R. Croisot

Théorie noethérienne des idéaux dans les anneaux et les demi-groupes non nécessairement commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 22, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A20_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 22

THÉORIE NOETHÉRIENNE DES IDÉAUX DANS LES ANNEAUX ET LES DEMI-GROUPES NON NÉCESSAIREMENT COMMUTATIFS

(Exposé de R. CROISOT, le 20.5.1957)

[Exposé d'une partie d'un mémoire de L. LESIEUR et R. CROISOT, à paraître au Math. Zeitschrift.]

PARTIE I.- Idéaux à gauche tertiaires et décompositions en idéaux à gauche tertiaires dans les anneaux et les demi-groupes non nécessairement commutatifs.

U désigne un anneau ou un demi-groupe avec élément zéro, non nécessairement commutatif, n'ayant pas nécessairement un élément unité. Nous imposons une condition de chaîne qui est, soit la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche, soit la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche.

a et b étant deux éléments de U, nous notons $a\,U^*\,b$ la réunion de $a\,U\,b$ et de $\{a\,b\}$ (1). Pour tout élément x de U, nous notons $(x|$ l'idéal à gauche de U engendré par x et (x) l'idéal bilatère de U engendré par x. Les idéaux à gauche de U sont représentés par des majuscules latines imprimées ; en outre, les idéaux bilatères peuvent être représentés par des majuscules de ronde. Pour tout idéal à gauche A et tout idéal bilatère $\mathcal{B}$, nous notons $A\,.^{\boldsymbol{\cdot}}\,\mathcal{B}$ le résiduel à droite de A par $\mathcal{B}$, ensemble des éléments x de U tels que l'on ait $\mathcal{B}\,x \subseteq A$; c'est un idéal à gauche.

1.- Radical tertiaire d'un idéal à gauche.

THÉORÈME 1.1.- *Soit A un idéal à gauche de U. Les éléments a vérifiant la condition*

$$b \notin A \Longrightarrow \exists\, x \in (b| \text{ tel que } x \notin A \text{ et } a\,U^*x \subseteq A$$

forment un idéal bilatère $\mathcal{R}(A)$ de U.

L'ensemble $\mathcal{R}(A)$ est non vide car il contient l'élément zéro de U et il

(1) $a\,U\,b$ est l'ensemble des éléments de la forme $a\,x\,b$ avec $x \in U$. Si U possède un élément unité, on a évidemment $a\,U^*b = a\,U\,b$.

est permis pour la multiplication, à droite et à gauche. Montrons qu'il est fermé pour la soustraction, dans le cas où U est un anneau. Soit $a \in \mathcal{R}(A)$, $a' \in \mathcal{R}(A)$. Prenons $b \notin A$; il existe donc $x \in (b|$ tel que $x \notin A$ et $a\,U^* x \subseteq A$. De $x \notin A$, on déduit l'existence de $x' \in (x|$ tel que $x' \notin A$ et $a' U^* x' \subseteq A$. On a donc $x' \in (b|$, $x' \notin A$ avec $a' U^* x' \subseteq A$ et $a\,U^* x' \subseteq a\,U^* x \subseteq A$; on en déduit $(a - a')\,U^* x' \subseteq A$ d'où $a - a' \subseteq \mathcal{R}(A)$.

<u>DÉFINITION 1.1.</u>- L'idéal bilatère $\mathcal{R}(A)$ s'appelle le <u>radical tertiaire de l'idéal à gauche</u> A.

<u>THÉORÈME 1.2.- Si</u> U <u>est commutatif, le radical tertiaire d'un idéal</u> A <u>coïncide avec l'ensemble des éléments</u> a <u>dont une puissance appartient à</u> A.

Notons $\mathcal{R}'$ ce dernier ensemble et soit $a \in \mathcal{R}'$. On a donc $a^n \in A$. Prenons $b \notin A$. Si l'on a $a\,b \in A$, on en déduit $a\,U^* b \subseteq A$ et on peut choisir $x = b$ dans l'énoncé du théorème 1.1, d'où résulte $a \in \mathcal{R}(A)$. Sinon, on considère le plus petit entier positif m tel que $a^m b \in A$; on a alors $m > 1$ et $a^{m-1} b \notin A$. On peut choisir $x = a^{m-1} b$ et on a $a\,U^* x \subseteq A$, d'où $a \in \mathcal{R}(A)$ et, par suite, $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Inversement, soit $a \in \mathcal{R}(A)$. En vertu de la condition de chaîne, il existe un entier n tel que $A : (a^n) = A : (a^{n+1})$. Si l'on avait $a^{n+1} \notin A$, il existerait $x \in (a^{n+1})$ tel que $x \notin A$ et $a\,U^* x \in A$ d'où $a\,x \in A$. L'élément x de (a^{n+1}) serait nécessairement de la forme $x = r\,a^n$ avec $r \in U$, et on aurait $r \in A : (a^{n+1}) = A : (a^r)$ d'où $x = r\,a^n \in A$, ce qui serait contraire à l'hypothèse. On a donc bien $a^{n+1} \in A$ et, par suite, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}'$.

2.- <u>Idéal à gauche tertiaire</u>.

<u>DÉFINITION 2.1.</u>- On dit qu'un idéal à gauche T est un <u>idéal à gauche tertiaire</u> lorsqu'il vérifie la propriété suivante :

$$a\,U^* b \subseteq T \;,\quad b \notin T \Longrightarrow a \in \mathcal{R}(T)\,.$$

<u>THÉORÈME 2.1.- Si</u> U <u>est commutatif, les notions d'idéal tertiaire et d'idéal primaire coïncident</u>.

Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition précédente et du théorème 1.2.

<u>DÉFINITION 2.2.</u>- On dit qu'un idéal à gauche A est un <u>idéal à gauche primal</u> lorsque les relations

$$a_i U^* x_i \subseteq A \;,\quad x_i \notin A \;,\quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

entraînent l'existence d'un élément $x \in U$ tel que l'on ait

$$a_i U^* x \subseteq A \quad , \quad x \notin A \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

<u>THÉORÈME 2.1.- Tout idéal à gauche tertiaire est primal.</u>

Soit T un idéal à gauche tertiaire.

On raisonne par récurrence sur l'entier n de la définition 2.2. La propriété est triviale pour $n = 1$. Supposons la vraie pour $n = p$ et démontrons la pour $n = p + 1$. On a donc $a_i U^* x \subseteq T$, $x \notin T$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$ et $a_{p+1} U^* x_{p+1} \subseteq T$, $x_{p+1} \notin T$. On en déduit, T étant tertiaire, $a_{p+1} \in \mathfrak{R}(T)$; par suite, d'après la relation $x \notin T$, il existe $x' \in (x|$ tel que $x' \notin T$ et $a_{p+1} U^* x' \subseteq T$. On a également $a_i U^* x' \subseteq T$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$. La propriété est donc vérifiée.

<u>THÉORÈME 2.2.- Le radical tertiaire d'un idéal à gauche tertiaire T distinct de U est un idéal bilatère premier $\mathfrak{P}$. Cet idéal coïncide avec l'ensemble des éléments a pour lesquels on peut trouver un élément $b \notin T$ tel que l'on ait</u>

$$u\, U^* b \subseteq T \ .$$

<u>De plus, il existe un élément $x_0 \notin T$ tel que l'on ait</u>

$$a\, U^* x_0 \subseteq T \Longleftrightarrow a \in \mathfrak{P} \ .$$

Démontrons d'abord la deuxième partie du théorème. Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des éléments a pour lesquels on peut trouver un élément $b \notin T$ tel que l'on ait $a\, U^* b \subseteq T$. Puisque T est tertiaire, on en tire $a \in \mathfrak{R}(T)$, d'où $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}(T)$. Réciproquement, soit $a \in \mathfrak{R}(T)$. Prenons $b \notin T$; il existe alors $x \notin T$ tel que $a\, U^* x \subseteq T$ d'où $a \in \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{R}(T) \subseteq \mathfrak{P}$. On a bien $\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{P}$.

Considérons alors l'idéal à gauche $T.^{\cdot}\mathfrak{P}$. En vertu de la condition de chaîne, on peut trouver des éléments $a_i \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que l'on ait

$$(1) \qquad T.^{\cdot}\mathfrak{P} = \bigcap_i (T.^{\cdot}(a_i)) \ .$$

Puisque T est primal, il existe un élément $x_0 \notin T$ tel que l'on ait $a_i U^* x_0 \subseteq T$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En vertu de (1), on a $x_0 \in T.^{\cdot}\mathfrak{P}$, donc $p \in \mathfrak{P}$ entraîne $p\, U^* x_0 \subseteq T$. Réciproquement, si y est un élément vérifiant la relation $y\, U^* x_0 \subseteq T$, on a $y \in \mathfrak{P}$. Il en résulte que $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}(T)$ est l'ensemble des éléments a qui vérifient $a\, U^* x_0 \subseteq T$.

Montrons maintenant que l'idéal $\mathfrak{P}$ est premier. Supposons $a\,U^*b \subseteq \mathfrak{P}$. On a donc $a\,U^*b\,U^*x_0 \subseteq T$. Si l'on a $b\,U^*x_0 \subseteq T$ on en déduit $b \in \mathfrak{P}$. Sinon il existe $c \in b\,U^*x_0$ avec $c \notin T$; on en déduit $a\,U^*c \subseteq T$ avec $c \notin T$, d'où $a \in \mathfrak{P}$. L'idéal $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}(T)$ est bien premier (2).

<u>DÉFINITION 2.3</u>.- Si $\mathfrak{P}$ est le radical tertiaire de l'idéal à gauche tertiaire T distinct de U, on dit que T est $\mathfrak{P}$ <u>-tertiaire</u> et que $\mathfrak{P}$ est <u>l'idéal premier associé</u> à T.

3.- <u>Décompositions en idéaux à gauche tertiaire</u>.

<u>LEMME 3.1</u>.- <u>Tout idéal à gauche $\cap$-irréductible est tertiaire</u>.

Supposons que l'idéal à gauche T soit $\cap$-irréductible et non tertiaire. Il existe donc a et b tels que l'on ait

$$a\,U^*b \subseteq T \quad , \quad b \notin T \quad , \quad a \notin \mathfrak{R}(T) .$$

Par suite, il existe $c \notin T$ tel que l'on ait

$$a\,U^*c' \subseteq T \quad , \quad c' \in (c| \Longrightarrow c' \in T .$$

Considérons, dans le cas où U est un anneau, l'idéal $T' = (T+(b|) \cap (T+(c|)$. Soit $x \in T'$. On a donc $x = t_1 + b' = t_2 + c'$, avec $t_1 \in T$, $t_2 \in T$, $b' \in (b|$, $c' \in (c|$. Il en résulte $c' = t_3 + b'$ avec $t_3 \in T$, d'où $a\,U^*c' \subseteq T$, et par suite $c' \in T$. On en déduit $x \in T$ et $T' = T$ ce qui contredit le fait que l'idéal est $\cap$-irréductible.

Dans le cas d'un demi-groupe, on considère l'idéal $T' = (T \cup (b|) \cap (T \cup (c|)$, et on procède de la même manière.

<u>THÉORÈME 3.1</u>.- <u>Tout idéal à gauche est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche tertiaires</u>.

Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme 3.1. et de la condition de chaîne imposée.

<u>THEOREME 3.2</u>.- <u>Soit</u> $A = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k$ <u>une décomposition d'un idéal à gauche</u> A <u>distinct de</u> U <u>en idéaux à gauche</u> T_i <u>supposés</u> $\mathfrak{P}_i$<u>-tertiaires, aucun d'eux</u>

---

(2) Rappelons qu'un idéal bilatère $\mathfrak{P}$ est premier si la relation $a\,U\,b \subseteq \mathfrak{P}$ entraîne $a \in \mathfrak{P}$ ou $b \in \mathfrak{P}$ (Cf. N. H. MAC COY, Amer. Journ. of Math., 71, 1948, p. 823-833). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la relation $a\,U^*b \subseteq \mathfrak{P}$ entraîne $a \in \mathfrak{P}$ ou $b \in \mathfrak{P}$.

n'étant superflu. Le radical tertiaire $\mathcal{R}(A)$ de A est égal à

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k \ .$$

a) Démontrons l'inclusion $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{R}(A)$.
Soit $a \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k$. Considérons $b \notin A$; on a donc $b \notin T_1$ (par exemple) et, par suite, d'après $a \in \mathcal{P}_1$, il existe $b'_1 \in (b|$ avec $b'_1 \notin T_1$ et $a\, U^* b'_1 \subseteq T_1$. Si b'_1 est dans T_2 , on a $b'_1 \notin T_1 \cap T_2$ et $a\, U^* b'_1 \subseteq T_1 \cap T_2$. Sinon, il existe, en vertu de $a \in \mathcal{P}_2$, un élément $b'_2 \in (b'_1|$ (donc $b'_2 \in (b|$) avec $b'_2 \notin T_2$ et $a\, U^* b'_2 \subseteq T_2$. On a aussi $a\, U^* b'_2 \subseteq T_1$ d'où $a\, U^* b'_2 \subseteq T_1 \cap T_2$. Dans les deux cas, il existe un élément $b'_2 \in (b|$ avec $b'_2 \in T_1 \cap T_2$ et $a\, U^* b'_2 \subseteq T_1 \cap T_2$. En poursuivant ce raisonnement, on obtient un élément $b'_k \in (b|$ avec $b'_k \notin A$ et $a\, U^* b'_k \subseteq A$. On a bien $a \in \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{R}(A)$.

b) Démontrons l'inclusion $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k$. Soit $a \in \mathcal{R}(A)$. Choisissons $b \in T_2 \cap \ldots \cap T_k$ avec $b \notin T_1$, ce qui est possible puisque T_1 n'est pas superflu. On a donc $b \notin A$ et il existe $b' \in (b|$ tel que $b' \notin A$ et $a\, U^* b' \subseteq A$, donc $a\, U^* b' \subseteq T_1$. On a aussi $b' \notin T_1$ car $b' \in T_1$ entraînerait $b' \in A$. Comme T_1 est $\mathcal{P}_1$-tertiaire, on en déduit $a \in \mathcal{P}_1$. On établit de même $a \in \mathcal{P}_2$, ... , $a \in \mathcal{P}_k$, d'où $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_k$.

LEMME 3.2.- L'intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche $\mathcal{P}$-tertiaires est un idéal à gauche $\mathcal{P}$-tertiaire.

Il suffit de le démontrer pour l'intersection $T = T_1 \cap T_2$ de deux idéaux T_1 et T_2 supposés $\mathcal{P}$-tertiaires. On vient de voir (théorème 3.2.) que l'on a $\mathcal{R}(T) = \mathcal{P}$. Soit donc $a\, U^* b \subseteq T_1 \cap T_2$ avec $b \notin T_1 \cap T_2$. On a, par exemple, $b \notin T_1$ d'où, puisque T_1 est $\mathcal{P}$-tertiaire, $a \in \mathcal{P}$.

Etant donnée une décomposition de l'idéal à gauche A

$$A = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k$$

en idéaux à gauche T_i $\mathcal{P}_i$-tertiaires, aucun T_i n'étant superflu, on peut donc rassembler les idéaux tertiaires associés à un même idéal premier. La décomposition obtenue est dite réduite, conformément à la définition suivante :

<u>DÉFINITION 3.1</u>.- Une décomposition $A = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k$ en idéaux T_i supposés $\mathfrak{P}_i$-tertiaires est dite <u>réduite</u> si aucun T_i n'est superflu et si les idéaux premiers $\mathfrak{P}_i$ sont tous distincts.

On a donc en définitive le théorème suivant :

<u>THÉORÈME 3.3</u>.- <u>Tout idéal à gauche A distinct de U possède au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche tertiaires.</u>

4.- <u>Théorème d'unicité</u>.

<u>LEMME 4.1</u>.- <u>Soit $A = T \cap X = T' \cap X'$ où T est un idéal à gauche $\mathfrak{P}$-tertiaire, T' un idéal à gauche $\mathfrak{P}'$-tertiaire, avec $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}'$. On a</u>

$$A = X \cap X'$$

Il suffit de montrer $X \cap X' \subseteq A$. Soit $a \in X \cap X'$. Supposons par exemple $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$. Il existe donc $p \in \mathfrak{P}$ avec $p \notin \mathfrak{P}'$. Si l'on avait $a \notin A$, on aurait $a \notin T$ et, par suite, il existerait $a' \in (a|$ avec $a' \notin T$ et $p\,U^* a' \subseteq T$. On en déduirait $p\,U^* a' \subseteq T \cap X = T' \cap X'$, d'où $p\,U^* a' \subseteq T'$. Mais, on aurait $a' \notin T'$, puisqu'on aurait $a' \notin A$. T' étant $\mathfrak{P}'$-tertiaire, il en résulterait $p \in \mathfrak{P}'$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

<u>THÉORÈME 4.1</u>.- <u>Soit $A = T'_1 \cap T'_2 \cap \dots \cap T'_{k'} = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k$ deux décompositions réduites de l'idéal à gauche A distinct de U comme intersection d'idéaux à gauche tertiaire. On a $k = k'$ et les idéaux premiers $\mathfrak{P}_i$ associés aux T_i sont les mêmes que les idéaux premiers $\mathfrak{P}'_j$ associés aux T'_j.</u>

Il suffit de montrer que $\mathfrak{P}_1$, par exemple, est égal à un $\mathfrak{P}'_j$. S'il n'en était pas ainsi, on aurait les relations suivantes :

(1) $$\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}'_1$$

(2) $$\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}'_2$$

....

(k') $$\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}_{k'}$$

La relation (1) entraîne, d'après le lemme 4.1,

$$A = T'_2 \cap \dots \cap T'_{k'} \cap T_2 \cap \dots \cap T_k .$$

De la relation (2) et de l'égalité

$$A = T'_2 \cap \dots \cap T'_k \cap T_2 \cap \dots \cap T_k = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k \quad ,$$

on déduit alors de la même manière,

$$A = T'_3 \cap \dots \cap T'_{k'} \cap T_2 \cap \dots \cap T_k \quad .$$

Le procédé se poursuit et conduit, après application des relations (1) , (2) , ... , (k') , à

$$A = T_2 \cap \dots \cap T_k$$

ce qui contredit le fait que T_1 n'est pas superflu.

PARTIE II.5.- Idéaux bilatères tertiaires et décompositions en idéaux bilatères tertiaires dans les anneaux et les demi-groupes non nécessairement commutatifs.

U désigne toujours un anneau ou un demi-groupe avec élément zéro, non nécessairement commutatif, n'ayant pas nécessairement un élément unité. Nous imposons maintenant seulement la condition de chaîne ascendante pour les idéaux bilatères ou la condition de chaîne descendante pour les idéaux bilatères.

Les notations de la partie I restent valables.

Les résultats obtenus sur les idéaux à gauche s'étendent aux idéaux bilatères en remplaçant l'idéal principal à gauche $(b|$ considéré dans la partie I par l'idéal principal bilatère (b) . Nous nous contenterons d'énoncer les principales définitions et les principaux résultats.

THÉORÈME 5.1.- Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de U . Les éléments a vérifiant la condition

$$b \notin \mathfrak{a} \Longrightarrow \exists \ x \in (b) \quad \text{tel que} \quad x \notin \mathfrak{a} \ , \quad a\, U^* x \subseteq \mathfrak{a}$$

forment un idéal bilatère $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ de U .

DÉFINITION 5.1.- Cet idéal bilatère s'appelle le radical tertiaire (à droite) de l'idéal bilatère $\mathfrak{a}$.

Remarquons que $\mathfrak{a} = A$ possède en tant qu'idéal à gauche un radical tertiaire $\mathfrak{R}(A)$ qui n'est pas a priori identique à son radical tertiaire $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ en tant qu'idéal bilatère. On a seulement $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$. Signalons cependant qu'il y a égalité dans le cas où l'on impose la condition de la chaîne descendante pour les idéaux à gauche.

<u>DÉFINITION 5.2.</u>- On dit qu'un idéal bilatère $\mathcal{C}$ est un <u>idéal bilatère tertiaire</u> (à droite) lorsqu'il vérifie la propriété suivante

$$a\ U^* b \subseteq \mathcal{C} \quad , \quad b \notin \mathcal{C} \Longrightarrow a \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \quad .$$

Si un idéal bilatère $\mathcal{C}$ est tertiaire en tant qu'idéal à gauche, il est également tertiaire en tant qu'idéal bilatère. La réciproque n'est pas vraie a priori ; elle est pourtant valable en présence de la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche.

<u>DÉFINITION 5.3.</u>- On dit qu'un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ est <u>primal</u> (à droite), lorsque les relations

$$a_i U^* x_i \subseteq \mathfrak{a} \quad , \quad x_i \notin \mathfrak{a} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots , n$$

entraînent l'existence d'un élément $x \in U$ tel que l'on ait

$$a_i U^* x \subseteq \mathfrak{a} \quad , \quad x \notin \mathfrak{a} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots , n.$$

Cette définition coïncide avec la définition 2.2. déjà donnée pour un idéal à gauche. Donc, pour qu'un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ soit primal en tant qu'idéal bilatère, il faut et il suffit qu'il soit primal en tant qu'idéal à gauche.

<u>THÉORÈME 5.2.</u>- <u>Tout idéal bilatère tertiaire est primal</u>.

<u>THÉORÈME 5.3.</u>- <u>Le radical tertiaire d'un idéal bilatère tertiaire</u> $\mathcal{C}$ <u>est un idéal bilatère premier</u> $\mathfrak{P}$.

<u>DÉFINITION 5.4.</u>- Si $\mathfrak{P}$ est le radical tertiaire de l'idéal bilatère tertiaire $\mathcal{C} \neq U$, on dit que $\mathcal{C}$ <u>est</u> $\mathfrak{P}$<u>-tertiaire</u> et que $\mathfrak{P}$ est l'<u>idéal premier associé</u> à $\mathcal{C}$.

<u>DÉFINITION 5.5.</u>- Une décomposition d'un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ distinct de U , $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_k$, en idéaux bilatères $\mathfrak{a}_i$ supposés $\mathfrak{P}_i$-tertiaires est dite <u>réduite</u> si aucun $\mathfrak{a}_i$ n'est superflu et si les idéaux premiers $\mathfrak{P}_i$ sont tous distincts.

THÉORÈME 5.4.- *Tout idéal bilatère distinct de* U *est intersection réduite d'un nombre fini d'idéaux bilatères tertiaires (à droite).*

THÉORÈME 5.5.- *Soit* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}'_1 \cap \mathfrak{a}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}'_{k'}$ *deux décompositions réduites de l'idéal bilatère* $\mathfrak{a}$ *distinct de* U *comme intersection d'idéaux bilatères tertiaires. On a* $k = k'$ *et les idéaux premiers* $\mathfrak{p}_i$ *associés aux* $\mathfrak{a}_i$ *sont les mêmes que les idéaux premiers* $\mathfrak{p}'_j$ *associés aux* $\mathfrak{p}_j$.