel à gauche propre (premier) de $\alpha .^{\cdot} b$ (Lesieur, prop. 1.3).

Posons $m = (\alpha .^{\cdot} b)^{\cdot}. [(\alpha .^{\cdot} b) .^{\cdot} p]$. On a $m \geq p$. D'autre part,

$$\alpha .^{\cdot} bm = (\alpha .^{\cdot} b) .^{\cdot} m = (\alpha .^{\cdot} b) .^{\cdot} p = \alpha .^{\cdot} bp \geq \alpha .^{\cdot} p$$; il en résulte $bm \leq \alpha^{\cdot}. (\alpha .^{\cdot} bm) \leq \alpha^{\cdot}. (\alpha .^{\cdot} p) = p$, d'où, puisque p est premier et $b \nleq p$, $m \leq p$. Par suite, on a $m = p$.

De plus, p est un résiduel à gauche propre de $\alpha .^{\cdot} b$ car, dans le cas contraire, on aurait, d'après le lemme 1, $(\alpha .^{\cdot} b) .^{\cdot} p = \alpha .^{\cdot} b$ d'où $\alpha .^{\cdot} p \leq \alpha .^{\cdot} b$ et $b \leq \alpha^{\cdot}. (\alpha .^{\cdot} b) \leq \alpha^{\cdot}. (\alpha .^{\cdot} p) = p$ soit $b \leq p$, ce qui est impossible.

PROPRIÉTÉ 4 : Tout élément $\alpha \in \mathcal{L}$ ne peut admettre qu'un nombre fini de résiduels à gauche propres premiers (Lesieur, prop. 1.4).

Supposons que α admette un ensemble infini T'_{α} de résiduels à gauche propres premiers (distincts).

Soit b_1 un élément maximal de T'_{α} (condition (B)). Considérons $\alpha_1 = \alpha .^{\cdot} b_1$; on a $\alpha_1 > \alpha$ d'après le lemme 1. D'après la propriété 3, tout élément de T'_{α} autre que b_1 est résiduel à gauche propre (premier) de α_1.

Soit b_2 un élément maximal de $T'_{\alpha} - \{b_1\}$ et
$\alpha_2 = \alpha .^{\cdot} b_1 b_2 = \alpha_1 .^{\cdot} b_2 > \alpha_1$.

Le raisonnement se poursuit et conduit à une chaîne strictement croissante infinie de résiduels à droite de α, ce qui contredit la condition (B).

PROPRIÉTÉ 5 : ω étant un élément fixé de $\mathcal{L}$, par exemple l'élément universel s'il existe, on peut trouver quel que soit $\alpha \in \mathcal{L}$ un nombre fini d'éléments premiers p_i de T $(i = 1, 2, \ldots k)$ tels que $p_i \geq \alpha^{\cdot}. \omega$ $\forall i$ et $(\prod_{i=1}^{k} p_i)\, \omega \leq \alpha$. (Lesieur, prop. 1.5).

Si on a $\alpha \geq \omega$, il suffit de prendre $K = 1$ et $p_1 = u$. Sinon, soit $p_1 = \alpha^{\cdot}. \beta_1$ un résiduel à gauche propre maximal de α, parmi ceux qui sont supérieurs ou égaux à $\alpha^{\cdot}. \omega$; il est premier (propriété 1).

Posons $\alpha_1 = \alpha .\cdot p_1 > \alpha$; si $\alpha_1 \geqslant \omega$, on prend $k = 1$ et p_1 .
Sinon, soit $p_2 = \alpha_1 \cdot . \beta_2$ un résiduel à gauche propre maximal de α_1, parmi ceux qui sont supérieurs ou égaux à $\alpha_1 \cdot . \omega$.
Posons $\alpha_2 = \alpha .\cdot p_1 p_2 = \alpha_1 .\cdot p_2 > \alpha_1$.

Le procédé se poursuit tant qu'on a $\alpha_i \not\geqslant \omega$. D'après la condition (B), ceci ne peut avoir lieu indéfiniment et il existe un α_i, soit α_k tel que $\alpha_k \geqslant \omega$. On prendra alors $p_1 , p_2 , \dots p_k$.

<u>REMARQUE</u> : Si $\alpha \not\geqslant \omega$, les p_i sont tous des éléments de T de la forme $(\alpha .\cdot \ell_i) \cdot . \beta_i$ (<u>résiduels mixtes de</u> α) : c'est immédiat pour $i \geq 2$; pour $i = 1$, ceci résulte du fait que $p_1 = \alpha \cdot . \beta_1 = (\alpha .\cdot u) \cdot . \beta_1$.

<u>PROPRIÉTÉ 6</u> : <u>Parmi les éléments premiers</u> p <u>de</u> T <u>contenant</u> $\alpha \cdot . \omega$, <u>il en existe un nombre fini</u> $p_1 , p_2 , \dots , p_k$ <u>tels que chaque</u> p <u>contienne au moins un</u> p_i $(i = 1 , 2 , \dots k)$. <u>Les</u> p_i <u>sont des résiduels mixtes de</u> α <u>si</u> $\alpha \not\geqslant \omega$. (Lesieur, prop.1.6).

Il est immédiat que les p_i de la propriété 5 répondent à la question.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Les éléments minimaux parmi les</u> p_i <u>de la propriété 5 sont les éléments premiers de</u> T <u>contenant</u> $\alpha \cdot . \omega$ <u>qui sont minimaux. Par suite, ils sont déterminés d'une manière unique</u>.

<u>PROPRIÉTÉ 7</u> : <u>Pour tout</u> $\alpha \in \mathcal{L}$, <u>la condition</u>

$$\alpha .\cdot n = \alpha$$

<u>équivaut à la condition</u>

$n \not\leqslant m \quad \forall m$, <u>résiduel à gauche propre maximal de</u> α (Lesieur, prop.1.7).

Si α est élément universel de $\mathcal{L}$, la propriété est évidente puisqu'il n'y a pas de résiduel à gauche propre.

Sinon, il existe des résiduels à gauche propres et parmi eux il en existe qui sont premiers (propriété 2). Si $n \leq p$, où p est un résiduel à gauche propre premier de α , on a (lemme 1) $\alpha .\cdot n \geq \alpha .\cdot p > \alpha$. Réciproquement, si $\alpha .\cdot n > \alpha$, posons $a_1 = \alpha \cdot .(\alpha .\cdot n) \geq n$. Soit p un résiduel à gauche propre de α maximal parmi ceux qui contiennent a_1 ; il est premier d'après la propriété 1 et on a $n \leq p$.

On obtient la propriété 7 en remarquant que les résiduels à gauche propres maximaux de α ne sont autres que les éléments maximaux parmi les résiduels à gauche propres premiers de α .

Application aux 3 cas de l'introduction.

1°) Ce qui précède s'applique à un A-module $\mathfrak{M}$. Dans les propriétés 5 et 6, on prend $\mathfrak{M}$ pour élément ω .

2°) C'est valable également pour un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'un demi-groupe d'opérateurs D . Dans les propriétés 5 et 6, on prend $\mathcal{E}$ pour élément ω .

3°) C'est valable enfin lorsque $\mathcal{L}$ est un demi-groupe réticulé résidué avec élément universel u , quasi-entier à gauche, T étant l'ensemble des éléments quasi-entiers, en particulier lorsque $\mathcal{L}$ est l'ensemble des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro. Les propriétés 5 et 6 entraînent alors, en prenant u pour élément ω :

PROPRIÉTÉ 5' : Quel que soit $a \in \mathcal{L}$, on peut trouver un nombre fini d'éléments premiers p_i de T $(i = 1, 2, \dots, k)$ tels que $p_i \geq a$ et $\prod_{i=1}^{k} p_i \leq a$.

En effet, $p_i \geq a \cdot . u$ entraîne $p_i \geq a$. D'autre part, u est premier.

PROPRIÉTÉ 6' : Parmi les éléments premiers p de T contenant a , il en existe un nombre fini $p_1, \dots, p_K$ tels que chaque p contienne au moins un p_i $(i = 1, 2, \dots K)$. Les p_i sont des résiduels mixtes de a si $a \neq u$.

En effet, p étant premier, $p \geqslant a \cdot . u$ équivaut à $p \geqslant a$.

REMARQUE : D'après ce qui précède, un élément p de T est dit premier si $a \in T$, $b \in T$, $ab \leqslant p \implies a \leqslant p$ ou $b \leqslant p$.

Mais, cette définition est équivalente à la suivante :

$a \in \mathcal{L}$, $b \in \mathcal{L}$, $ab \leq p \implies a \leq p$ ou $b \leq p$.

En effet, cette seconde définition entraîne manifestement la première. Réciproquement, supposons que la première soit vérifiée et qu'on ait $a \in \mathcal{L}$, $b \in \mathcal{L}$, $ab \leq p$. On en déduit

$(a \cup au)(b \cup bu) = ab \cup aub \cup abu \cup aubu \leq ab \cup ab \cup abu \cup abu = ab \cup abu \leq p \cup pu = p$.

Or, $a \cup au$ et $b \cup bu$ sont entiers. D'où $a \leq a \cup au \leq p$ ou $b \leq b \cup bu \leq p$.

Cette remarque est valable, en particulier, dans le cas des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro.

3.- Etude du radical d'un élément $\alpha \in \mathcal{L}$.

a) On impose d'abord les conditions (A), (B) et le fait ~~que~~ T ~~soit un~~

$\cap$-demi-treillis, fait réalisé dans les 3 cas de l'introduction.

THÉORÈME 2 : ω et α étant deux éléments de $\mathcal{L}$, les éléments $x \in T$ tels qu'il existe un entier positif m tel que

$$x^m \omega \leq \alpha$$

ait un élément maximum r, appelé ω-radical de α. Cet élément est l'intersection des éléments premiers minimaux de T contenant $\alpha \cdot\!. \, \omega$. (Lesieur, th.2.1 et th.2.2).(1)

Considérons, en effet, les p_i définis à la propriété 5 .On a, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$ et en désignant par x^m un produit de m facteurs égaux à x associés arbitrairement,

$$x^m \leq \alpha \cdot\!. \, \omega \leq p_i \quad , \text{ d'où } x \leq p_i \, .$$

On en déduit $x \leq \bigcap_{i=1}^{k} p_i$. D'autre part, on a

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{k} p_i\Big)^k \omega \leq \Big(\prod_{i=1}^{k} p_i\Big) \omega \leq \alpha \quad ,$$

ce qui prouve que $1 = \bigcap_{i=1}^{k} p_i$ est l'élément maximum possédant la propriété envisagée.

Il suffit alors d'appliquer le corollaire de la propriété 6 .

b) Supposons, de plus, réalisée la condition (C) et le fait que $\mathcal{L}$ soit un $\cup$-demi-treillis, la règle de calcul suivante étant vérifiée :

$$\forall x \text{ et } \alpha, \beta \quad , \quad x(\alpha \cup \beta) = x\alpha \cup x\beta \, .$$

Sous ces hypothèses, si $\alpha \ngeq \omega$, r est un résiduel à gauche propre de α . En effet, $p_i = (\alpha \cdot\!. \, \ell_i) \cdot\!. \, \beta_i = \alpha \cdot\!. \, \ell_i \beta_i$ entraîne

$$r = \bigcap_{i=1}^{k} p_i = \alpha \cdot\!. \bigcup_{i=1}^{k} \ell_i \beta_i \text{ , et ce résiduel est propre.}$$

Ces propriétés du radical s'appliquent immédiatement aux trois cas de l'introduction en prenant pour ω l'élément universel de $\mathcal{L}$. Dans le troisième cas, on peut définir le radical r de $a \in \mathcal{L}$ comme étant le plus grand des éléments x de T tel qu'il existe un entier positif m vérifiant $x^m \leq a$.

---

(1) Lorsque T est associatif et résidué, le ω-radical de α n'est autre que le radical de $\alpha \cdot\!. \, \omega$ dans T et le théorème 2 n'est qu'un cas particulier des théorèmes 2.1 et 2.2 de L. Lesieur.

4.- Etude des éléments de $\mathcal{L}$ primaux à droite et des décompositions en de tels éléments.

Dans ce paragraphe, on suppose :

1°) que les conditions (A) et (B) sont réalisées ;

2°) que $\mathcal{L}$ est un treillis;

3°) que T est un treillis et qu'on a la règle de calcul :

$$\forall a \text{ , b et } \xi \text{ , } (a \cup b)\xi = a\xi \cup b\xi \text{ .}$$

DÉFINITION : $\alpha \in \mathcal{L}$ est dit primal à droite, ou simplement primal s'il n'y a pas de confusion à craindre, si $\alpha .\!\cdot n_1 > \alpha$ et $\alpha .\!\cdot n_2 > \alpha$ impliquant $(\alpha .\!\cdot n_1) \cap (\alpha .\!\cdot n_2) > \alpha$.

Il est immédiat que tout élément de $\mathcal{L}$ $\cap$-irréductible est primal.

PROPRIETE 8 : Pour que α (élément de $\mathcal{L}$ non universel) soit primal, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre maximal (Lesieur, prop.3.2.).

La condition est suffisante : si α admet un seul résiduel à gauche propre maximal m, d'après la propriété 7, la condition $\alpha .\!\cdot n > \alpha$ équivaut à $n \leqslant m$; donc, $\alpha .\!\cdot n_1 > \alpha$ et $\alpha .\!\cdot n_2 > \alpha \Longrightarrow n_1 \leq m$ et $n_2 \leqslant m$ d'où $n_1 \cup n_2 \leqslant m$ et $(\alpha .\!\cdot n_1) \cap (\alpha .\!\cdot n_2) = \alpha .\!\cdot (n_1 \cup n_2) > \alpha$.

La condition est nécessaire : si α admettait deux résiduels à gauche propres maximaux distincts, m_1 et m_2, on aurait, toujours d'après la propriété 7, $\alpha .\!\cdot m_1 > \alpha$, $\alpha .\!\cdot m_2 > \alpha$ et $(\alpha .\!\cdot m_1) \cap (\alpha .\!\cdot m_2)$ $= \alpha .\!\cdot (m_1 \cup m_2) = \alpha$.

DÉFINITION : α étant un élément de $\mathcal{L}$ non universel primal, son unique résiduel à gauche propre maximal sera appelé le résiduel maximum de α et sera noté m_α .

THÉORÈME 3 : Tout élément $\alpha \in \mathcal{L}$ est, soit primal, soit intersection d'un nombre fini d'éléments primaux qui sont des résiduels à droite de α (Lesieur th. 3.1).

Soit $\alpha \in \mathcal{L}$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{X}$ des éléments $\xi \in \mathcal{L}$ qui sont égaux à α ou à un résiduel à droite de α . Supposons que le théorème ne soit pas vrai pour α et soit $\xi \in \mathfrak{X}$ un élément maximal parmi les éléments de $\mathfrak{X}$ ne vérifiant pas le théorème (son existence est assurée par la condition (B)). Par suite, ξ n'est pas primal et $\xi = (\xi .\!\cdot n_1) \cap (\xi .\!\cdot n_2)$ avec $\xi .\!\cdot n_1 > \xi$ et $\xi .\!\cdot n_2 > \xi$. Mais,

$\xi .^{\cdot} n_1$ et $\xi .^{\cdot} n_2$ sont des éléments de $\mathcal{N}$ vérifiant le théorème, d'où une contradiction.

<u>PROPRIÉTÉ 9</u> : <u>Soit</u> $\alpha = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_m$. <u>Tout résiduel à gauche propre premier de</u> α <u>est résiduel à gauche propre de l'un des</u> α_i (Lesieur, prop.4.1).

Il suffit de faire la démonstration pour $m = 2$. Soit donc $\alpha = \alpha_1 \cap \alpha_2$ et p un résiduel à gauche propre premier de α . On a :

$$p = \alpha^{\cdot}.(\alpha .^{\cdot} p) = \alpha_1{}^{\cdot}.\ [(\alpha_1 .^{\cdot} p) \cap (\alpha_2 .^{\cdot} p)] \cap \alpha_2{}^{\cdot}.\ [(\alpha_1 .^{\cdot} p) \cap (\alpha_2 .^{\cdot} p)] ,$$

d'où $p \geqslant [\alpha_1{}^{\cdot}.(\alpha_1 .^{\cdot} p)] \cap [\alpha_2{}^{\cdot}.\ (\alpha_2 .^{\cdot} p)] \geqslant p$.

L'élément p étant premier, on doit avoir $p = \alpha_1{}^{\cdot}.(\alpha_1 .^{\cdot} p)$ ou $p = \alpha_2{}^{\cdot}.(\alpha_2 .^{\cdot} p)$. Dans le premier cas, par exemple, si p n'est pas un résiduel propre de α_1 , on a
$\alpha_1 .^{\cdot} p = \alpha_1$ et $u = p = \alpha_2{}^{\cdot}.(\alpha_2 .^{\cdot} p)$. Si p n'était pas non plus un résiduel propre de α_2 , on aurait $\alpha_2 .^{\cdot} p = \alpha_2$ et
$\alpha .^{\cdot} p = (\alpha_1 \cap \alpha_2) .^{\cdot} p = (\alpha_1 .^{\cdot} p) \cap (\alpha_2 .^{\cdot} p) = \alpha_1 \cap \alpha_2 = \alpha$, ce qui contredit l'hypothèse.

<u>DÉFINITION</u> : Une décomposition $\alpha = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_m$ est dite <u>réduite</u> si aucun α_i n'est élément universel de $\mathcal{L}$ et si $\alpha_i .^{\cdot} n > \alpha_i$ pour un i au moins implique $\alpha .^{\cdot} n > \alpha$.

<u>PROPRIÉTÉ 10</u> : <u>Pour qu'une décomposition</u> $\alpha = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_m$ <u>où aucun</u> α_i <u>n'est élément universel de</u> $\mathcal{L}$ <u>soit réduite, il faut et il suffit que tout résiduel à gauche propre (maximal) de</u> α_i <u>soit, pour tout</u> i , <u>contenu dans l'un au moins des résiduels à gauche propres (maximaux) de</u> α (Lesieur, prop. 4.2).

La condition est suffisante : $\alpha_i .^{\cdot} n > \alpha_i$ implique, d'après la propriété 7, que n est contenu dans un résiduel à gauche propre maximal de α_i , donc dans un résiduel à gauche propre maximal de α , d'où $\alpha_i .^{\cdot} n > \alpha$.

La condition est nécessaire : soit p_i un résiduel à gauche propre maximal de α_i ; on a $\alpha_i .^{\cdot} p_i > \alpha_i$ d'où $\alpha .^{\cdot} p_i > \alpha$ et, par suite, p_i est contenu dans un résiduel à gauche propre maximal de α .

<u>PROPRIÉTÉ 11</u> : <u>S'il existe une décomposition réduite de</u> α <u>en éléments primaux, on peut trouver une décomposition réduite de</u> α <u>en éléments primaux dont les résiduels maxima sont deux à deux incomparables</u> (Lesieur, prop.4.3).

Soient m_j les éléments maximaux de l'ensemble $\{m_{\alpha_i}\}$ des résiduels maxima des α_i. Posons $\alpha_j = \bigcap_{m_{\alpha_i} \leq m_j} \alpha_i$. On a $\alpha = \bigcap_j \alpha_j$. D'après la propriété 10, il suffit d'établir que α_j est primal, son résiduel maximum étant m_j. Or, d'après la propriété 9, tout résiduel à gauche propre de α_j est contenu dans un m_{α_i} tel que $m_{\alpha_i} \leq m_j$, donc dans m_j. Si m_j n'était pas alors un résiduel à gauche propre de α_j, on aurait $\alpha_j .\!\cdot\, m_j = \alpha_j$; mais, pour $j' \neq j$, on a aussi $\alpha_{j'} .\!\cdot\, m_j = \alpha_{j'}$, d'où $\alpha .\!\cdot\, m_j = \alpha$, ce qui contredirait le fait que la décomposition donnée est réduite.

<u>LEMME 2</u> : <u>Tout élément</u> $\alpha \in \mathcal{L}$ <u>non primal admet une décomposition réduite en deux résiduels à droite de</u> α (Lesieur, lemme 4.1).

α étant supposé non primal, on a $\alpha = (\alpha .\!\cdot\, n_1) \cap (\alpha .\!\cdot\, n_2)$ avec $\alpha .\!\cdot\, n_1 > \alpha$ et $\alpha .\!\cdot\, n_2 > \alpha$.

Si un résiduel à gauche propre maximal p_1 de $\alpha .\!\cdot\, n_1$ vérifie $\alpha .\!\cdot\, p_1 = \alpha$, on a $\alpha = (\alpha .\!\cdot\, n_1 p_1) \cap (\alpha .\!\cdot\, n_2 p_1) = (\alpha .\!\cdot\, n_1 p_1) \cap (\alpha .\!\cdot\, n_2)$, avec $\alpha < \alpha .\!\cdot\, n_1 < \alpha .\!\cdot\, n_1 p_1$.

En appliquant ce procédé autant de fois qu'il est possible de le faire, on obtient une decomposition de α ; $\alpha = (\alpha .\!\cdot\, n_1') \cap (\alpha .\!\cdot\, n_2)$ dans laquelle tous les résiduels à gauche propres maximaux p de $\alpha .\!\cdot\, n_1'$ vérifient $\alpha .\!\cdot\, p > \alpha$.

En opérant ensuite de même sur $\alpha .\!\cdot\, n_2$, on obtient une décomposition réduite.

<u>THÉORÈME 4</u> : <u>Tout élément</u> $\alpha \in \mathcal{L}$ <u>est primal ou admet une décomposition réduite en éléments primaux qui sont des résiduels à droite de</u> α <u>et dont les résiduels maxima sont incomparables deux à deux</u> (Lesieur, th.4.2).

Soit $\alpha \in \mathcal{L}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{H}$ des éléments $\xi \in \mathcal{L}$ qui sont égaux à α ou à un résiduel à droite de α. Supposons que le théorème ne soit pas vrai pour α et soit $\xi \in \mathcal{H}$ un élément maximal parmi les éléments de $\mathcal{H}$ ne vérifiant pas le théorème. Par suite, ξ n'est pas maximal et, d'après le lemme 2, $\xi = (\xi .\!\cdot\, n_1) \cap (\xi .\!\cdot\, n_2)$ avec $\xi .\!\cdot\, n_1 > \xi$ et $\xi .\!\cdot\, n_2 > \xi$, la décomposition étant réduite. Mais $\xi .\!\cdot\, n_1$ et $\xi .\!\cdot\, n_2$ sont des éléments de $\mathcal{H}$ vérifiant le théorème. On obtient donc une décomposition de ξ en éléments primaux qui sont des résiduels à droite de ξ. Cette décomposition est réduite d'après la propriété 10 et conduit, par application de la propriété 11, à une décomposition satisfaisant aux conditions imposées, d'où la contradiction.

THÉORÈME 5 : Deux décompositions réduites d'un élément $\alpha \in \mathcal{L}$ en éléments primaux dont les résiduels maxima sont deux à deux incomparables ont le même nombre de composants avec les mêmes résiduels maxima (Lesieur, th.4.1).

Il suffit de montrer que, pour une décomposition satisfaisant à ces conditions, les résiduels maxima m_i sont les résiduels à gauche propres maximaux p_j de α. En effet, tout m_i est contenu dans un p_j d'après la propriété 10 et tout p_j est contenu dans un m_i d'après la propriété 9. On en déduit facilement que tout m_i est un p_j et réciproquement. En particulier, la théorie de L. Fuchs (On Primal Ideals, Proc. of the Math. Amer. Soc., 1, 1950, p. 1-6) déjà étendue par L. Lesieur (loc. cit.) au cas des idéaux bilatères d'un anneau non commutatif se trouve ainsi étendue également au cas des idéaux à gauche d'un anneau (satisfaisant à la condition de chaîne ascendante ou descendante sur ces idéaux).

5.- Etude des éléments de $\mathcal{L}$ primaires à droite.

a) Les hypothèses sont les mêmes qu'au paragraphe 4. On suppose en outre que $\mathcal{L}$ possède un élément universel ω.

DÉFINITION : Un élément Π de $\mathcal{L}$ est dit primaire à droite, ou simplement primaire si aucune confusion n'est à craindre, si $x\,\eta \leq \Pi$, $\eta \nleq \Pi \Longrightarrow \exists\, k$, entier positif, tel que $x^k \omega \leq \Pi$.

Cette définition peut se mettre aussi sous l'une des trois formes équivalentes suivantes en utilisant le ω-radical r de Π :

$$x\,\eta \leq \Pi \quad , \quad \eta \nleq \Pi \Longrightarrow x \leq r$$
$$x\,\eta \leq \Pi \quad , \quad x \nleq r \Longrightarrow \eta \leq \Pi$$
$$x \nleq r \Longrightarrow \Pi \cdot\!\!\cdot\, x = \Pi \,.$$

DÉFINITION : En particulier, Π est dit premier à droite, ou plus simplement premier si aucune confusion n'est à craindre, si $x\,\eta \leq \Pi$, $\eta \nleq \Pi \Longrightarrow x\,\omega \leq \Pi$.

PROPRIÉTÉ 12 : Si Π est primaire, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Π est premier ;

(2) $\Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ est premier dans T ;

(3) $\Pi \overset{\cdot}{.} \omega = r$, ω-radical de Π .

(1) $\Longrightarrow$ (2) : $ab \leq \Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ et $b \not\leq \Pi \overset{\cdot}{.} \omega \Longrightarrow$
$ab\omega \leq \Pi$ et $b\omega \not\leq \Pi \Longrightarrow a \leq \Pi \overset{\cdot}{.} \omega$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : $r^n\omega \leq \Pi \Longrightarrow r \leq \Pi \overset{\cdot}{.} \omega$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) d'après la définition.

Lorsque T est <u>associatif</u>, on établit facilement la

<u>PROPRIÉTÉ 12'</u> : <u>Si</u> Π <u>est primaire (à droite)</u> , $\Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ <u>est primaire à droite dans</u> T (<u>et le</u> ω<u>-radical de</u> Π <u>coïncide avec le radical de</u> $\Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ <u>dans</u> T).

<u>PROPRIÉTÉ 13</u> : <u>Si</u> $\Pi \neq \omega$ <u>est primaire, son radical</u> r <u>est un résiduel à gauche propre de</u> Π (Lesieur, prop. 6.1).

C'est évident si Π est premier car $r = \Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ (propriété 12). Sinon, il existe $k > 1$ tel que $r^k\omega \leq \Pi$ et $r^{k-1}\omega \not\leq \Pi$; on a donc $r.r^{k-1}\omega \leq \Pi$ qui implique $r \leq \Pi \overset{\cdot}{.} r^{k-1}\omega = x$ et $x\, r^{k-1}\omega \leq \Pi$ qui entraîne, compte tenu de $r^{k-1}\omega \not\leq \Pi$, $x \leq r$; d'où $r = \Pi \overset{\cdot}{.} r^{k-1}\omega$ avec $r^{k-1}\omega \not\leq \Pi$).

<u>PROPRIÉTÉ 14</u> : <u>Si</u> $\Pi \neq \omega$ <u>est primaire, il est primal, son résiduel maximum étant</u> r (Lesieur, prop.6.2).

D'abord, r est un résiduel à gauche propre de Π (propriété 13). D'autre part, $\Pi \mathbin{.\!\cdot} x = \Pi$ si $x \not\leq r$. Donc, si x est un résiduel à gauche propre, on a $\Pi \mathbin{.\!\cdot} x > \Pi$ (propriété 7) et, par suite, $x \leq r$.

<u>PROPRIÉTÉ 15</u> : <u>Si</u> Π <u>est primaire</u>, r <u>est l'élément premier minimum contenant</u> $\Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ (Lesieur, prop. 6.3).

$p \geq \Pi \overset{\cdot}{.} \omega \Longrightarrow r \leq p \Longrightarrow r \leq p$, p étant supposé premier.

<u>PROPRIÉTÉ 16</u> : <u>Si</u> $\Pi \neq \omega$ <u>est primaire</u>, r <u>est le seul résiduel à gauche propre premier de</u> Π (Lesieur, prop. 6.4).

Conséquence immédiate des propriétés 14 et 15.

<u>THÉORÈME 6</u> : <u>Pour que</u> $\Pi \neq \omega$ <u>soit primaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier</u> p <u>qui soit élément premier minimum contenant</u> $\Pi \overset{\cdot}{.} \omega$ (Lesieur, th.6.1).

La condition est nécessaire d'après les propriétés 15 et 16 . Elle est aussi suffisante. D'après la propriété 5, il existe un nombre fini d'éléments premiers $p_i \geqslant \Pi \,^{\bullet}.\, \omega$ tels que $\prod_{i=1}^{k} p_i \;\omega \leqslant \Pi$; il en résulte $p^k \omega \leqslant \Pi$ d'où $p \leqslant r$. D'autre part, $r^n \omega \leqslant \Pi \Longrightarrow r \leqslant p$, d'où $r = p$. D'ailleurs, Π est primal avec r comme résiduel maximum. D'après la propriété 7, $x \nleqslant r \Longrightarrow \Pi .^{\bullet} x = \Pi$ et Π est primaire.

<u>DÉFINITIONS</u> : Lorsque Π est primaire, son ω-radical (que nous appellerons simplement <u>radical</u>) étant p , nous dirons que Π est <u>p-primaire</u> et nous appellerons <u>exposant de</u> Π le plus petit entier positif ρ tel que $p^{\rho}\omega \leqslant \Pi$.

<u>REMARQUES</u> : 1) Π étant primaire, son exposant est 1 si et seulement si Π est premier.

2) Lorsque T est associatif, l'exposant de Π est égal à l'exposant de $\Pi \,^{\bullet}.\, \omega$ dans T .

<u>PROPRIÉTÉ 17</u> : <u>Si</u> $\alpha \in \mathcal{L}$ $(\alpha \neq \omega)$ <u>et</u> $p \in T$ <u>sont tels que</u> :

1) $b\beta \leqslant \alpha$, $\beta \nleqslant \alpha \Longrightarrow b \leqslant p$

2) $\exists n$ <u>entier positif tel que</u> $p^n \omega \leqslant \alpha$,

p <u>est premier dans</u> T <u>et</u> α <u>est p-primaire</u>.

En effet, α est primaire car $x\eta \leqslant \alpha$, $\eta \nleqslant \alpha \Longrightarrow x \leqslant p \Longrightarrow x^n \omega \leqslant \alpha$. Soit p' le radical de α et k l'exposant de α . Si $k = 1$, on a $p' = \alpha \,^{\bullet}.\, \omega \leqslant p$ (d'après 1) car $(\alpha^{\bullet}.\omega)\,\omega \leqslant \alpha$) ; si $k > 1$, on a $p'^{k-1}\omega \nleqslant \alpha$ et $p'.p'^{k-1}\omega \leqslant \alpha \Longrightarrow p' \leqslant p$. D'autre part, d'après 2), on a $p \leqslant p'$. D'où $p' = p$.

<u>PROPRIÉTÉ 18</u> : <u>L'intersection d'un nombre fini d'éléments de</u> $\mathcal{L}$ <u>p-primaires est p-primaire</u>.

Soient α_i ces éléments. On peut supposer $\alpha_i \neq \omega$, $\forall i$. Il suffit alors de vérifier les conditions 1) et 2) de la propriété 17 .

<u>PROPRIÉTÉ 19</u> : <u>Soient</u> α_i $(i = 1 , 2 , \ldots k)$ <u>des éléments</u> p_i<u>-primaires en nombre fini au moins égal à 2 , les</u> p_i <u>étant distincts</u>. Si $\alpha = \bigcap_i \alpha_i$ <u>est une décomposition sans élément superflu,</u> α <u>n'est pas primaire</u>.

Supposons p_1 minimal parmi les p_i . On a $p_i \nleqslant p_1$ si $i > 1$. La décomposition étant sans élément superflu, on a $\alpha_1 \nleqslant \alpha = \bigcap_i \alpha_i$.

Choisissons n_i entier positif tel que $p_i^{n_i}\omega \leqslant \alpha_i$ si $i > 1$.

On a

$$p_2^{n_2}\, p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}\, \omega \leq \bigcap_{i>1} \alpha_i \quad , \text{ d'où}$$

$$p_2^{n_2}\, p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}\, \alpha_1 \leq \bigcap_i \alpha_i = \alpha \ .$$

Si α était primaire, on aurait $(p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k})^{\rho}\, \omega \leq \alpha \leq \alpha_1$ d'où $p_i \leq p_1$ pour une certaine valeur de $i > 1$. Contradiction.

<u>PROPRIÉTÉ 20</u> : <u>L'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{L}$ premiers de même radical</u> p <u>est un élément premier de radical</u> p .

En effet, $x\, \eta \leq \bigcap_i \alpha_i$, $\eta \nleq \bigcap_i \alpha_i \Longrightarrow \exists\, i$ tel que $\eta \nleq \alpha_i \Longrightarrow x \leq \alpha_i \,{}^{\bullet}\!.\, \omega = (\bigcap_i \alpha_i) \,{}^{\bullet}\!.\, \omega$.

<u>THÉORÈME 7</u> : <u>Soit</u> $\alpha \in \mathcal{L}$ <u>et</u> $p \in T$ ($p \neq u$) <u>un élément premier minimum contenant</u> $\alpha \,{}^{\bullet}\!.\, \omega$ (on suppose que p existe). <u>Dans ces conditions, il existe un résiduel à droite de</u> α <u>primaire (à droite)</u> Π <u>de radical</u> p <u>qui est de la forme</u> $\alpha \,.^{\bullet}\, \ell$ <u>avec</u> $\ell \nleq p$; <u>c'est le plus petit élément de</u> $\mathcal{L}$ <u>primaire (à droite) contenant</u> α <u>et de radical</u> p ; <u>c'est le plus grand des éléments</u> η <u>de</u> $\mathcal{L}$ <u>tels que</u> $\alpha \,{}^{\bullet}\!.\, \eta \nleq p$ <u>et le plus grand des éléments de la forme</u> $\alpha \,.^{\bullet}\, x$ <u>avec</u> $x \nleq p$.

Si α , qui est distinct de ω , n'a pas de résiduel à gauche propre premier différent de p , d'après la propriété 2, p est le seul résiduel à gauche propre premier de α et α est primaire de radical p d'après le théorème 6. Il s'écrit $\alpha \,.^{\bullet}\, \ell$ avec $\ell = u \nleq p$.

Sinon, soit p_1 un résiduel à gauche propre premier de α ($\neq p$) . On a $p_1 \nleq p$ (et même $p < p_1$) . On a alors $\alpha_1 = \alpha \,.^{\bullet}\, p_1 > \alpha$ (lemme 1) et $(\alpha \,.^{\bullet}\, p_1) \,{}^{\bullet}\!.\, \omega \leq p$ car $p_1 [(\alpha \,.^{\bullet}\, p_1) \,{}^{\bullet}\!.\, \omega] \leq \alpha \,{}^{\bullet}\!.\, \omega \leq p$. Donc, p est premier minimum contenant $(\alpha \,.^{\bullet}\, p_1) \,{}^{\bullet}\!.\, \omega$.

Si α_1 possède un résiduel à gauche propre premier $p_2 \neq p$, on recommence sur α_1 . D'où $\alpha_2 = \alpha_1 \,.^{\bullet}\, p_2 > \alpha_1$ avec $p_2 \nleq p$ et p premier minimum contenant $\alpha_2 \,{}^{\bullet}\!.\, \omega$.

D'après la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite de α , on trouve $\Pi = \alpha \,.^{\bullet}\, \ell$ avec $\ell \nleq p$, p étant élément premier minimum contenant $\Pi \,{}^{\bullet}\!.\, \omega$ et seul résiduel à gauche propre premier de Π . D'après le théorème 6, Π est primaire de radical p .

D'autre part, soit $\xi \in \mathcal{L}$ primaire de radical p et contenant α. On a $\ell\Pi \leq \alpha \leq \xi \Longrightarrow \Pi \leq \xi$.

Soit $\alpha^{\bullet}.\eta \nleq p$. On a $(\alpha^{\bullet}.\eta)\eta \leq \alpha \leq \Pi \Longrightarrow \eta \leq \Pi$. De plus, on a $\alpha^{\bullet}.\Pi \nleq p$ car $\ell \leq \alpha^{\bullet}.(\alpha^{\bullet}.\ell) \leq p$ entraînerait $\ell \leq p$.

Soit $\beta = \alpha.^{\bullet} x$ avec $x \nleq p$. On a $x\beta \leq \alpha \leq \Pi \Longrightarrow \beta \leq \Pi$.

b) On suppose de plus que la condition (C) est vérifiée.

<u>THÉORÈME 8</u> : <u>$\Pi \neq \omega$ est primaire (à droite) si et seulement si il n'a qu'un résiduel à gauche propre premier</u> (Lesieur, th. 6.2).

En effet, tout élément premier minimal contenant $\Pi^{\bullet}.\omega$ est alors un résiduel à gauche propre de Π. Il suffit donc d'appliquer le théorème 6.

<u>PROPRIÉTÉ 21</u> : <u>Si</u> α <u>est primaire de radical</u> p <u>et</u> $a \nleq \alpha^{\bullet}.\omega$, $\alpha.^{\bullet} a$ <u>est primaire de radical</u> p. <u>Si, de plus</u>, $a \leq p$, <u>on a</u> <u>exposant</u> $(\alpha.^{\bullet} a) \leq$ <u>exposant</u> $\alpha - 1$.

Il suffit de vérifier les conditions 1) et 2) de la propriété 17 et de remarquer que, si $a \leq p$, $p^{k}\omega \leq \alpha \Longrightarrow p^{k-1}\omega \leq \alpha.^{\bullet} a$ (on a nécessairement $k > 1$ puisque $a \nleq \alpha^{\bullet}.\omega$).

<u>THÉORÈME 9</u> : <u>Le théorème 7 est alors valable en remplaçant minimum par minimal</u> (Lesieur, th. 6.3).

La démonstration du théorème 7 s'applique en remplaçant minimum par minimal et en utilisant le théorème 8 au lieu du théorème 6.

Les résultats précédents appliqués au cas d'un A-module redonnent une partie de la théorie de Grundy qu'ils étendent au cas où A n'est pas nécessairement commutatif. Ils s'appiquent de même au cas d'un ensemble muni d'un demi-groupe d'opérateurs.

Dans le troisième cas de l'introduction, il y a lieu de remarquer que la définition d'un élément primaire (à droite) $q \in \mathcal{L}$ équivaut aux suivantes :

1°) $x \in T$, $y \in \mathcal{L}$, $xy \leq q$, $y \nleq q \Longrightarrow \exists k$, entier positif tel que $x^{k} \leq q$.

2°) $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}$, $xy \leq q$, $y \nleq q \Longrightarrow \exists k$, entier positif tel que $x^{k} \leq q$

La première forme est évidente et elle est entraînée par la deuxième ; réciproquement, si la condition 1°) a lieu et si on a $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}$, $xy \leq q$, $y \nleq q$, on en déduit $(x \cup x\,u)y = xy \cup x\,u\,y = xy \leq q$, d'où

$x^k \leq (x \cup x\,u)^k \leq q$ pour un certain entier k.

La définition d'un élément premier (à droite) ($x \in T$, $y \in \mathcal{L}$, $xy \leq q$, $y \not\leq q \Longrightarrow xu \leq q$) ne coïncide pas avec la définition la plus naturelle ; elle se met aussi sous la forme : $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}$, $xy \leq q$, $y \not\leq q \Longrightarrow xu \leq q$.

En vertu d'une remarque déjà faite, on peut dans les énoncés de la propriété 15 et des théorèmes 6, 7 et 9, remplacer $\Pi^{\cdot}.\omega$ (ou $\alpha^{\cdot}.\omega$) par Π (ou α). Il n'en est pas de même dans l'énoncé de la propriété 21.

Ces considérations sont valables en particulier pour le cas des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro, cas pour lequel la partie a) présente seule naturellement de l'intérêt.

6.- <u>Théorèmes d'unicité pour les décompositions d'éléments de $\mathcal{L}$ en éléments primaires à droite</u>.

a) Les hypothèses sont les mêmes qu'au paragraphe 5, partie a).

On <u>suppose</u>, pour un élément $\alpha \in \mathcal{L}$, l'existence d'une décomposition comme intersection d'un nombre fini d'éléments primaires (à droite) appelés <u>composants primaires</u>. D'après la propriété 18, on peut toujours supposer que les radicaux de deux éléments primaires distincts intervenant dans cette décomposition sont distincts. De plus, en supprimant éventuellement des éléments, on peut toujours supposer la décomposition sans élément superflu. Une décomposition satisfaisant à ces deux conditions sera dite <u>réduite</u>. Les radicaux des composants primaires seront appelés les <u>éléments premiers associés</u> à la décomposition.

<u>THÉORÈME 10</u> : <u>Deux décompositions réduites d'un même élément $\alpha \in \mathcal{L}$ en éléments primaires (à droite) ont même nombre de composants **primaires** et mêmes éléments premiers associés</u> (Lesieur, th. 10.1).

Soit $\alpha = \Pi \cap \ldots \cap \Pi_m = \Pi'_1 \cap \ldots \cap \Pi'_n$.

La propriété est vraie pour $m = 1$. Démontrons la pour m en la supposant établie pour $m - 1$.

Soient p_i le radical de Π_i et p'_j celui de Π'_j. Supposons que p_1, par exemple, soit maximal dans l'ensemble $\{p_i, p'_j\}$ $i \leq m$, $j \leq n$. Montrons qu'il existe $p'_j \geq p_1$ (d'où $p'_j = p_1$). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait, $\forall j$, $\Pi_1{}^{\cdot}.\omega \not\leq p'_j$ et $\Pi'_j\,.^{\cdot}(\Pi_1{}^{\cdot}.\omega) = \Pi'_j$, d'où $\alpha .\cdot (\Pi_1 \cdot.\omega) = \alpha$. D'autre part, $\Pi_1 .\cdot (\Pi_1 \cdot.\omega) = \omega$ et $\Pi_i .\cdot (\Pi_1 \cdot.\omega) = \Pi_i$ pour $i \geq 2$, d'où $\alpha .\cdot (\Pi_1 \cdot.\omega) = \bigcap_{i\geq 2} \Pi_i$ $= \bigcap_{i\geq 1} \Pi_i$, ce qui dontredit le fait que la décomposition $\bigcap_i \Pi_i$ est sans élément superflu.

Soit, par exemple, $p_1' = p_1$. Posons $\beta = \Pi_1 \cap \Pi_1'$. β est primaire de radical p_1 (propriété 18). D'où $\Pi_i .\cdot (\beta\cdot.\omega) = \Pi_i$ pour $i \geq 2$, $\Pi_1 .\cdot (\beta\cdot.\omega) = \omega$, $\Pi_j' .\cdot (\beta\cdot.\omega) = \Pi_j'$ pour $j \geq 2$, $\Pi_1' .\cdot (\beta\cdot.\omega) = \omega$. On en déduit $\bigcap_{i\geq 2} \Pi_i = \alpha .\cdot (\beta\cdot.\omega) = \bigcap_{j\geq 2} \Pi_j'$, et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

<u>Notation</u> : Nous noterons, pour $\alpha \in \mathcal{L}$ et $x \in T$, $\alpha_{[x]}$ le plus grand des résiduels de α de la forme $\alpha .\cdot x^n$ (où n est un entier positif). Son existence est assurée par la condition (B).

Si $\alpha = \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_n$, on a évidemment $\alpha_{[x]} = \alpha_{1\,[x]} \cap \ldots \cap \alpha_{n[x]}$.

<u>PROPRIÉTÉ 22</u> : <u>Si α admet une décomposition réduite en éléments primaires (à droite)</u> , $\alpha = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n$, <u>les radicaux étant</u> $p_1 , \ldots p_n$, <u>et si on a</u> $x \nleq p_1 , p_2 , \ldots p_m$ $(0 \leq m \leq n)$ <u>et</u> $x \leq p_{m+1} , \ldots p_n$, <u>on a</u> :

$$\alpha_{[x]} = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_m \quad (\text{si } m = 0 ,\ \alpha_{[x]} = \omega) .$$

En effet, on a $\Pi_{i[x]} = \Pi_i$ ou ω selon que $x \nleq p_i$ ou $x \leq p_i$

<u>COROLLAIRE</u> : $\alpha .\cdot x > \alpha \iff x \leq p_i$ <u>pour un</u> i <u>au moins</u>.

<u>DÉFINITION</u> : Un ensemble $\{p_i\}_{i\leq m}$ $(0 < m < n)$ d'éléments premiers associés à une décomposition réduite $\alpha = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n$ est dit <u>isolé</u> si $p_j \nleq p_i$, quels que soient $i \leq m$ et $j \geq m+1$.

$\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_m$ est alors dit un <u>composant isolé</u> de α .

En particulier, p_1 est isolé et α_1 composant isolé si et seulement si p_1 est minimal parmi les éléments premiers associés à α .

<u>THÉORÈME 11</u> : $\alpha' \neq \omega$ <u>et</u> $\neq \alpha$ <u>est un composant isolé de</u> α <u>si et seulement s'il existe</u> x <u>tel que</u> $\alpha_{[x]} = \alpha'$. <u>Un composant isolé est uniquement déterminé par la connaissance des</u> p_i <u>correspondants.</u>

Soit $\{p_i\}_{i\leq m}$ $(0 < m < n)$ un ensemble isolé d'éléments premiers associés à α . Posons $x = p_{m+1} \ldots p_n$. On a $x \leq p_j$ pour tout $j \geq m+1$

et $x \nleq p_i$ pour tout $i \leq m$. D'où $\alpha_{[x]} = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_m$, et l'unicité.

Réciproquement, soit $\alpha_{[x]} = \alpha'$ ($\neq \omega$ et $\neq \alpha$). Supposons qu'on ait $x \nleq p_i$ pour $i \leq m$ et $x \leq p_j$ pour $j \geq m+1$ (toujours possible en ordonnant convenablement les composants primaires). On a $p_j \nleq p_i$, l'ensemble $\{p_i\}_{i \leq m}$ est isolé, et on a $\alpha_{[x]} = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_m$, d'après la propriété 22.

<u>PROPRIÉTÉ 23</u> : <u>Soient</u> $\alpha = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n = \Pi'_1 \cap \ldots \cap \Pi'_n$ <u>deux décompositions réduites de</u> α <u>en éléments primaires</u>, Π_i <u>et</u> Π'_i <u>ayant pour radical</u> p_i. <u>On a</u> : $\alpha = \Pi'_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_n$.

Soient $p_1, p_2, \ldots p_m \leq p_1$ $(m \geq 1)$ et $p_{m+1}, \ldots p_n \nleq p_1$.
L'ensemble $\{p_i\}_{1 < i \leq m}$ est isolé, ainsi que l'ensemble $\{p_i\}_{1 \leq i \leq m}$ (si $m < n$).

On a : $\Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_m = \Pi'_1 \cap \ldots \cap \Pi'_m$ (si $m < n$ et si $m = n$)

$$\Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_m = \Pi'_2 \cap \ldots \cap \Pi'_m$$

D'où : $\Pi'_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_m = \Pi'_1 \cap \Pi'_2 \cap \ldots \cap \Pi'_m = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_m$

et $\Pi'_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_n = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_n$.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Si</u> α <u>a pour éléments premiers associés</u> $p_1, \ldots p_n$ <u>et si, quel que soit</u> i, <u>il existe une décomposition réduite de</u> α <u>telle que le composant de radical</u> p_i <u>soit</u> Π_i, <u>on a</u> $\alpha = \bigcap_{i \leq n} \Pi_i$ <u>et cette décomposition est réduite</u>.

Donnons un autre moyen d'obtention des composants primaires isolés de α. Dans ce but, considérons d'abord un ensemble non vide H d'éléments de T, multiplicativement fermé ou fermé par rapport à l'intersection, ou plus généralement, filtrant inférieurement. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments $\xi \in \mathcal{L}$ tels qu'il existe $h \in H$ avec $h\xi \leq \alpha$. Tout élément $\xi \in \mathcal{H}$ est tel que $\xi \leq \alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, h \in \mathcal{H}$. D'autre part, si $h \leq h_1 \cap h_2$, on a $\alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, h \geq \alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, h_1$ et $\alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, h \geq \alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, h_2$. Il en résulte, d'après la condition (B), que l'ensemble $\mathcal{H}$ possède un élément maximum, que nous notons α_H.

<u>Cas particuliers</u> : 1°) H est l'ensemble des puissances d'un élément x de T. Alors, $\alpha_H = \alpha_{[x]}$.

2°) Soit $p \neq u$ un élément premier de T et H l'ensemble des éléments h tels que $h \nleq p$. Alors, $h\xi \leq \alpha \iff \alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, \xi \geq h \implies \alpha \,.\!\raisebox{.5ex}{.}\, \xi \nleq p$.

Réciproquement, $\alpha^{\cdot}.\xi \not\leq p \Longrightarrow (\alpha^{\cdot}.\xi)\,\xi \leq \alpha$ avec $\alpha^{\cdot}.\xi \not\leq p$, d'où $\xi \in \mathcal{H}$. Nous avons donc la propriété suivante :

<u>PROPRIÉTÉ 24</u> : p <u>étant un élément premier de</u> T $(\neq u)$ <u>et</u> α <u>un élément de</u> $\mathcal{L}$, <u>l'ensemble des éléments</u> $\xi \in \mathcal{L}$ <u>tels que</u> $\alpha^{\cdot}.\xi \not\leq p$ <u>possède un élément maximum</u>.

<u>DÉFINITION</u> : Cet élément maximum sera appelé le <u>p-composant de</u> α.

<u>THÉORÈME 12</u> : <u>Soit</u> $\alpha = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n$ <u>une décomposition réduite de</u> α <u>en éléments primaires</u>, p_k <u>le radical de</u> Π_k $(k = 1, \ldots n)$, $\{p_i\}$ <u>l'ensemble des</u> p_k <u>minimaux</u>, $\{p_j\}$ <u>l'ensemble des</u> p_k <u>maximaux</u>.

a) <u>Chaque</u> p_k <u>est un élément premier de</u> T <u>contenant</u> $\alpha^{\cdot}.\omega$ <u>et tout élément premier de</u> T <u>contenant</u> $\alpha^{\cdot}.\omega$ <u>contient un des</u> p_k. $\{p_i\}$ <u>est l'ensemble des éléments premiers de</u> T <u>contenant</u> $\alpha^{\cdot}.\omega$ <u>qui sont minimaux</u>. $\bigcap_i p_i$ <u>est le radical de</u> α. <u>Le composant isolé de radical</u> p_i $(\neq u)$[1] <u>est le</u> p_i-<u>composant de</u> α.

b) $\{p_j\}$ <u>est l'ensemble des résiduels à gauche propres maximaux de</u> α. <u>C'est aussi l'ensemble des éléments maximaux parmi les éléments</u> ℓ <u>tels que</u> $\alpha\,.^{\cdot}\ell \neq \alpha$.

a) Il suffit de montrer que Π_i est le p_i-composant de α. On a $\Pi_i = \alpha_{[x]}$ avec $x = \prod_{k\neq i} p_k$ (démonstration du théorème 11). Or, $\alpha^{\cdot}.(\alpha.^{\cdot} x^h) \not\leq p_i$ car $x^h \not\leq p_i$. D'autre part, soit $\alpha^{\cdot}.\xi \not\leq p_i$; on a $\xi \leq \Pi_i .^{\cdot} (\Pi_i{}^{\cdot}.\xi) \leq \Pi_i .^{\cdot} (\alpha^{\cdot}.\xi) = \Pi_i$.

b) Il suffit d'appliquer la propriété 7 et le corollaire de la propriété 22. La propriété suivante généralise la propriété 22 :

<u>PROPRIÉTÉ 25</u> : <u>Si</u> α <u>admet une décomposition réduite en éléments primaires (à droite)</u>, $\alpha = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n$, <u>les radicaux étant</u> $p_1, \ldots p_n$, <u>et si on a</u> $h \not\leq p_1, p_2, \ldots p_m$ $(0 \leq m \leq n)$ <u>quel que soit</u> $h \in H$ <u>et</u> $h \leq p_j$ <u>pour un</u> $h \in H$ <u>quel que soit</u> $j \geqslant m+1$, <u>on a</u> :

$$\alpha_H = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_m \text{ (si } m = 0,\ \alpha_H = \omega).$$

Il suffit de remarquer $\alpha_H = \Pi_{1H} \cap \ldots \cap \Pi_{nH}$ et que, si Π est p-primaire, on a $\Pi_H = \Pi$ ou ω selon que $h \not\leq p$ $\forall h \in H$ ou qu'il existe

---

[1] Le seul cas où l'on puisse avoir $p_i = u$ est celui où $k=1$ et $p_1=u$. On ne parlera pas alors de composant isolé puisque $n = 1$.

$h \in H$ tel que $h \leq p$.

b) Supposons, de plus, que la condition (C) soit vérifiée.

THÉORÈME 13 : Si α admet une décomposition réduite en éléments primaires (à droite) $\alpha = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n$, les résiduels à gauche propres premiers de α sont les radicaux p_i des Π_i (Lesieur, th. 10.3).

La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie pour $n-1 (\geqslant 1)$. Soit p_1 , par exemple, maximal parmi les p_i . D'après le théorème 12, p_1 est un résiduel à gauche propre maximal de α . D'après la propriété 3 et la condition (C), α et $\alpha \mathbin{.^{\cdot}} p_1$ admettent les mêmes résiduels à gauche propre premiers autres que p_1 ; il en est de même de α et $\alpha \mathbin{.^{\cdot}} p_1^k$ avec $p_1^k\,\omega \leq \Pi_1$. Mais

$$\alpha \mathbin{.^{\cdot}} p_1^k = \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_n .$$

Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Ces résultats sont valables dans les trois cas cités dans l'introduction. Dans le troisième cas, on peut remplacer $\alpha \mathbin{.^{\cdot}} \omega$ par α dans l'énoncé du théorème 12.

7.- Caractérisation de ceux des éléments primaires à droite de $\mathcal{L}$ qui sont $\cap$-irréductibles.[1]

a) On suppose :

1°) que les conditions (A) et (B) sont vérifiées ;

2°) que $\mathcal{L}$ est un treillis complet pour l'union, semi-modulaire, $\cap$-continu ;

3°) que T est un treillis et qu'on a les règles de calcul :

$$\forall a , b \text{ et } \xi , \quad (a \cup b)\xi = a\xi \cup b\xi ,$$
$$\forall x \text{ et } \alpha , \beta , \quad x(\alpha \cup \beta) = x\alpha \cup x\beta ;$$

4°) que tout élément de $\mathcal{L}$ est union d'éléments T-principaux, α étant dit T-principal si $\xi \leq u\alpha \implies \exists\, x$ avec $\xi = x\alpha$.

Les deux premiers cas de l'introduction vérifiant 1°), 2°), 3°) (moyennant des conditions de chaîne convenables); ils vérifient 4°) si l'anneau A ou le demi-groupe D est commutatif. Dans le troisième cas, outre les conditions de chaîne, il faut imposer 2°) et 4°).

---

[1] Ce paragraphe constitue une généralisation de l'étude faite par L. Lesieur dans la conférence n° 11. Voir aussi L. Lesieur, Sur les idéaux irréductibles d'un demi-groupe (Rend. cont. Sém. Mat. Univ. Padova. 24, 1955, p. 29-37.)

Soit Π un élément primaire de $\mathcal{L}$ de radical $p \neq u$. On a alors $\Pi \cdot\!. \omega \leq p$. Soit α un élément de $\mathcal{L}$ tel que $\Pi \leq \alpha$ et $\alpha \cdot\!. \omega \leq p$. L'élément p est alors premier minimum contenant $\alpha \cdot\!. \omega$. D'après le théorème 7, on peut associer à α un élément $\bar{\alpha}$ primaire minimum contenant α et de radical p, de la forme $\alpha .\!\cdot \ell$ avec $\ell \nleq p$, le plus grand des éléments de la forme $\alpha .\!\cdot x$ avec $x \nleq p$. Dans l'ensemble ordonné $\mathcal{S}$ de ces éléments α, l'application $\alpha \longrightarrow \bar{\alpha}$ est une application de fermeture, l'ensemble $\bar{\mathcal{S}}$ des éléments fermés étant l'ensemble des éléments p-primaires de $\mathcal{S}$. $\bar{\mathcal{S}}$ est un sous-$\cap$-demi-treillis complet de $\mathcal{S}$. Posons, pour $\alpha \geq \Pi$ et $\alpha \notin \mathcal{S}$, $\bar{\alpha} = \omega$. Nous étendons ainsi l'application de fermeture au dual idéal $\mathcal{S}^* =)\Pi($ de $\mathcal{L}$. Posons $\bar{\mathcal{S}}^* = \bar{\mathcal{S}} \cup \{\omega\}$. $\bar{\mathcal{S}}^*$ est un treillis complet dans lequel nous désignons l'union par V ; on a $\bigvee_\iota \alpha_\iota = \overline{\bigcup_\iota \alpha_\iota}$.

<u>PROPRIÉTÉ 26</u> : $\bar{\mathcal{S}}^*$ <u>est semi-modulaire</u>.

Soient trois élément ξ, η, ζ de $\bar{\mathcal{S}}^*$ tels que

$$\eta \cap \zeta < \xi < \zeta < \eta \vee \zeta$$

On a $\eta \cup \xi > \zeta$ car $\eta \cup \xi = \zeta$ entraînerait $\eta \leq \zeta$ et $\eta \vee \zeta = \zeta$. $\mathcal{L}$ étant semi-modulaire, il existe τ tel que

$$\eta \cap \zeta < \tau \leq \eta \quad , \quad (\xi \cup \tau) \cap \zeta = \xi .$$

On a $\xi \vee \bar{\tau} = \overline{\xi \cup \tau} = \xi \cup \tau .\!\cdot \ell$ avec $\ell \nleq p$ (ceci résulte du théorème 7 si $\alpha = \xi \cup \tau \in \mathcal{S}$; sinon, on a $\alpha \cdot\!. \omega \nleq p$ et on peut prendre $\ell = \alpha \cdot\!. \omega$). Il en résulte $\eta \cap \zeta < \bar{\tau} \leq \eta$ et

$$(\xi \vee \bar{\tau}) \cap \zeta = [(\xi \cup \tau) .\!\cdot \ell] \cap [\zeta .\!\cdot \ell] = [(\xi \cup \tau) \cap \zeta] .\!\cdot \ell$$
$$= \xi .\!\cdot \ell = \xi .$$

<u>PROPRIÉTÉ 27</u> : $\bar{\mathcal{S}}^*$ <u>est $\cap$-continu</u>.

On doit établir : $\xi \cap (\bigvee \eta_\iota) = \bigvee (\xi \cap \eta_\iota)$, lorsque $\xi \in \bar{\mathcal{S}}^*$, $\eta_\iota \in \bar{\mathcal{S}}^*$, l'ensemble $\{\eta_\iota\}$ étant filtrant supérieurement.

Or $\bigvee \eta_\iota = (\bigcup \eta_\iota) .\!\cdot \ell$ avec $\ell \nleq p$

$$\xi \cap (\bigvee \eta_\iota) = (\xi .\!\cdot \ell) \cap [(\bigcup \eta_\iota) .\!\cdot \ell] = [\xi \cap (\bigcup \eta_\iota)] .\!\cdot \ell =$$
$[\bigcup (\xi \cap \eta_\iota)] .\!\cdot \ell$ car $\mathcal{L}$ est $\cap$-continu.

Cet élément est contenu dans $\bigvee (\xi \cap \eta_\iota)$ qui est lui-même contenu dans $\xi \cap (\bigvee \eta_\iota)$, d'où l'égalité à établir.

<u>LEMME 3</u> : <u>Quels que soient</u> $\alpha, \beta \in \mathcal{S}^*$, <u>on a</u> $\overline{\alpha \cap \beta} = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$.

On a $\bar{\alpha} = \alpha .\!\cdot \ell$ avec $\ell \nleq p$, $\bar{\beta} = \beta .\!\cdot \ell'$ avec $\ell' \nleq p$.

On en tire $\bar{\alpha} = \bar{\alpha} .\!\cdot \ell' = \alpha .\!\cdot \ell\ell'$ et $\bar{\beta} = \bar{\beta} .\!\cdot \ell = \beta .\!\cdot \ell'\ell$.

Or, $\alpha .\!\cdot \ell' \leq \bar{\alpha} .\!\cdot \ell' = \bar{\alpha} \Longrightarrow (\alpha .\!\cdot \ell') .\!\cdot \ell \leq \bar{\alpha} .\!\cdot \ell = \bar{\alpha}$

$\alpha .\!\cdot \ell' \geq \alpha \Longrightarrow (\alpha .\!\cdot \ell') .\!\cdot \ell \geq \alpha .\!\cdot \ell = \bar{\alpha}$.

D'où $\alpha .\!\cdot \ell'\ell = (\alpha .\!\cdot \ell') .\!\cdot \ell = \bar{\alpha}$.

Et $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} = (\alpha .\!\cdot \ell'\ell) \cap (\beta .\!\cdot \ell'\ell) = (\alpha \cap \beta) .\!\cdot \ell'\ell \leq \overline{\alpha \cap \beta}$.

Mais $\overline{\alpha \cap \beta} \leq \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$. D'où l'égalité.

<u>PROPRIÉTÉ 28</u> : <u>Si</u> $\alpha \in \mathcal{L}$ <u>est T-principal, on a, dans</u> $\bar{\mathcal{S}}^*$,

$$\overline{\Pi \cup \alpha} \gtrdot \overline{\Pi \cup p\alpha}.$$

Remarquons d'abord que $\overline{\Pi \cup \alpha} = \overline{\Pi \cup u\alpha}$. En effet,

$u\alpha \leq \alpha \Longrightarrow \overline{\Pi \cup u\alpha} \leq \overline{\Pi \cup \alpha} = (\Pi \cup \alpha) .\!\cdot \ell$ (avec $\ell \nleq p$). D'où

$\ell\,\overline{\Pi \cup \alpha} \leq \Pi \cup \alpha$ et $u\ell\,\overline{\Pi \cup \alpha} \leq u\,\Pi \cup u\alpha \leq \Pi \cup u\alpha \leq \overline{\Pi \cup u\alpha} \Longrightarrow$

$\overline{\Pi \cup \alpha} \leq \overline{\Pi \cup u\alpha}$ car $u\ell \nleq p$.

Soit alors $\beta \in \bar{\mathcal{S}}^*$ tel que $\overline{\Pi \cup \alpha} \geq \beta \geq \overline{\Pi \cup p\alpha}$

L'élément α étant T-principal, on peut poser $\beta \cap u\alpha = b\alpha$.

Si $b \nleq p$, $b\alpha \leq \beta \Longrightarrow \alpha \leq \beta \Longrightarrow \overline{\Pi \cup \alpha} \leq \beta$ et $\beta = \overline{\Pi \cup \alpha}$.

Si $b \leq p$, $b\alpha \leq p\alpha$ et $p\alpha \leq u\alpha \cap \beta = b\alpha \Longrightarrow p\alpha = b\alpha$. On a alors $p\alpha \leq \overline{\Pi \cup p\alpha}$. Distinguons deux cas :

a) $p\alpha = \overline{\Pi \cup p\alpha}$ d'où $\Pi \leq p\alpha \leq u\alpha \Longrightarrow u\alpha \in \mathcal{S}^*$.

On peut alors écrire $\overline{\Pi \cup p\alpha} = \overline{u\alpha \cap \beta} = \overline{u\alpha} \cap \beta = \beta$ car $\beta \leq \overline{\Pi \cup u\alpha} = \overline{u\alpha}$, d'où $\beta = \overline{\Pi \cup p\alpha}$.

b) $p\alpha < \overline{\Pi \cup p\alpha}$. Supposons alors $\beta > \overline{\Pi \cup p\alpha}$. On en déduit :

$\beta > \overline{\Pi \cup p\alpha} > p\alpha = \beta \cap u\alpha$ et $\beta \cup u\alpha > \beta$ car on peut supposer $u\alpha \cap \beta \neq u\alpha$; sinon, on aurait $u\alpha = p\alpha$ et la propriété serait évidente.

$\mathcal{L}$ étant semi-modulaire, il existe un élément γ tel que $p\alpha < \gamma \leq u\alpha$ (γ peut s'écrire $c\alpha$ avec $c \nleq p$, puisque α est T-principal) vérifiant l'égalité $[c\alpha \cup \overline{\Pi \cup p\alpha}] \cap \beta = \overline{\Pi \cup p\alpha}$.

On a alors $\overline{\Pi \cup p\alpha} = \overline{c\alpha \cup \overline{\Pi \cup p\alpha}} \cap \beta$.

Mais, $\overline{c\alpha \cup \overline{\Pi \cup p\alpha}} = \overline{c\alpha \cup \Pi}$. De $c\alpha \leq \overline{\Pi \cup c\alpha}$ et $c \nleq p$, résulte $\alpha \leq \overline{\Pi \cup c\alpha}$ et on a, compte tenu de $\Pi \leq \overline{\Pi \cup c\alpha}$,

$$\overline{\Pi \cup \alpha} \leq \overline{\Pi \cup c\alpha} \quad \text{d'où} \quad \overline{\Pi \cup c\alpha} = \overline{\Pi \cup \alpha} .$$

Il en résulte $\overline{\Pi \cup p\alpha} = \overline{\Pi \cup \alpha} \cap \beta = \beta$. Contradiction.

<u>PROPRIETE 29</u> : <u>Le segment</u> $[\Pi , \overline{\Pi .\cdot p}]$ <u>de</u> $\bar{\mathcal{S}}^*$ <u>est un treillis géométrique</u>.

Soit $\xi \in \bar{\mathcal{S}}^*$ tel que $\Pi \leq \xi \leq \overline{\Pi .\cdot p}$.

Posons $\xi = \xi \cap (\Pi .\cdot p)$. On a $\bar{\xi}' = \xi \cap \overline{\Pi .\cdot p} = \xi$ (Lemme 3).
On a $\xi' = \bigcup_i \alpha_i$ (où les α_i sont T-principaux).
d'où $\xi' = \bigcup_i (\alpha_i \cup \Pi)$ et $\xi = \bar{\xi}' = \bigvee \overline{\alpha_i \cup \Pi}$.

Mais $\overline{\Pi \cup \alpha_i} \succ \overline{\Pi \cup p\alpha_i}$ dans $\bar{\mathcal{S}}^*$ (Propriété 28) .

d'ailleurs, $\alpha_i \leq \xi' \leq \Pi .\cdot p \Longrightarrow p\alpha_i \leq \Pi$ et $\overline{\Pi \cup p\alpha_i} = \Pi$.
d'où $\overline{\Pi \cup \alpha_i} \succ \Pi$ dans $\bar{\mathcal{S}}^*$.

Par suite, tout élément du segment $[\Pi , \overline{\Pi .\cdot p}]$ est union de points. Ce segment étant, d'autre part, complet, semi-modulaire (Propriété 26), $\cap$ -continu (Propriété 27), il est relativement complémenté et c'est un treillis géométrique. De plus, s'il vérifie une condition de chaîne, il est de longueur finie.[1]

<u>DÉFINITIONS</u> : On pose $\Pi .\cdot p^{(1)} = \overline{\Pi .\cdot p}$ et, par récurrence,
$\Pi .\cdot p^{(n)} = \overline{(\Pi .\cdot p^{(n-1)}) .\cdot p}$.

On voit immédiatement, par récurrence sur n , que $\Pi .\cdot p^{(n)} \geq \Pi .\cdot p^{n}$.
Il en résulte qu'il existe une valeur minimum de l'entier n telle que $\Pi .\cdot p^{(n)} = \omega$. Cette valeur minimum ρ sera appelé <u>l'exposant symbolique de</u> Π .

De la propriété 29, résulte le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Si</u> $\mathcal{S}$ <u>vérifie la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante affaiblie, tous les segments</u> (<u>de</u> $\bar{\mathcal{S}}^*$) $[\Pi .\cdot p^{(n-1)} , \Pi .\cdot p^{(n)}]$ <u>sont de longueur finie et</u> $\bar{\mathcal{S}}^*$ <u>est de longueur finie</u>.

[1] Cf Leçons sur les treillis par M.L.Dubreil Jacotin, L.Lesieur, R.Croisot. p. 289 et 272

<u>PROPRIÉTÉ 30</u> : <u>Si</u> $\Pi = \overline{\Pi .\!\cdot p} \cap \Pi_1$ <u>avec</u> $\Pi_1 \in \bar{\mathcal{S}}^*$, <u>on a</u> $\Pi = \Pi_1$.

Si $\overline{\Pi .\!\cdot p} = \omega$, la propriété est évidente. Nous pouvons donc supposer l'exposant symbolique ρ de Π supérieur à 1 .

Nous démontrons la propriété pour Π en la supposant vraie pour les éléments p-primaires d'exposant symbolique $\rho - 1$.

Soit $\Pi = \overline{\Pi .\!\cdot p} \cap \Pi_1$.

D'où $\Pi .\!\cdot p = (\overline{\Pi .\!\cdot p} .\!\cdot p) \cap (\Pi_1 .\!\cdot p)$ et (lemme 3)

$$\Pi .\!\cdot p^{(1)} = (\overline{\Pi .\!\cdot p^{(1)}) .\!\cdot p} \cap \overline{\Pi_1 .\!\cdot p} \quad .$$

Mais, $\Pi .\!\cdot p^{(1)}$ est d'exposant symbolique $\rho - 1$ et, par suite, on doit avoir $\Pi .\!\cdot p^{(1)} = \overline{\Pi_1 .\!\cdot p}$, ce qui entraîne $\overline{\Pi .\!\cdot p} \geqslant \Pi_1$ et $\Pi = \Pi_1$.

<u>THEOREME 16</u> : <u>Pour que</u> Π , <u>élément primaire de radical</u> $p \neq u$, <u>soit $\cap$-irréductible, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun élément p-primaire entre</u> Π <u>et</u> $\overline{\Pi .\!\cdot p}$.

La condition est nécessaire : D'après la propriété 29, le segment $[\Pi , \overline{\Pi .\!\cdot p}]$ de $\bar{\mathcal{S}}^*$ est un treillis géométrique. S'il était de longueur supérieure à 1 , Π serait $\cap$-réductible (intersection de deux points distincts).

La condition est suffisante : Supposont que Π soit $\cap$-réductible. On peut écrire $\Pi = \alpha_1 \cap \alpha_2$ avec $\alpha_1 \in \mathcal{L}$, $\alpha_2 \in \mathcal{L}$, $\alpha_1 > \Pi$ et $\alpha_2 > \Pi$, d'où résulte (lemme 3) $\Pi = \bar{\alpha}_1 \cap \bar{\alpha}_2$ avec $\Pi_1 = \bar{\alpha}_1 > \Pi$ et $\Pi_2 = \bar{\alpha}_2 > \Pi$, puis $\Pi = (\Pi_1 \cap \overline{\Pi .\!\cdot p}) \cap (\Pi_2 \cap \overline{\Pi .\!\cdot p})$. Les élément $\Pi_1 \cap \overline{\Pi .\!\cdot p}$ et $\Pi_2 \cap \overline{\Pi .\!\cdot p}$ sont des éléments de $\bar{\mathcal{S}}^*$ appartenant au segment $[\Pi , \overline{\Pi .\!\cdot p}]$. Etant distincts de Π , d'après la propriété 30, ils sont égaux à $\overline{\Pi .\!\cdot p}$, ce qui est impossible car nous aurions $\Pi = \overline{\Pi .\!\cdot p}$.

<u>REMARQUE</u> : L'étude qui précède suppose $p \neq u$. Supposons maintenant Π primaire de radical u (Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe ρ tel que $u^{\rho}\omega \leq \Pi$ ou encore que u soit le seul élément premier de T contenant $\Pi .\!\cdot \omega$) . Tout élément $\alpha \geqslant \Pi$ est primaire de radical u et l'application $\alpha \longrightarrow \bar{\alpha}$ n'est autre que l'application identique ; on a $\bar{\mathcal{S}}^* = \mathcal{S}^* =)\Pi($. $\bar{\mathcal{S}}^*$ est semi-modulaire, complet et $\cap$-continu mais il n'est pas nécessairement complémenté.

<u>Exemple</u> : $T = \mathcal{L}$ se compose de trois éléments $\alpha_0 < \alpha_1 < \omega$, le produit de deux éléments étant toujours α_0. (On peut interpréter cet exemple à l'aide des idéaux de l'anneau de carré nul sur le groupe cyclique d'ordre 4). α_0 est alors primaire de radical u, il est $\cap$-irréductible mais n'est pas couvert par $\alpha_0 .\!\cdot\, u = \omega$. La condition du théorème 14 n'est pas nécessaire.

Lorsque $p = u$, la propriété 30 reste valable ainsi que la suffisance de la condition du théorème 14.

b) Lorsqu'on suppose, de plus, la condition (C) vérifiée, la propriété 21 montre que les résiduels à droite de Π sont des éléments de $\overline{\mathcal{S}}^*$. La démonstration de la propriété 29 est légèrement simplifiée ($\overline{\Pi .\!\cdot\, p} = \Pi .\!\cdot\, p$, $\xi' = \xi$) : $\Pi .\!\cdot\, p^{(n)} = \Pi .\!\cdot\, p^n$ et l'exposant symbolique coïncide avec l'exposant.

<u>REMARQUE</u> : Dans le troisième cas cité dans l'introduction, on peut remarquer que la condition $\alpha .\!\cdot\, \omega \leq p$ utilisée pour la caractérisation des éléments α de $\mathcal{S}$ équivaut à $\alpha \leq p$. $\overline{\mathcal{S}}^*$ est alors le segment $\overline{\mathcal{S}}$ entre Π et p) auquel on ajoute l'élément ω.

8.- <u>Etude de cas dans lesquels chaque élément de $\mathcal{L}$ est décomposable en intersection d'éléments primaires à droite.</u>

Rappelons d'abord le théorème général suivant dû à L.Lesieur.

<u>THÉORÈME 15</u> : <u>$\mathcal{L}$ étant un treillis semi-modulaire</u>, α <u>un élément $\cap$-irréductible de $\mathcal{L}$</u>, <u>les relations</u>

$$\alpha \cap \beta = \alpha' \cap \beta \quad , \quad \alpha' > \alpha$$

<u>impliquent</u> $\beta \leq \alpha$.

Si on avait $\alpha' > \alpha > \alpha \cap \beta$ et $\beta > \alpha \cap \beta$, on déduirait $\alpha' < \alpha' \cup \beta$ (car $\alpha' = \alpha' \cup \beta \Longrightarrow \alpha' \geq \beta \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha' \cap \beta = \beta$) ; le treillis étant semi-modulaire, on pourrait trouver $\gamma \in \mathcal{L}$ tel que $\alpha \cap \beta < \gamma \leq \beta$ et $(\alpha \cup \gamma) \cap \alpha' = \alpha$, d'où $\alpha \cup \gamma = \alpha$ puisque α est $\cap$-irréductible, puis $\gamma \leq \alpha$ et $\gamma \leq \alpha \cap \beta$ ce qui contredirait $\alpha \cap \beta < \gamma$.

Par suite, on a certainement, soit $\alpha \cap \beta = \beta$, soit $\alpha \cap \beta = \alpha$. Dans le premier cas, on a $\alpha \geq \beta$ et, dans le deuxième, $\alpha' \cap \beta = \alpha$, d'où, α étant $\cap$-irréductible, $\alpha = \beta$.

a) Nous faisons les hypothèses suivantes :

1°) les conditions (A) et (B) sont vérifiées, $\mathcal{L}$ vérifiant nécessairement soit la condition de chaîne ascendante, soit la condition de chaîne descendante affaiblie ;

2°) $\mathcal{L}$ est un treillis semi-modulaire, $\cap$-continu, avec un élément universel ω ;

3°) T est un treillis et on a les règles de calcul :

$$\forall a\ ,\ b \text{ et } \xi\ ,\ (a \cup b)\,\xi = a\,\xi \cup b\,\xi\ ,$$
$$\forall x \text{ et } \alpha\ ,\ \beta\ ,\ x(\alpha \cup \beta) = x\,\alpha \cup x\,\beta\ .$$

<u>THÉORÈME 16</u> : <u>Les conditions ci-dessus étant réalisées, pour que tout élément de $\mathcal{L}$ soit intersection d'un nombre fini d'éléments primaires (à droite), il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée</u> :

(D) $\forall a \in T$ <u>et</u> $\delta \in \mathcal{L}$, $\exists s$ <u>entier positif tel que</u> $a^s\omega \cap \delta \leq a\delta$ (Lesieur, th. 7.1).

La condition est nécessaire : Soit $a\delta = \Pi_1 \cap \ldots \cap \Pi_n$ où les Π_K sont primaires. Quel que soit K , on a $\delta \leq \Pi_K$ ou $\exists\, s_K$ entier positif tel que $a^{s_K}\omega \leq \Pi_K$. On peut donc partager les Π_K en deux ensembles $\{\Pi_i\}$ et $\{\Pi_j\}$ tels que $\delta \leq \Pi_i$, $\forall i$ et $a^s\omega \leq \Pi_j$, $\forall j$, s étant pris assez grand. Il en résulte $a^s\omega \cap \delta \leq a\delta$.

La condition est suffisante : Les hypothèses 1°) et 2°) entraînent que tout élément de $\mathcal{L}$ est intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles ; il suffit donc d'établir que tout élément $\cap$-irréductible Π est primaire. Soit $a\beta \leq \Pi$ et $\beta \nleq \Pi$; en posant $\delta = \beta \cup \Pi$, on a $\delta > \Pi$ et $a\delta = a\beta \cup a\Pi \leq \Pi$. Il existe s entier positif tel que $a^s\omega \cap \delta \leq a\delta$, d'où $a^s\omega \cap \delta \leq \Pi$ et $a^s\omega \cap \delta = a^s\omega \cap \Pi$. Il en résulte d'après le théorème 15, $a^s\omega \leq \Pi$.

<u>REMARQUE</u> : Les conditions 1°), 2°), 3°) sont vérifiées dans les trois cas de l'introduction, moyennant des conditions de chaîne convenables. Il semblerait donc que le théorème 16, qui contient une condition nécessaire et suffisante, puisse être très utile. Malheureusement, même dans les cas les plus classiques (idéaux d'un anneau commutatif à élément unité), il ne paraît guère facile de démontrer la condition (D) autrement qu'en utilisant la décomposition comme intersection d'éléments primaires !

b) Aux hypothèses 1°), 2°), 3°), nous ajoutons la suivante :

4°) Tout élément de T est union d'éléments $\mathcal{L}$-principaux, a étant dit <u>$\mathcal{L}$-principal</u> si $\xi' \leq a\beta \Longrightarrow \exists\, \xi \leq \beta$ tel que $\xi' = a\xi$.

<u>LEMME 4</u> : <u>Le produit d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{L}$-principaux de</u> T <u>est un élément $\mathcal{L}$-principal</u>.

Il suffit de le démontrer pour deux éléments, soient a_1 et a_2 . Si on a $\xi' \leq a_1 a_2 \beta$, il existe $\gamma \leq a_2\beta$ tel que $\xi' = a_1\gamma$; puis, il existe $\xi \leq \beta$ tel que $\gamma = a_2\xi$; d'où $\xi' = a_1 a_2 \xi$.

<u>THÉORÈME 17</u> : <u>Si lès conditions 1°),2°), 3°), 4°) sont réalisées, tout élément de $\mathcal{L}$ est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires (à droite)</u> (Lesieur, th.8.1).

Il suffit encore d'établir que tout élément $\cap$-irréductible Π est primaire. Soit $a\beta \leq \Pi$ et $\beta \nleq \Pi$. Supposons qu'on ait, quel que soit n entier positif $a^n\omega \nleq \Pi$. On peut écrire $a = \bigcup_\iota a_\iota$ où les a_ι sont $\mathcal{L}$-principaux ; on peut alors trouver un indice ι tel que $a_\iota \nleq p$, radical de Π . Par suite, il est possible de supposer

$a\beta \leq \Pi$, $\beta \nleq \Pi$, $a \nleq p$ et a $\mathcal{L}$-principal.

Soit alors $\delta = \beta \cup \Pi$. On a $\delta > \Pi$ et $a\delta = a\beta \cup a\Pi \leq \Pi$.
Soit K un entier positif tel que $\Pi .\!\cdot a^K = \Pi .\!\cdot a^{K+1}$. On a
$\delta \cap a^K\omega \leq a^K\omega$. D'après le lemme 4, a^K est $\mathcal{L}$-principal et $\delta \cap a^K\omega$ est de la forme $a^K\xi$ ce qui montre qu'on a
$\delta \cap a^K\omega = a^K((\delta \cap a^K\omega) .\!\cdot a^K) = a^K(\delta .\!\cdot a^K)$. On a aussi
$a^{K+1}(\delta .\!\cdot a^K) = a.a^K(\delta .\!\cdot a^K) = a(\delta \cap a^K\omega) \leq a\delta \leq \Pi$, d'où
$\delta .\!\cdot a^K \leq \Pi .\!\cdot a^{K+1} = \Pi .\!\cdot a^K$ et $a^K(\delta .\!\cdot a^K) \leq \Pi$, c'est-à-dire
$\delta \cap a^K\omega \leq \Pi$ et $\delta \cap a^K\omega = \Pi \cap a^K\omega$. D'après le théorème 16, on a
$a^K\omega \nleq \Pi$, d'où $a^K \leq p$ et $a \leq p$. Contradiction.

Le théorème 17 est applicable aux deux premiers cas de l'introduction si l'anneau A ou le demi-groupe D est commutatif, les idéaux engendrés par un seul élément de A ou D étant alors $\mathcal{L}$-principaux.

c) <u>DEFINITIONS</u> : $a \in T$ est dit <u>$\mathcal{L}$-essentiel</u> si

$$a\beta \cup \xi = a\gamma \cup \xi \Longrightarrow \beta \cup (\xi .\!\cdot a) = \gamma \cup (\xi .\!\cdot a)$$

$\alpha \in \mathcal{L}$ est dit <u>T-essentiel</u> si

$$b\alpha \cup \xi = c\alpha \cup \xi \Longrightarrow b \cup (\xi \cdot\!. \alpha) = c \cup (\xi \cdot\!. \alpha) .$$

<u>Exemple</u> : Si $\mathfrak{M}$ est un A-module unitaire sur un anneau A commutatif, tout idéal principal de A est $\mathcal{L}$-essentiel et tout sous-module monogène de $\mathfrak{M}$ est T-essentiel.

Nous imposons les hypothèses suivantes :

1°) les conditions du paragraphe 4 sont vérifiées, $\mathcal{L}$ vérifiant nécessairement la condition de chaîne descendante affaiblie et ayant un élément universel ω ;

2°) tout élément de T est union d'éléments pris dans un ensemble A d'éléments $\mathcal{L}$-essentiels de T ;

3°) tout élément de $\mathcal{L}$ est union d'éléments pris dans un ensemble $\mathfrak{A}$ d'éléments T-essentiels de $\mathcal{L}$;

4°) le produit d'un élément de A par un élément de $\mathfrak{A}$ est un élément de $\mathfrak{A}$.

5°) $\forall \alpha \in \mathcal{L}$, $u\alpha = \alpha$.

<u>Exemples</u> : Ceci a lieu dans deux cas particuliers importants :

α) T = $\mathcal{L}$ est un demi-groupe réticulé, entier, résidué, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie, dans lequel tout élément est union d'éléments essentiels. Ce cas a été étudié par L.Lesieur (loc. cit.)

β) On remplace les conditions 2°), 3°), 4°) par les suivantes :

2°)' tout élément de T est union d'éléments $\mathcal{L}$-essentiels ;

3°)' tout élément de $\mathcal{L}$ est union d'éléments T-essentiels ;

4°)' la condition (C) est vérifiée.

En effet, si la condition (C) est vérifiée, si $a \in T$ est $\mathcal{L}$-essentiel et si $\alpha \in \mathcal{L}$ est T-essentiel, le produit $a\alpha$ est T-essentiel :

$$ba\alpha \cup \xi = ca\alpha \cup \xi \implies b\alpha \cup (\xi \,.\!\cdot\, a) = c\alpha \cup (\xi \,.\!\cdot\, a) \implies$$
$$b \cup (\xi \,.\!\cdot\, a\alpha) = c \cup (\xi \,.\!\cdot\, a\alpha) .$$

Ce cas contient celui des sous-modules d'un A-module unitaire sur un anneau commutatif (avec conditions de chaîne convenables).

<u>THEOREME 18</u> : <u>Si les conditions 1°), 2°), 3°), 4°), 5°) sont réalisées, tout élément de</u> $\mathcal{L}$ <u>est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires (à droite)</u> (Lesieur, th. 9.1).

En utilisant le théorème 3, il suffit de montrer que tout élément primal Π de $\mathcal{L}$ est primaire. Soit $a\beta \leq \Pi$, $\beta \nleq \Pi$, $a \nleq r$ où r est le radical de Π . D'après 2°), a est union d'éléments de A dont l'un au moins, soit a_1 , n'est pas contenu dans r . Il existe un entier K positif tel que $\Pi .^{\cdot} a_1^K = \Pi .^{\cdot} a_1^{K+1}$ et on a $\omega \nleq \Pi .^{\cdot} a_1^K$. D'après 3°), ω est union d'éléments de $\mathfrak{A}$ dont l'un au moins n'est pas contenu dans $\Pi .^{\cdot} a_1^K$, soit γ . On peut donc supposer :

$$a\beta \leq \Pi \ , \ \beta \nleq \Pi \ , \ a \in A \ , \ \gamma \in \mathfrak{A} \ , \ a^n\gamma \nleq \Pi \ , \ \forall_n \ .$$

L'élément $a^n\gamma$ est T-essentiel d'après 4°), quel que soit n . $\mathcal{L}$ vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie, il existe K entier positif tel que $\Pi \cup a^K\gamma = \Pi \cup a^{K+1}\gamma$, ce qui s'écrit, d'après 5°), $\Pi \cup u a^K\gamma = \Pi \cup a\, a^K\gamma$; d'où, puisque $a^K\gamma$ est $\cdot$-essentiel, $u = u \cup (\Pi .^{\cdot} a^K\gamma) = a \cup (\Pi .^{\cdot} a^K\gamma)$ et $\Pi = \Pi .^{\cdot} u$ $= (\Pi .^{\cdot} a) \cap [\Pi .^{\cdot}(\Pi .^{\cdot} a^K\gamma)]$. On en déduit, Π étant primal et $\Pi .^{\cdot} a \succ \Pi$,

$$\Pi .^{\cdot}(\Pi .^{\cdot} a^K\gamma) = \Pi \ , \text{ d'où } a^K\gamma \leq \Pi \ . \text{ Contradiction.}$$

Le théorème 18 est complété par un théorème d'unicité :

<u>THÉORÈME 19</u> : <u>Dans les conditions du théorème 18, tous les composants primaires d'une décomposition d'un élément de</u> $\mathcal{L}$ <u>sont isolés</u> (Lesieur, th. 10.4).

Nous montrons que le radical p de tout élément primaire $\Pi \neq \omega$ est couvert par u .

Soit y tel que $p < y \leq u$. L'élément p est de la forme $\Pi .^{\cdot} \eta$. On a $y\eta \nleq \Pi$ d'où $y\eta \cup \Pi > \Pi$. $\mathcal{L}$ vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie, il existe ξ tel que $y\eta \cup \Pi \geq \xi \succ \Pi$. On en déduit $y\xi \cup \Pi = \xi$; en effet, on a $\xi \geq y\xi \cup \Pi \geq \Pi$ et $y\xi \cup \Pi = \Pi$ entraînerait $y\xi \leq \Pi$ d'où, puisque $\xi \nleq \Pi$, $y \leq \Pi .^{\cdot} \eta = p$.

ξ est union d'éléments T-essentiels dont l'un, soit α , est tel que $y\alpha \nleq \Pi$, d'où $\Pi < y\alpha \cup \Pi \leq y\xi \cup \Pi = \xi \Longrightarrow y\alpha \cup \Pi = \xi$. Mais, $\xi \geq \alpha = u\alpha \geq y\alpha \Longrightarrow \xi \geq u\alpha \cup \Pi \geq y\alpha \cup \Pi = \xi \Longrightarrow u\alpha \cup \Pi$ $= y\alpha \cup \Pi$. L'élément α étant T-essentiel, on a $u = u \cup (\Pi .^{\cdot} \alpha)$ $= y \cup (\Pi .^{\cdot} \alpha)$. Or, on a $\Pi .^{\cdot} \alpha \leq \Pi .^{\cdot} \eta$ (car $\alpha = u\alpha \nleq \Pi$ et $(\Pi .^{\cdot} \alpha)\alpha \leq \Pi$) , d'où

$$u = y \cup (\Pi .^{\cdot} \eta) = y \ .$$

<u>Problèmes</u> : 1- L'affirmation suivante est-elle exacte :

Dans un anneau <u>commutatif sans condition de chaîne</u>, pour qu'un idéal

<u>primaire fort</u> (au sens de Krull) q de radical p soit $\cap$-irréductible, il faut et il suffit qu'il n'existe pas d'idéal p-primaire entre q et $q : p$?

2- Peut-on généraliser le paragraphe 8 b) de façon à obtenir un théorème d'existence de décomposition en éléments primaires à droite s'appliquant aux idéaux à gauche d'un anneau non commutatif (à condition de chaîne convenable) ? On peut remarquer que la commutativité n'intervient pas directement dans la démonstration du théorème 17 ; elle intervient par l'intermédiaire des éléments T-principaux.

3- Peut-on généraliser dans le même but l'étude du paragraphe 7 ? Remarque analogue.

4- Peut-on étendre la méthode de L.Lesieur (loc. cit. et C.R., 234, 1952, p. 1017) pour démontrer que la condition de chaîne descendante sur les sous-modules d'un A-module <u>unitaire</u> entraîne la condition de chaîne ascendante ? (A commutatif et A non commutatif).