Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michel Zisman

χ_y-caractéristique virtuelle d'après F. Hirzebruch

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 1 (1958-1959), exp. nº 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A4_0>

λ_y-CARACTÉRISTIQUE VIRTUELLE D'APRÈS F. HIRZEBRUCH

par Michel ZISMAN

1. Notations et lemmes.

Soit E un sur-anneau de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$, 1 étant aussi l'unité de E. On désigne par $E[[y]]$ (resp. $\mathbb{Z}[[y]]$) l'anneau des séries formelles à coefficients dans E (resp. $\mathbb{Z}$). On appelle homomorphisme permis $h : E[[y]] \to \mathbb{Z}[[y]]$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}[[y]]$-modules. On a donc

$$h(u + v) = h(u) + h(v) \qquad (u , v \in E[[y]])$$

$$h(u v) = u\, h(v) \qquad (u \in \mathbb{Z}[[y]] , \quad v \in E[[y]])$$

en particulier $h(u) = u\, h(1)$ pour $u \in \mathbb{Z}[[y]]$.

LEMME 1. - Soit $h_o : E \to \mathbb{Z}[[y]]$ un homomorphisme de groupes abéliens. Il existe un unique homomorphisme permis $h : E[[y]] \to \mathbb{Z}[[y]]$ prolongeant h_o.

En effet on pose $h(v) = h_o(e_o) + h_o(e_1)y + h_o(e_2)y^2 + \ldots$, si $v = e_o + e_1 y + e_2 y^2 + \ldots$ $(e_i \in E)$, etc.

LEMME 2. - Soient h et h' deux homomorphismes permis et $t \in E[[y]]$, tels que $h'(u) = h(t\, u)$ pour tout $u \in E$. Alors cette égalité est encore vraie pour tout $u \in E[[y]]$.

Dans la suite l'anneau E sera engendré sur $\mathbb{Z}$ par adjonction d'inconnues $f_1 , \ldots , f_r , w , f_1^{-1} , \ldots , f_r^{-1}$. Un homomorphisme permis est alors défini (lemme 1) par ses valeurs sur les monômes $w^{\mu} f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \ldots f_r^{\lambda_r}$ $(\lambda_1 , \ldots , \lambda_r \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{Z}^+)$ car ils forment une base de E.

Soient alors V une variété analytique complexe compacte, $F_1 , \ldots , F_r$ des fibrés analytiques complexes linéaires sur V, et W un fibré analytique complexe à fibres vectorielles sur V.

On définit alors deux homomorphismes permis $E[[y]] \to \underset{\sim}{Z}[[y]]$ par les formules

$$h_V(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \dots f_r^{\lambda_r}) = \chi(V , W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes F_r^{\lambda_r})$$

(1) $$\hat{h}_V(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \dots f_r^{\lambda_r}) = \chi_y(V , W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes F_r^{\lambda_r})$$

$$h(1) = \chi(V) , \quad \hat{h}(1) = \chi_y(V) .$$

(pour la définition des χ voir [8]) où les exposants dans le membre de droite désignent des puissances tensorielles.

<u>En particulier le terme constant de</u> $\hat{h}_V(u)$ <u>pour</u> $u \in E[[y]]$ <u>est égal à</u> $h_V(u_o)$ <u>où</u> u_o <u>est le terme constant de</u> u .

Si S est un diviseur sans singularité ([8]) de V , tous les fibrés considérés ci-dessus peuvent être restreints à S . (Contrairement aux notations de [8], on écrira W au lieu de W_S pour simplifier l'écriture). On définit alors 2 homomorphismes permis.

(2) $$h_S(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \dots f_r^{\lambda_r}) = \chi(S , W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes F_r^{\lambda_r}) , \quad h(1) = \chi(S)$$

$$\hat{h}_S(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \dots f_r^{\lambda_r}) = \chi_y(S , W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes F_r^{\lambda_r}) , \quad \hat{h}(1) = \chi_y(S)$$

Avec ces notations on a alors (E engendré par w , s , s^{-1}) :

$$\chi_y(S , W) = \hat{h}_V\left(w \frac{1-s^{-1}}{1+y\, s^{-1}}\right)$$

(3) $$\chi_y(S) = \hat{h}_V\left(\frac{1-s^{-1}}{1+y\, s^{-1}}\right)$$

$$\chi(S , W) = h_V(w(1 - s^{-1})) , \qquad \chi(S) = h_V(1 - s^{-1})$$

il suffit en effet de remarquer que toute série dont le terme constant est 1 a un inverse, et d'appliquer les formules (4) et (5) de [8].

Les notations introduites permettent de simplifier l'écriture des caractéristiques et de généraliser par analogie la notion de caractéristique quand $\{S\}$ est un fibré linéaire quelconque et non plus le fibré induit par un diviseur sans singularité.

2. Définition ; premières propriétés de la χ_y-caractéristique virtuelle.

V désigne une variété analytique complexe de dimension complexe n.

Soient $F_1, \dots, F_r$ des fibrés analytiques complexes linéaires, et W un fibré analytique complexe à fibre vectorielle.

Le r-uple $(F_1, \dots, F_r)$ est appelé sous-variété virtuelle de dimension $n-r$.

La série formelle à coefficients entiers :

$$\chi_y((F_1, \dots, F_r), W)_V = \hat{h}_V\Big(w \prod_{i=1}^{r} \frac{1-f_i^{-1}}{1+y\, f_i^{-1}}\Big)$$

est appelée la χ_y-caractéristique virtuelle de W restreinte à la sous-variété virtuelle $(F_1, \dots, F_2)$. Notons qu'elle ne dépend pas de l'ordre des F_i.

Si W est le fibré trivial de fibre C, on écrit simplement $\chi_y(F_1, \dots, F_r)_V$ c'est le χ_y-genre de la sous-variété virtuelle $(F_1, \dots, F_r)$.

On pose

$$\chi_y((F_1, \dots, F_r), W)_V = \sum_{p=0}^{\infty} \chi^p((F_1, \dots, F_r), W)_V\, y^p$$

$$\chi_y(F_1, \dots, F_r)_V = \sum_{p=0}^{\infty} \chi^p(F_1, \dots, F_r)_V\, y^p$$

et de plus $\chi^0 = \chi$ dans tous les cas. On a alors

$$\chi((F_1, \dots, F_r), W)_V = h_V\Big(w \prod_{i=1}^{r} (1 - f_i^{-1})\Big), \text{ etc.}$$

Ce nombre entier $\chi((F_1, \dots, F_r), W)_V$ (resp. $\chi(F_1, \dots, F_r)_V$) est appelé χ-caractéristique virtuelle (resp. χ-genre) de W restreinte à la sous-variété virtuelle $(F_1, \dots, F_r)$.

Cas particuliers. - On voit que

$$\chi(F)_V = \chi(V) - \chi(V, F^{-1})$$

$$\chi_y(\{S\}, W)_V = \chi_y(S, W)$$

Dans ce dernier cas la caractéristique virtuelle est donc un polynôme en y . On ne sait pas si cela est vrai dans le cas général, et si $\chi_y((F_1 , \dots , F_r) , W)_V$ est identiquement nulle pour $r > n$.

PROPOSITION 1. - Si l'un quelconque des F_i est le fibré linéaire trivial de fibre C ,

$$\chi_y((F_1 , \dots , F_r) , W) = 0 \quad .$$

Cela résulte immédiatement des définitions.

PROPOSITION 2. - Soit S un diviseur sans singularité de V et posons $F_1 = \{S\}$. Alors

$$\chi_y((F_1 , \dots , F_r) , W)_V = \chi_y(((F_r)_S , \dots , (F_r)_S) , W_S)_S \ ;$$

Posons en effet

$$R(x) = \frac{1-x^{-1}}{1+y\ x^{-1}}$$

alors

$$\chi_y(((F_r)_S , \dots , (F_r)_S) , W_S)_S = \hat{h}_S(w \prod_{i=2}^{r} R(f_i))$$

mais

$$\hat{h}_S(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \dots \lambda_r^{\lambda_r}) = \chi_y(S , W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes F_r^{\lambda_r})$$

$$= \hat{h}_V(w\ f_1^{\lambda_1} \dots \lambda_r^{\lambda_r} R(f_1)) \qquad \text{(d'après la formule 3)}$$

le lemme 2 où l'on prend $t = R(f_1)$ montre alors que

$$\hat{h}_S(w \prod_{i=r}^{r} R(f_i)) = \hat{h}_V\ w \prod_{i=1}^{r} (R(f_i))$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3. - Soient A et B deux fibrés linéaires sur V . On a alors l'égalité :

$$\chi_y((F_1,F_2,\ldots,F_r,A\otimes B),W)_V = \chi_y((F_1,\ldots,F_r,A),W)_V + \chi_y((F_1,\ldots,F_r,B),W)_V$$
$$+ (y-1)\chi_y((F_1,\ldots,F_2,A,B),W)_V - y\chi_y((F_1,\ldots,F_r,A,B,A\otimes B),W)_V$$

Si on pose

$$u = w \prod_{i=1}^{r} R(f_i) \quad ,$$

et si a , b représentent les fibrés A , B , on doit montrer que

$$\hat{h}_V(u\,R(ab)) = \hat{h}_V(u\,R(a)) + \hat{h}_V(u\,R(b)) + (y-1)\,\hat{h}_V(u\,R(a)\,R(b))$$
$$- y\,\hat{h}_V(u\,R(a)\,R(b)\,R(ab)) \ .$$

Comme $\hat{h}_V$ est un homomorphisme permis, on peut faire rentrer y et $y-1$ à l'intérieur des $\hat{h}_V$, et comme $\hat{h}_V$ est un homomorphisme de groupes abéliens, il suffit de montrer que

$$R(ab) = R(a) + R(b) + (y-1)\,R(a)\,R(b) - y\,R(a)\,R(b)\,R(ab) \quad ,$$

et cette égalité entre séries formelles se vérifie sans peine.

COROLLAIRE.

$$\chi((F_1,\ldots,A\otimes B),W)_V = \chi((F_1,\ldots,F_2,A),W)_V + \chi((F_1,\ldots,F_2,B),W)_V$$
$$+ (y-1)\chi_y((F_1,\ldots,F_r,A,B),W)_V - y\chi((F_1,\ldots,F_r,A,B,A\otimes B),W)_V \quad .$$

3. Δ -variétés.

DÉFINITION.- Soient V une variété analytique complexe de dimension n , $\mathcal{C}(V)$ le fibré vectoriel tangent de V . On dit que V est une Δ -variété si on peut restreindre au sens analytique complexe le groupe structural de $\mathcal{C}(V)$ au groupe $\Delta(n\ ,\ C)$ des matrices dont tous les termes sont nuls au-dessous de la diagonale principale, et de déterminant non nul ([6]).

A toute variété analytique complexe V , on sait associer de manière canonique une Δ-variété par le procédé suivant :

Soient $\mathcal{T}(V)$ le fibré tangent à V, E le $GL(n, C)$-fibré principal associé à $\mathcal{T}(V)$, et $V^{\Delta} = E/\Delta(n, C)$. V^{Δ} est un fibré analytique complexe sur V, de fibre $F(n) = GL(n, C)/\Delta(n, C)$ (variété "drapeau"). On démontre que V^{Δ} est une Δ-variété (voir [3], paragraphes 13-2 et 13-4). Nous verrons dans le paragraphe suivant que si V est algébrique, V^{Δ} est aussi algébrique, et que ces deux variétés ont même χ_y-caractéristique. Ces résultats nous amènent donc à étudier systématiquement les propriétés de la χ_y-caractéristique des Δ-variétés.

PROPRIÉTÉS. - Si V_n (= V) est une Δ-variété, on peut restreindre à $\Delta(n, C)$ le groupe structural de $\mathcal{T}(V)$, et par conséquent il existe n fibrés diagonaux analytiques complexes $A_1, \dots, A_n$ (cf. [6]). Le groupe structural du fibré analytique complexe $T^{(p)}$ des p-formes analytiques sur V peut alors être restreint au groupe $\Delta(\binom{n}{p}, C)$ et les $\binom{n}{p}$ fibrés diagonaux correspondants sont

$$A_{i_1}^{-1} \otimes \dots \otimes A_{i_p}^{-1} \qquad (i_1 < \dots < i_p)$$

PROPOSITION 4. - Soit W un fibré vectoriel sur la Δ-variété V, et a_i les symboles représentants les fibrés diagonaux A_i. On a alors

$$\chi_y(V, W) = h_V(w \prod_{i=1}^{n} (1 + y\, a_i^{-1}))$$

En effet par définition $\chi^p(V, W) = \chi(V, W \otimes T^{(p)})$.

Appliquons alors la proposition 10 de [8] :

$$\chi(V, W \otimes T^{(p)}) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \chi(V, W \otimes A_{i_1}^{-1} \otimes \dots \otimes A_{i_p}^{-1})$$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_p} h_V(w\, a_{i_1}^{-1} \dots a_{i_p}^{-1}) = h_V(w \prod_{i=1}^{n} (1 + y\, a_i^{-1}))$$

PROPOSITION 5. - Avec les hypothèses et les notations de la proposition 4, on a

$$(1+y)^n \chi(V, W) = \sum_{\ell=0}^{n} y^{\ell} \sum_{i_1 < \dots < i_{\ell}} \chi_y((A_{i_1}, \dots, A_{i_{\ell}}), W)_V$$

en effet le membre de droite est égal à :

$$\sum_{\ell=0}^{n} y^\ell \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \hat{h}_V(w\, R(a_{i_1}) \ldots R(a_{i_\ell})) = \hat{h}_V\Big(\sum_{\ell=0}^{n} y^\ell \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} w\, R(a_{i_1}) \ldots R(a_{i_\ell})\Big)$$

$$= \hat{h}_V\Big(w \prod_{i=1}^{n} (1 + y\, R(a_i))\Big) = \hat{h}_V\Big(w \prod_{i=1}^{n} (1 + y)(1 + y\, a_i^{-1})^{-1}\Big)$$

$$= (1 + y)^n\, \hat{h}_V\Big(w \prod_{i=1}^{n} (1 + y\, a_i^{-1})^{-1}\Big)$$

Mais d'après la proposition 4 :

$$\hat{h}_V(w\, a_1^{\lambda_1} \ldots a_r^{\lambda_r}) = \chi_y(V, W \otimes \Lambda_1^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \Lambda_r^{\lambda_r}) = h_V\Big(w\, a_1^{\lambda_1} \ldots a_r^{\lambda_r} \prod_{i=1}^{n} (1 + y\, a_i^{-1})\Big)$$

Appliquons alors le lemme 2 avec $t = \prod_{i=1}^{n} (1 + y\, a_i^{-1})$:

$$(1+y)^n\, \hat{h}_V\Big(w \prod_{i=1}^{n}(1+ya_i^{-1})^{-1}\Big) = (1+y)^n\, h_V\Big(w \prod_{i=1}^{n} (1+ya_i^{-1})^{-1}\, (1+ya_i^{-1})\Big) = (1+y)^n\, h_V(w)$$

$$= (1+y)^n\, \chi(V, W) \quad .$$

4. Variétés algébriques.

DÉFINITIONS. - Soit V une variété kählérienne compacte (cf. [8]). On désigne par $H^{1,1}(V, \underset{\sim}{R})$ (resp. $H^{1,1}(V, \underset{\sim}{Z})$) le sous-groupe des éléments de type $(1-1)$ de $H^2(V, \underset{\sim}{R})$ (resp. $H^2(V, \underset{\sim}{Z})$).

Un élément $x \in H^{1,1}(V, \underset{\sim}{R})$ est dit positif, s'il existe une métrique kählérienne sur V, $ds^2 = 2 \sum g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha\, dz^{\beta^*}$ telle que le cocycle $w = i \sum g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$ associé admette x pour classe de cohomologie.

Un élément $x \in H^{1,1}(V, \underset{\sim}{Z})$ est dit positif si son image par l'application canonique $H^{1,1}(V, \underset{\sim}{Z}) \to H^{1,1}(V, \underset{\sim}{R})$ est positive. Une métrique kälhérienne qui induit un élément positif de $H^{1,1}(V, \underset{\sim}{Z})$ est appelée métrique de Hodge.

THÉORÈME 1 (KODAIRA). - <u>Si la variété compacte kählérienne</u> V <u>possède une métrique de Hodge, elle est algébrique.</u>

KODAIRA montre qu'une telle variété peut se plonger sans singularité dans un espace projectif de dimension assez grande. Le théorème résulte alors d'un théorème de Chow. Pour la démonstration du théorème 1 voir [1] et [4], pour la démonstration du théorème de Chow, voir [2] et [5].

Toute variété algébrique projective possède bien evidemment une métrique de Hodge : il suffit de prendre la métrique induite par la métrique de Hodge de l'espace projectif dans lequel elle est plongée. Dans toute la suite on appellera variété algébrique une variété algébrique projective.

THÉORÈME 2. - Soit E un espace fibré analytique complexe de fibre $P_r(C)$ (espace projectif à r-dimensions sur le corps des complexes) de groupe structural $PGL(r+1, C)$ (groupe projectif ...) sur une variété algébrique V. E est alors une variété algébrique.

En effet E est une variété compacte, et l'on construit une métrique de Hodge sur E à l'aide de la métrique de Hodge de V et de la métrique de Hodge canonique de $P_r(C)$.

THÉORÈME 3. - Si V est algébrique V^{Δ} est aussi algébrique.

On va montrer que plus généralement si $\varphi : E \to V$ est un fibré analytique complexe sur V algébrique de fibre $F(q)$, et de groupe $GL(q, C)$, alors E est algébrique. Démonstration par récurrence sur q : Supposons vérifiée l'assertion pour $q-1$, et soit E' un espace fibré de fibre $P_{q-1}(C)$ associé au $GL(q, C)$-fibré E. $E \to E'$ est alors un fibré de fibre $F(q-1)$, dont la base E' est algébrique d'après le théorème 2, donc E est algébrique. En particulier $F(q)$ est une variété algébrique (On prend V réduit à un point).

Nous aurons aussi à utiliser le théorème suivant (pour la démonstration, voir [3]).

THÉORÈME 4. - Pour tout fibré analytique complexe linéaire F sur une variété algébrique V, il existe deux diviseurs sans singularités S et T tels que $F = \{S\} \otimes \{T\}^{-1}$.

5. La χ_y-caractèristique virtuelle des variétés algébriques.

THÉORÈME 5. - Si V est algébrique, $\chi_y((F_1, \ldots, F_r), W)_V$ est nulle pour $r > n$, et est un polynôme en y de degré $\leq n - r$ pour $r \leq n$. En particulier $\chi_y((F_1, \ldots, F_n), W)_V$ est un nombre entier.

Démonstration par récurrence sur la dimension n de V : Si $n = 0$, V est un ensemble fini de points, donc tout fibré linéaire sur V est trivial, donc $\chi_y((F_1 , \dots , F_r) , W)_V = 0$ pour $r \geqslant 1$ d'après la proposition 1.

Supposons que le théorème est vrai pour $\dim V < n$, et soit V de dimension n . D'après le théorème 4, il existe deux diviseurs sans singularités $\{S\}$ et $\{T\}$ tels que $\{S\} = F_1 \otimes \{T\}$ mais, d'après la proposition 3 on a

$$\chi_y((\{S\} , F_2 , \dots , F_r) , W)_V = \chi_y((F_1 , F_2 , \dots , F_r) , W)_V$$

$$(4) \qquad + \chi_y((\{T\} , F_2 , \dots , F_r) , W)_V + (y - 1)\chi_y((\{T\} , F_1 , F_2 , \dots , F_r), W)_V$$

$$- y \chi_y((\{S\} , \{T\} , F_1 , F_2 \dots F_r) , W)_V$$

Or d'après la proposition 2 et l'hypothèse de récurrence, le membre de gauche et les 2e, 3e et 4e termes du membre de droite sont des polynômes de degré $\leq n - r$ et sont identiquement nuls pour $r > n$, ce qui démontre le théorème pour $\dim V = n$.

REMARQUE. - Si $r = 1$, l'égalité (4) s'écrit

$$\chi_y((\{S\}),W)_V = \chi_y((F_1),W)_V + \chi_y((\{T\}),W)_V + (y-1)\chi_y((\{T\},F_1),W)_V$$

$$- y\chi_y((\{S\}, \{T\},F_1),W)_V$$

Le premier membre est égal à $\chi_y(S , W_S)$, le deuxième terme du membre de droite à $\chi_y(T , W_T)$. Ce sont des polynômes de degré $\leq n - 1$ par définition même de la χ_y-caractéristique (non virtuelle !) et non d'après la proposition 2 dont la démonstration fait appel aux égalités $\chi_y(S , W_S) = \chi_y((\{S\}) , W)_V$.

THÉORÈME 6. - <u>Soient</u> $f_1 , \dots , f_n$ $(f_i \in H^2(V , \underset{\sim}{Z}))$ <u>les classes de cohomologie des fibrés linéaires</u> $F_1 , \dots , F_n$ (cf. [7]) <u>sur la variété algébrique</u> V , <u>et</u> W <u>un fibré analytique complexe à fibres vectorielles de dimension</u> q .

Dans ces conditions,

$$\chi_y((F_1 , \dots , F_n) , W) = \chi((F_1 , \dots , F_n) , W)$$

$$= q.f_1 f_2 \dots f_n [V_n] .$$

($f_1\ f_2 \cdots f_n$ représente le cup-produit des f_i , c'est un élément de $H^{2n}(V_n , \underset{\sim}{Z})$. $[V_n]$ représente le cycle fondamental de V_n : il est de dimension 2n . La valeur de $f_1 \cdots f_n$ sur ce cycle représenté par $f_1 \cdots f_n [V_n]$ est bien un nombre entier).

Si $\dim V = 0$, $\chi_y(V , W) = \chi(V , W) = \dim H^o(V , W) = q\, k$ (k = nombre de points de V) pour $n \geqslant 2$ la formule (4) donne :

$$\chi((\{S\} , F_2,\ldots,F_n),W)_V = \chi((F_1,F_2,\ldots,F_n),W)_V + \chi((\{T\}, F_2 \cdots F_n),W)_V$$

pour $n = 1$,

$$\chi((\{S\}) , W)_V = \chi((F_1) , W)_V + \chi((\{T\}), W)_V$$

d'après l'hypothèse de récurrence $(n \geqslant 2)$ et la proposition 2.

$$\chi((F_1 , \ldots , F_n) , W)_V = q.(f_2 \cdots f_n)_S[S] - q.(f_2 \cdots f_n)_T[T]$$

où $(f_2 \cdots f_n)_S$ désigne l'image de $f_2 \cdots f_n$ par l'homomorphisme

$$H^{2n-2}(V , \underset{\sim}{Z}) \rightarrow H^{2n-2}(S , \underset{\sim}{Z})$$

induit par l'inclusion $S \rightarrow V$ ...

Or

$$(f_2 \cdots f_n)_S [S] = c_1(\{S\}).f_2 \cdots f_n [V]$$

ou $c_1(\{S\})$ est la classe de Chern du fibré linéaire $\{S\}$ et nous avons vu que $c_1(\{S\}) - c_1(\{T\}) = f_1$ ([7]).

Donc $\chi((F_1 , \ldots , F_n) , W)_V = q.f_1 \cdots f_n [V]$.

Si $n = 1$, et si S et T on respectivement s et t points, on a

$$\chi((F_1) , W)_V = q(s - t) = q.f_1 [V] .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLANCHARD (André). - Le plongement des variétés de Hodge dans les espaces projectifs complexes, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55, n° 114.

[2] CHOW (Wei-Liang). - On compact complex analytic varieties, Amer. J. Math., t. 71, 1949, p. 893-914.

[3] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 9).

[4] KODAIRA (K.). - On kähler varieties of restricted type, I., Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 40, 1954, p. 313-316 ; II., Annals of Math., t. 60, 1954, p. 28-48.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.

[6] ZISMAN (Michel). - Espaces fibrés à fibre vectorielle, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 21.

[7] ZISMAN (Michel). - Classes de Chern, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 23.

[8] ZISMAN (Michel). - Cohomologie des variétés analytiques complexes, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 11, 1957/58, n° 21.