Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

R. Descombes

Sur un problème d'approximation diophantienne non homogène

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 1

SUR UN PROBLÈME D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE NON HOMOGÈNE.

(Exposé de R. DESCOMBES, le 8 novembre 1954)

1.- Introduction : Enoncé du problème.

Dans tout cet exposé, ξ désigne un nombre irrationnel et η un nombre réel arbitrairement choisis tels que l'équation $v\xi - u + \eta = 0$ n'ait aucune solution en u , v entiers ordinaires.

L'étude des petites valeurs de la forme $v\xi - u + \eta$ a été abordée par Minkowski qui a établi (Ann. Ec. Norm. Sup., 1893) que, pour tout choix de ξ et η (avec les restrictions ci-dessus, évidemment destinées à écarter les cas triviaux), on a

$$\underline{\lim}_{u,v} |v(v\xi - u + \eta)| \leqslant \frac{1}{4} \quad (u,\ v \text{ entiers quelconques, } v \neq 0).$$

Grace a montré par exemple (Proc. London Math. Soc. 1918) que la valeur $\frac{1}{4}$ est atteinte pour certains couples ξ , η .

Or on a

$$\underline{\lim} |v(v\xi - u + \eta)| = \inf[\underline{\lim}\, v|v\xi - u + \eta| \,,\ \underline{\lim}\, v|v\xi - u - \eta|]$$

où les limites infé rieures sont prises, au premier membre, pour tous les couples d'entiers u , v avec $v \neq 0$ et au second membre pour tous les couples u , v avec $v > 0$. Cette remarque évidente introduit le problème dont nous allons nous occuper : celui de l'étude des petites valeurs de la forme $v\xi - u + \eta$ lorsque u prend toutes les valeurs entières et v toutes les valeurs entières positives. Ce problème n'est identique à celui de Minkowski que dans le cas où $\eta \equiv \frac{1}{2}$ (mod. 1).

2.- Indication des résultats.

Posons

$$(2.1) \qquad K(\xi,\eta) = \underline{\lim}_{u,v}\, v|v\xi - u + \eta| \qquad (u\ ,\ v \text{ entiers quelconques, } v > 0\ ),$$

et

$$(2.2) \qquad K = \max k(\xi,\eta)$$

où le maximum est pris pour tous les irrationnels ξ et tous les réels η avec $v\xi - u + \eta \neq 0$ pour tout couple d'entiers u , v .

La recherche de la constante K , jouant pour notre problème le rôle de la constante $\frac{1}{4}$ pour celui de Minkowski, a donné lieu aux encadrements suivants :

$\frac{3}{32} \leqslant K$ (Prasad, Proc. London Math. Soc., 1951) $\quad K \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447...$ (Khintchine, Math. Ann., 1935)

$0,352... = \frac{37}{10\sqrt{110}} \leqslant K \leqslant \frac{2}{5} = 0,4$ (Poitou et Descombes C.R. Acad. Sc., 1952)

Enfin Cassels, dans un article (Math. Ann., 1954) qui est la source principale de cet exposé, vient de montrer que

$$K = \frac{27}{28\sqrt{7}} = 0,3644$$

et que ce maximum est "isolé", c'est-à-dire que

$$K(\xi,\eta) < K \quad \text{entraine} \quad k(\xi,\eta) \leqslant \frac{4}{11} = 0,3636...$$

3.- Indication de la méthode.

La méthode utilisée par Cassels consiste essentiellement à choisir parmi l'ensemble de tous les couples d'entiers u , v (v > 0) deux suites récurrentes de couples u_n , v_n et u'_n , v'_n telles que

(3.1) $$k(\xi,\eta) = \lim_{n\to+\infty} [v_n|v_n\xi - u_n + \eta| \;,\; v'_n|v'_n\xi - u'_n + \eta|] .$$

En outre, pour parvenir à un calcul commode des quantités entre crochets on rattache u_n , v_n et u'_n , v'_n à la réduite p_n/q_n de rang n dans le développement de ξ en fraction continue. Rappelons donc brièvement les résultats de cette dernière théorie, afin de préciser les notations.

4.- Rappel de la théorie des fractions continues.

Pour alléger le langage, nous supposerons dans toute la suite $\xi > 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Soit $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ (n = -1, 0, 1, 2, ...) la suite des réduites de ξ , rangées dans l'ordre des $|q_n\xi - p_n|$ décroissants, en commençant par la réduite préliminaire $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}$, suivie de $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$, où $a_0 = [\xi]$ (partie entière de ξ).

La propriété fondamentale des réduites s'exprime par :

(P) $\quad |q\xi - p| < |q_n\xi - p_n|$ entraîne $|q| \geqslant q_{n+1}$ sauf si les entiers p et q sont tous deux nuls.

d'où il résulte que

(4.1) $$\underline{\lim}|q(q\xi - p)| = \underline{\lim}_{n\to+\infty} | q_n(q_n\xi - p_n)|$$

où la limite inférieure du premier membre est prise pour tous les couples d'entiers p , q $(q \neq 0)$.

Posant $\varepsilon_n = q_n \xi - p_n$, on a $\varepsilon_n > 0$ pour n pair, $\varepsilon_n < 0$ pour n impair, et

(4.2) $\qquad \varepsilon_n\, q_{n-1} - \varepsilon_{n-1}\, q_n = p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^m$:

de plus

(4.3) $\qquad p_{n+1} = a_{n+1}\, p_n + p_{n-1} \qquad q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1}$

où les entiers a_n , tous strictement positifs pour $n \geqslant 1$, sont, avec a_0 , les quotients incomplets de ξ , ce qu'on note

(4.4) $\qquad \xi = (a_0\; a_1\; a_2\; \dots\; a_n\; \dots)$.

En introduisant enfin les quantités

(4.5) $\qquad x_n = \dfrac{\varepsilon_{n-2}}{\varepsilon_{n-1}} = -\dfrac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}}$, $\quad y_n = -\dfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \qquad (n \geqslant 1)$,

on a

(4.6) $\qquad x_n > 1$, $-1 < y_n < 0 \qquad$ (sauf $y_1 = 0$, et, peut-être, $y_2 = -1$)

et

(4.7) $\qquad x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$, $\quad y_{n+1} = \dfrac{1}{y_n - a_n}$, $\quad a_n = [x_n]$

d'où, avec la notation (4.4) :

(4.8) $\qquad x_n = (a_n\; a_{n+1}\; \dots) \qquad (n \geqslant 1)$

(4.9) $\qquad y_n = -\,(0\;\; a_{n-1}\;\; a_{n-2}\; \dots\; a_1) \qquad (n \geqslant 2)$

et, d'après (4.2) :

(4.10) $$\frac{(-1)^n}{q_n\, \varepsilon_n} = x_{n+1} - y_{n+1}$$

d'où

(4.11) $$\underline{\lim}\, |q(q\xi - p)| = \frac{1}{\overline{\lim\limits_n}\, (x_n - y_n)} .$$

5.- Construction d'un algorithme.

Ces résultats étant rappelés, la suite $\{u_n , v_n\}$ annoncée au paragraphe 3 sera caractérisée par le théorème suivant, après avoir posé par définition $\rho_n = v_n \xi - u_n + \eta$:

Théorème 1. Pour tout $n \geqslant 0$, il existe un couple d'entiers u_n , v_n et un seul tel que :

ou bien : $\qquad (A_n) \qquad 0 \leqslant v_n < q_n$ avec $\begin{cases} -\varepsilon_{n-1} < \rho_n < 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 < \rho_n < -\varepsilon_{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

ou bien : (B_n) $q_n \leqslant v_n < q_n + q_{n-1}$ avec $\begin{cases} \varepsilon_n < \rho_n < 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 < \rho_n < \varepsilon_n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

<u>Unicité de</u> u_n , v_n . Démontrons-la dans le cas n impair, pour fixer les idées.

- S'il existait deux couples solutions de A_n , on en déduirait par différence un couple u , v satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant v < q_n \qquad |v\xi - u| < \varepsilon_{n-1}$$

qui contredisent (P) sauf pour $u = v = 0$.

- S'il existait deux couples solutions de B_n , on en déduirait par différence un couple satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant v < q_{n-1} \qquad |v\xi - u| < |\varepsilon_n|$$

qui contredisent (P) sauf pour $u = v = 0$.

- S'il existait un couple solution de A_n et un couple solution de B_n , on en déduirait de même un couple u , v satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant v < q_n + q_{n-1} \qquad \varepsilon_n < v\xi - u < \epsilon_{n-1}$$

qui, compte tenu de l'alternance du signe de ε_n , contredisent aussi (P) sauf pour $u = v = 0$.

<u>Existence de</u> u_n , v_n . On la prouve par récurrence.

Pour $n = 0$, les conditions imposées à v_0 par B_0 sont contradictoires. Au contraire A_0 admet la solution unique $v_0 = 0$, $u_0 = [\eta]$.

Supposons que u_n , v_n existe ;

- Si on a B_n , on vérifie que le couple

(5.1) $\quad u_{n+1} = u_n - q_n \quad , \quad v_{n+1} = v_n - q_n$

est une solution de A_{n+1} , car $q_n \leqslant v_n < q_n + q_{n-1}$ implique $0 \leqslant v_{n+1} < q_{n-1} < q_{n+1}$.

- Si on a A_n , posons $b_{n+1} = [x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n}]$. Comme ρ_n a le signe de ε_n avec $|\rho_n| < |\varepsilon_{n-1}|$, on a $0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < x_{n+1}$ d'où $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$; on vérifie alors que le couple

(5.2) $\quad u_{n+1} = u_n + b_{n+1}\, p_n + p_{n-1} \quad , \quad v_{n+1} = v_n + b_{n+1}\, q_n + q_{n-1}$

est une solution de A_{n+1} si $b_{n+1} \neq a_{n+1}$ et de B_{n+1} si $b_{n+1} = a_{n+1}$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

<u>Remarque</u>. Le cas B_n n'intervient donc qu'encadré par A_{n-1} et A_{n+1} et il implique

$$u_n = u_{n-1} + a_n p_{n-1} + p_{n-2} = u_{n-1} + p_n \quad , \quad v_n = v_{n-1} + q_n$$

d'où

$$(5.3) \qquad u_{n+1} = u_n - p_n = u_{n-1} \quad , \quad v_{n+1} = v_n - q_n = v_{n-1}$$

et, d'après (5.3) et la définition de A_{n+1}

$$(5.4) \qquad 0 < -\frac{\rho_{n+1}}{\varepsilon_n} = -\frac{\rho_{n-1}}{\varepsilon_n} < 1$$

d'où l'on tire encore

$$0 < \frac{\rho_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \frac{\rho_{n+1} + \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < 1 \ .$$

L'inégalité (5.4) montre qu'on ne peut pas avoir une alternance indéfinie de cas A et de cas B puisque $\varepsilon_k \to 0$ avec $1/k$; comme B_n implique $v_{n-1} = v_{n+1}$ et que A implique $v_{n+1} > v_n$, il en résulte que

$$(5.5) \qquad \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \ .$$

<u>Formules de récurrence</u>. En posant

$$(5.6) \qquad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n} \quad , \quad z_{n+1} = \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} \qquad (\text{d'où } 0 < z_{n+1} < x_{n+1})$$

on peut traduire ces résultats par les formules de récurrence :

– Si A_{n-1} (c'est-à-dire $0 \leqslant t_n < 1$)

$$(5.7) \qquad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \quad , \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \quad ,$$

$$0 \leqslant b_n = [x_n - z_n] \leqslant a_n$$

– Si B_{n-1} (c'est-à-dire $1 \leqslant t_n < 1 - y_n$, ou encore $b_{n-1} = a_{n-1}$

$$(5.8) \qquad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n \quad , \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n \quad , \quad z_{n-1} < 1 \quad , \quad z_n < 1$$

avec : $\qquad z_1 = \dfrac{\eta - [\eta]}{\xi - [\xi]}$ et $t_1 = 0$

6.– <u>Propriétés d'approximation de l'algorithme</u>.

Comparons l'ensemble des couples d'entiers u, v $(v > 0)$ à l'ensemble des couples u_n, v_n.

Etant donnés un couple d'entiers u , v et un indice $n \geqslant 0$ quelconques, on peut, en vertu de $|p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1}| = 1$, définir les nombres α_n , β_n , α , β par les égalités

$$(6.1) \qquad \begin{aligned} u_n - \eta &= \alpha_n\, p_{n-1} + \beta_n\, p_n & \qquad u - \eta &= \alpha\, p_{n-1} + \beta\, p_n \\ v_n &= \alpha_n\, q_{n-1} + \beta_n\, q_n & \qquad v &= \alpha\, q_{n-1} + \beta\, q_n \end{aligned}$$

et, puisque u_n , v_n , u , v sont entiers, on obtient par ces formules tous les couples d'entiers u , v en donnant à α , β tous les couples de valeurs définis par

$$(6.2) \qquad \alpha \equiv \alpha_n \qquad \beta \equiv \beta_n \qquad\qquad (\text{mod. } 1) .$$

Posons

$$\alpha - \alpha_n = r \qquad \beta - \beta_n = s \qquad (r \text{ , } s \text{ entiers})$$

et étudions pour n fixé les couples u , v satisfaisant à

$$(6.3) \qquad q_n \leqslant v < q_{n+1} .$$

<u>Si on est dans le cas</u> A_n , c'est-à-dire si $0 \leqslant v_n < q_n$, (6.3) entraîne

$$0 < r\, q_{n-1} + s\, q_n < q_{n+1}$$

c'est-à-dire d'après (4.5)

$$(6.4) \qquad 0 < s - r\, y_{n+1} < a_{n+1} - y_{n+1}$$

qui implique que r et s ne peuvent pas être tous deux négatifs ou nuls.

Si $v_n = v_0 = 0$ (ce qui n'arrive d'après (5.5) que pour un nombre fini de valeurs de n), on a évidemment $v|v\xi - u + \eta| > v_n |\rho_n|$. En écartant ce cas trivial, on a d'après (6.1), (4.5) et (5.6) :

$$\frac{v|v\xi - u + \eta|}{v_n |\rho_n|} = \left(1 + \frac{s - r\, y_{n+1}}{t_{n+1}}\right) \left| \frac{r\, x_{n+1} - s}{z_{n+1}} - 1 \right| .$$

Le premier terme du second membre est supérieur à 1 d'après (6.4) et $t_{n+1} < 1$; examinons le second terme.

- Si r est négatif ou nul et s positif, le second terme est supérieur à 1 .

- Si $r \geqslant 2$, les inégalités $x_{n+1} > z_{n+1}$ et (6.4) entraînent (en omettant l'indice $n+1$ pour x , y , a et z) :

$$\left| \frac{r\, x - s}{z} - 1 \right| = \frac{r\, x - s}{z} - 1 > \frac{r(x-y) - (a-y)}{z} - 1 > (r - 1\, \frac{x - y}{z} - 1$$

qui est supérieur à 1 dès que $r \geqslant 3$.

En résumé, les inégalités

$$q_n \leqslant v < q_{n+1} \qquad v|v\xi - u + \eta| \leqslant v_n|\rho_n|$$

ne peuvent être satisfaites simultanément que pour $r = 1$ ou 2 .

- Si $r = 1$, l'expression

$$\frac{v|v\xi - u + \eta|}{v_n|\rho_n|} = \left(1 + \frac{s - y_{n+1}}{z_{n+1}}\right)\left|\frac{x_{n+1} - s}{z_{n+1}} - 1\right|$$

prend pour les entiers s définis par (6.4) c'est-à-dire par $0 < s < a_{n+1}$ une valeur au moins égale à la plus petite de celles qui ~~correspondent à~~ $s = 0$, $s = b_{n+1}$ et $s = b_{n+1} + 1$ (car $x_{n+1} - s - z_{n+1}$ change de signe quand on passe de $s = b_{n+1}$ à $s = b_{n+1} + 1$). Or :

- pour $r = 1$ et $s = b_{n+1}$ on a d'après (5.2)

$$u = u_n + b_{n+1} p_n + p_{n-1} = u_{n+1} \qquad v = v_{n+1} \quad ;$$

- pour $r = 1$ et $s = 0$, nous poserons

$$(6.5) \qquad u = u_n + p_{n-1} = u'_n \quad , \quad v = v_n + q_{n-1} = v'_n \quad , \quad \rho'_n = v'_n\xi - u'_n + \eta \quad ;$$

- pour $r = 1$ et $s = b_{n+1} + 1$, on a donc, d'après (6.5)

$$u = u'_{n+1} \qquad v = v'_{n+1}$$

- Si $r = 2$, enfin, des calculs analogues permettent de montrer que les valeurs entières s définies par (6.4) correspondent à des valeurs de $v|v\xi - u + \eta|$ supérieures au plus petit des deux produits $v_n|\rho_n|$ et $v_{n+1}|\rho_{n+1}|$.

En résumé, les inégalités $0 \leqslant v_n < q_n$ (cas A_n) et $q_n \leqslant v < q_{n+1}$ (6.3) entraînent, en tenant compte de la définition (6.5) :

$$v|v\xi - u + \eta| \geqslant \inf[v_n|\rho_n| \;,\; v'_n|\rho'_n| \;,\; v_{n+1}|\rho_{n+1}| \;,\; v'_{n+1}|\rho'_{n+1}|] .$$

<u>Si on est dans le cas</u> B_n , c'est-à-dire si $q_n \leqslant v_n < q_n + q_{n-1}$, avec $v_{n+1} = v_{n-1} = v_n - q_n$, des comparaisons analogues à celles qui viennent d'être faites pour le cas A_n montrent que (6.3) entraîne

$$v|v\xi - u + \eta| \geqslant \inf[v_n|\rho_n| \;,\; v_{n-1}|\rho_{n-1}|] .$$

En rassemblant tous ces résultats, on peut donc énoncer le théorème suivant, analogue à la propriété (P) des réduites :

<u>Théorème 2</u>. A tout couple d'entiers u , v $(v > 0)$, on peut associer un indice $n \geqslant 0$ tel que

$$v|v\xi - u + \eta| \geqslant \inf[v_n|\rho_n| \;,\; v'_n|\rho'_n|] .$$

Comme, d'après (5.5) et (6.5) on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v'_n = +\infty$,
il en résulte, comme il a été annoncé par (3.1), le

Théorème 3.

$$K(\xi,\eta) = \lim_{n\to+\infty} [v_n |\rho_n| \ , \ v'_n|\rho'_n|] .$$

7.- Calcul de $v_n|\rho_n|$ et de $v'_n|\rho'_n|$.

On a, d'après les définitions (4.5), (5.6) et (6.5) et la formule (4.10) :

$$v_n|\rho_n| = t_{n+1}\, z_{n+1}\, q_n|\varepsilon_n| = \frac{t_{n+1}\, z_{n+1}}{x_{n+1} - y_{n+1}}$$

$$v'_n|\rho'_n| = (v_n + q_{n-1})\,|\rho_n + \varepsilon_{n-1}| = \frac{(t_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}} .$$

D'après le théorème 3, ces formules permettent donc le calcul de $k(\xi,\eta)$ en utilisant les relations de récurrence (5.7) et (5.8).

8.- Exclusion de B_n pour $k(\xi,\eta)$ assez grand.

Supposons qu'au rang n on soit dans le cas B_n, c'est-à-dire que $1 \leqslant t_{n+1} < 1 - y_{n+1}$. On a alors d'après (5.8) $0 < z_{n+1} < 1$ et, d'après (5.1)

$$v_{n+1}|\rho_{n+1}| = (v_n - q_n)\,|\rho_n - \varepsilon_n| = (t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1})q_n|\varepsilon_n|$$
$$= \frac{(t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}}$$

En sous-entendant l'indice $n+1$ pour x, y, z et t, les deux fonctions de z, toutes deux positives

$$v_n|\rho_n| = \frac{t\,z}{x - y} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1}|\rho_{n+1}| = \frac{(t - 1)(1 - z)}{x - y}$$

sont, pour $0 \leqslant z \leqslant 1$, l'une croissante, l'autre décroissante, la première s'annulant pour $z = 0$ et la seconde pour $z = 1$; la plus petite d'entre elles est donc au plus égale, quel que soit z dans cet intervalle, à la valeur commune unique qu'elles prennent pour $z = \frac{t-1}{2t-1}$ et qui vaut $\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)}$.

Cette dernière fonction de t est croissante pour $1 \leqslant t \leqslant 1-y$; donc :

$$\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)} \leqslant \frac{-y(1-y)}{(x-y)(1-2y)} < \frac{-y}{1-2y} < \frac{1}{3}$$

puisque $x > 1$ et $y > -1$.

Ainsi, d'après le théorème 3, la réalisation du cas B_n pour une infinité de valeurs de n implique $k(\xi,\eta) \leqslant \frac{1}{3}$; d'après les encadrements donnés au paragraphe 2, $k(\xi,\eta)$ est alors assez éloigné de K .

9.- Caractérisation de $k(\xi,\eta)$ par les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

Les expressions (4.8) et (4.9) de x_n et y_n montrent que les valeurs d'accumulation de $x_n - y_n$ lorsque $n \to +\infty$ ne sont pas influencées par les p premiers quotients incomplets, quel que soit p arbitrairement fixé. De même, si, pour $n \geqslant p$, on a toujours A_n , comme les produits $x_{n+1} \ldots x_{n+k}$ et $y_n\, y_{n-1} \ldots y_{p+1}$ tendent respectivement vers $+\infty$ et 0 avec k et $1/n$, les formules déduites de (5.7)

$$z_n = x_n - b_n - \frac{x_{n+1} - b_{n+1}}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+2} - b_{n+2}}{x_{n+1}\, x_{n+2}} - \ldots + (-1)^k \frac{x_{n+k} - b_{n+k} - \dfrac{z_{n+k+1}}{x_{n+k+1}}}{x_{n+1} \ldots x_{n+k}}$$

$$t_n = y_n(y_{n-1} - b_{n-1}) - y_n\, y_{n-1}(y_{n-2} - b_{n-2}) + \ldots + (-1)^{n-p+1}\, y_n \ldots$$
$$\ldots\, y_{p+1}\, (y_p - b_p - t_p)$$

montrent que les valeurs d'accumulation de z_n et t_n ne sont pas influencées par les p premières valeurs de a_n et b_n .

Puisque $k(\xi,\eta) > \frac{1}{3}$ implique qu'on a A_n pour tout n assez grand, il en résulte que dans cette hypothèse $k(\xi,\eta)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un certain rang, de deux suites d'entiers positifs a_n et b_n avec $a_n > b_n \geqslant 0$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n} \qquad a_n = [x_n]$$

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \qquad b_n = [x_n - z_n]$$

$$0 < z_n < x_n \qquad -1 < y_n < 0 < t_n < 1$$

et d'une manière analogue à (4.11) :

$$k(\xi,\eta) = \varliminf_{n \to +\infty} \left[\frac{t_n\, z_n}{x_n - y_n} \; , \; \frac{(t_n - y_n)(x_n - z_n)}{x_n - y_n}\right]$$

10.- Conséquences : Détermination de K .

En comparant, à l'aide des formules du paragraphe 7 et des formules de récurrence (5.7), les valeurs des produits $v_n\,|\rho_n|$, $v'_n\,|\rho'_n|$ relatifs à des indices n différents entre eux de quelques unités, on est conduit à des calculs plus compliqués mais analogues à celui par lequel nous avons établi que $k(\xi,\eta) > \frac{1}{3}$ est, à partir d'un certain rang, incompatible avec B . C'est par cette voie que Cassels prouve que l'hypothèse $k(\xi,\eta) > \frac{4}{11}$ exige que les suites des a_n et des b_n soient exclusivement constituées, à l'exception d'un nombre fini de termes, par la répétition indéfinie de la période suivante, désignée par S :

$$S \quad \begin{cases} a_n = 4 \quad , \quad a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1 \\ b_n = 2 \quad , \quad b_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+3} = 0 \end{cases}$$

En fait, les nombres ξ et η correspondant aux développements de ce type sont ceux de la forme

$$\xi = \frac{A\sqrt{7} + B}{C\sqrt{7} + D} \qquad \eta = \frac{-3\sqrt{7} - 7 + E\sqrt{7} + F}{14(C\sqrt{7} + D)}$$

où A , B , C , D sont des entiers arbitraires tels que $AD - BC = \pm 1$.

Parmi eux se trouvent les couples notables

$$\xi = \sqrt{7} \quad , \quad \eta = -\frac{3\sqrt{7}}{14} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{7-\sqrt{7}}{14} \quad , \quad \eta = -\frac{1}{14} .$$

Pour tous ces couples on a $k(\xi,\eta) = \dfrac{27}{28\sqrt{7}} > \dfrac{4}{11}$; par suite :

Théorème 4.

$$K = \frac{27}{28\sqrt{7}} = 0,3644\ldots$$

11.- Autres valeurs remarquables de $k(\xi,\eta)$.

La valeur de $k(\xi,\eta)$ immédiatement inférieure à K (ou la borne supérieure de ces valeurs), donc inférieure à $\frac{4}{11}$, n'est pas connue. Citons cependant la valeur $\dfrac{37}{10\sqrt{110}} = 0,3528\ldots$ qui correspond aux couples ξ , η dont le développement par l'algorithme précédent est exclusivement constitué, à partir d'un certain rang, par la répétition indéfinie de la période

$$T \quad \begin{cases} a = 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ b = 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{cases}$$

et aussi la valeur $\dfrac{23 + 8\sqrt{7}}{126} = 0,3505\ldots$ qui est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $k(\xi,\eta)$ et qui correspond aux couples ξ , η dont le développement est constitué à partir d'un certain rang par les groupements S et T de la façon suivante :

$$\ldots T \underbrace{S \ldots S}_{m_1 \text{ fois } S} T \underbrace{S \ldots S}_{m_2 \text{ fois } S} T\ S \ldots\ldots S\ T \underbrace{S \ldots S}_{m_k \text{ fois } S} T\ S \ldots$$

où les entiers m_k augmentent indéfiniment avec k .

On peut se demander si ces deux valeurs sont respectivement la valeur immédiatement inféfieure à K et la plus petite valeur d'accumulation des $k(\xi,\eta)$. L'algorithme qui vieht d'être décrit pourrait permettre d'en décider. Au prix de quelques modifications, il pourrait aussi être utilisé pour l'étude diophantienne de la forme $v\xi - u + \eta$, sans la restriction $v > 0$.

-:-:-:-:-:-