

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN GUÉRINDON

Sur une classe de modules gradués

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 12, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A11_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE DE MODULES GRADUÉS

par Jean GUÉRINDON

INTRODUCTION. - Il s'agira de modules gradués $E = E_0 \oplus \dots \oplus E_n \oplus \dots$ sur des anneaux gradués (noethériens) $A = A_0 \oplus \dots \oplus A_p \oplus \dots$ pour lesquels on désignera par a_n la longueur de E_n (sur A_0). Comme dans les cas usuels a_n est majoré par un polynôme en n , et comme chaque fois que l'on a $a_n \leq C\alpha^n$ (C, α constants) on a intérêt à considérer $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ qui permet d'ailleurs, dans le cas général, de représenter a_n par les valeurs d'une fonction $\varphi(z)$, (entière) pour z entier. Le cas intéressant est celui dans lequel $F(z)$ est rationnelle en z , et est alors de la forme $P(z)/(1 - z^\alpha)^{\beta+1}$.

Le théorème 3 donne une généralisation du classique résultat sur les polynômes caractéristiques, et l'étude d'une borne pour le degré du polynôme $P(z)$ conduit à prendre pour A un anneau gradué associé à un anneau de rang fini (c'est-à-dire pour lequel tout idéal a un nombre borné de générateurs). Une extension de ces notions est obtenue au moyen de la "pseudo-longueur" qui généralise la notion de longueur. Un problème (non résolu) d'invariants est posé au début de l'exposé.

1. Énoncé d'un problème d'invariants.

Soit E un module de type fini sur A , S le spectre de A , ensemble des idéaux maximaux $\{P_\tau\}$ ($\tau \in T$) de A . Si on localise pour τ fixé on posera $A_P = A_\tau$, et on désignera par P'_τ l'idéal maximum de l'anneau local A_τ , enfin par E_τ le localisé E_P . Soit alors, pour tout entier n ($n \geq 0$), a_n la dimension de l'espace vectoriel (sur $K_\tau = A_\tau/P'_\tau$)

$$E_\tau(n) = P'_\tau{}^n E_\tau / P'_\tau{}^{n+1} E_\tau \quad .$$

On posera

$$F_\tau^E(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad \text{avec } |z| < 1 \quad .$$

On voit facilement que si A est un corps ou un anneau de valuation discrète, la donnée de $F_\tau^E(z)$ détermine E à un A -isomorphisme près (pour le 2e cas il suffit, par additivité, de le constater sur $A_\tau/P'_\tau{}^\alpha$). Il serait naturel de se demander dans quelle mesure le système S des fonctions holomorphes $F_\tau^E(z)$

constitue, dans un cas assez général, un système d'invariants du A -module E . On se bornera ici à étudier des relations entre le spectre \mathcal{S} et le système S .

On sait que \mathcal{S} est un espace topologique (non séparé), les fermés étant constitués par les ensembles d'idéaux P_τ qui contiennent un idéal fixé (éventuellement trivial) de A (topologie de Zariski).

Étudions alors l'application φ de \mathcal{S} en S :

$$\varphi : P_\tau \rightarrow F_\tau^E(z)$$

en munissant S de la topologie de la convergence uniforme en tout disque $|z| \leq R$ ($0 < R < 1$).

On voit de manière immédiate que φ est continue dans les cas suivants :

- A est intègre, régulier et de dimension 1, et $E = A$.
- A est principal (donc intègre par définition), et E est de type fini quelconque. On peut supposer E monogène. Si $E = A$, on applique ce qui précède. Si $E = A/I$ ($I \neq (0)$), on se ramène à une topologie discrète sur \mathcal{S} .
- E est de longueur finie sur A .

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Si A est un anneau intègre de rang fini ρ , et E un module de type fini donné sur A , alors les fonctions de \mathcal{S} sont uniformément majorées, en tout disque $|z| < R$, par une fonction holomorphe à coefficients entiers, $G(z)$, rationnelle en z .

La notion de rang est prise au sens de COHEN : A est de rang ρ si tout idéal possède un système d'au plus ρ générateurs (il est de rang $\rho + 1$, $\rho + 2$ aussi ; il y a un rang minimum).

Le théorème 1 résulte alors du fait que pour tout M_τ l'anneau A_{M_τ} est de rang fini ρ . Si k est le nombre de générateurs de E , a_n est majoré par $k \binom{n + \rho - 1}{\rho - 1}$ d'où le théorème.

En plus du problème d'invariants précédent la question se pose d'étudier dans quelles conditions générales l'application φ est continue, et quel est le comportement du foncteur $A \rightarrow S$.

2. Notion de pseudo-longueur.

Soit A un anneau noethérien q -adique, q étant un idéal quasi-maximal de A (c'est-à-dire A/q est artinien). Le A -module de longueur finie $q^n E/q^{n+1} E$ est engendré sur A/q par moins de $\binom{n+k-1}{k-1}$ générateurs si E a un système de k générateurs sur A . On a, en posant $\ell g(A/q) = L$

$$\ell g(q^n E/q^{n+1} E) \leq L \binom{n+k-1}{k-1} .$$

Alors $\sum_{n \geq 0} \ell g(q^n E/q^{n+1} E) z^n$ représente dans le disque $|z| < 1$ une fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{\pi(z)}{(1-z)^d} .$$

Cela résulte soit des théorèmes sur les polynômes caractéristiques ou encore du théorème 3 (voir §3) appliqué au $\sum (q^n/q^{n+1})$ module $\sum_n (q^n E/q^{n+1} E)$.

On posera alors

$$R(z) = \frac{\psi_q(E)}{(1-z)^{d+1}} + \dots + \varphi_q(E) + \alpha_1(1-z) + \dots + \alpha_h(1-z)^h$$

avec $d \geq -1$ ($d = -1$ pour le module nul).

Lorsque E est de longueur finie $\lambda(E)$, on a $0 \leq \ell g(E/q^n E) \leq \lambda(E)$ pour tout n , et donc $0 \leq \varphi_q(E) \leq \lambda(E)$. Si on a $d \geq 0$, on a $\psi_q(E) = e$ multiplicité de E , puisque pour n grand, on a

$$\ell g(q^n E/q^{n+1} E) = \frac{e}{d!} n^d + \dots + a_0$$

et que

$$\sum_{n \geq 0} n^d z^n \sim \frac{d!}{(1-z)^{d+1}}$$

comme infiniment grand pour $z \rightarrow 1$ (avec $|z| < 1$).

THÉORÈME 2. - Si A et q sont donnés, on a l'égalité $\varphi_q(E) = \lambda(E)$ pour tout A -module E de longueur finie $\lambda(E)$, si et seulement si A est semi-local et q idéal de définition de A .

Si on a l'égalité pour tout module E de longueur finie, on a $\lambda \geq \ell g(E/q^n E)$

pour tout n , et donc il existe un entier n_0 tel que $q^{n_0} E = q^{n_0+1} E$, et l'on a, en prenant dans la série correspondante ici réduite à un polynôme,

$$\varphi_q(E) = \lg(E/q^{n_0} E) \quad .$$

Or $\bigcap_{n \geq 0} q^n E$ est l'ensemble E' des $x \in E$ dont les annulateurs $\text{Ann } x$ coupent chacun $1 + q$. E' est aussi l'ensemble des y de E tels que les diviseurs maximaux de q et de $\text{Ann } y$ soient différents. On aura $\lambda = \varphi_q(E)$ si et seulement si $E' = 0$, donc si $q \subseteq \rho(A)$, radical de Jacobson de A . A est alors semi-local, car A/q est artinien, donc aussi $A/\rho(A)$, et on aura $q \supseteq [\rho(A)]^h$ pour un entier h : q est idéal de définition.

Pour voir la réciproque, il suffit de voir que, si on avait $q \not\subseteq M$, M étant un idéal maximal de A , le A -module $E = A/M$ serait tel que $\varphi_q(E) = 0$ et non 1 . On posera alors la définition suivante :

DÉFINITION. - Si E est un A -module de type fini sur un anneau semi-local, on appellera longueur de E le nombre $\varphi_q(E)$, q étant le radical de Jacobson de E .

Par exemple si $E = A$, A étant un anneau de valuation discrète, on a $F(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$; on a $\varphi(E) = 0$.

Appelant "isotrope", un A -module de longueur nulle, et non réduit à zéro, on a la conjecture suivante :

CONJECTURE. - Pour tout anneau local A , de dimension 1, il existe un A -module isotrope.

Remarquons enfin qu'un anneau local, intègre et complet est le quotient d'un module isotrope. En effet A est un module de type fini sur un anneau A_0 de valuation discrète (d'après I. S. COHEN). On en déduit que A est un quotient d'une somme directe (finie) de copies de A_0 .

Une inégalité. - Si L désigne la longueur de A/q (en tant que A -module) et k le nombre de générateurs de q , k' le nombre de générateurs de E sur A , alors le A/q module $q^n E/q^{n+1} E$ possède un système de $k' \binom{n+k-1}{k-1}$ générateurs. Il existe en effet $\binom{n+k-1}{k-1}$ monômes distincts de degré n formés avec k lettres indéterminées X_1, \dots, X_k , d'où le résultat. On a donc

$$0 \leq a_n \leq k' L \binom{n+k-1}{k-1}, \text{ en posant } a_n = \lg(q^n E / q^{n+1} E) \quad .$$

On a alors

$$f = \sum a_n z^n = \frac{P(z)}{(1-z)^{d+1}}$$

avec

$$P(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_r z^r \quad .$$

On obtient $\varphi_q(E)$ en posant $z = 1 - t$ en prenant le coefficient de t^{d+1} en $P(1-t)$ d'où :

$$(1) \quad \varphi_q(E) = (-1)^{d+1} [b_{d+1} + \binom{d+2}{1} b_{d+2} + \dots + \binom{d+r}{r-1} b_r]$$

et on a $\varphi_q(E) = 0$ si $d \geq r$. Comme

$$b_\ell = \frac{1}{\ell!} \left\{ \frac{d\ell}{dz^\ell} [f(1-z)^{d+1}] \right\} \text{ pour } z = 0$$

on a

$$(2) \quad b_\ell = a_\ell - \binom{d+1}{1} a_{\ell-1} + \binom{d+1}{2} a_{\ell-2} + \dots \text{ avec } \ell \geq 0 \quad ,$$

le dernier terme étant d'ailleurs $(-1)^d \binom{d+1}{d+1} a_{\ell-d}$ si $\ell \geq d$. On a

$b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = 0$ et on a

$$(3) \quad (-1)^{d+1} \varphi_q(E) = \binom{d+1}{0} \left[\binom{d+1}{0} a_{d+1} - \binom{d+1}{1} a_d + \dots \right] + \dots \\ + \binom{d+r}{r-1} \left[\binom{d+1}{0} a_r - \binom{d+1}{1} a_{r-1} + \dots \right] \quad .$$

On a donc

$$(4) \quad |\varphi_q(E)| \leq Lk' e_{r,k}$$

avec

$$e_{r,k} = \binom{r+1}{0} \left[\binom{r+1}{0} \binom{r+k}{k-1} + \binom{r+1}{1} \binom{r+k-1}{k-1} + \dots \right] + \dots \\ + \binom{2r}{r-1} \left[\binom{r+1}{0} \binom{r+k-1}{k-1} + \binom{r+1}{1} \binom{r+k-2}{k-1} + \dots \right] \quad .$$

Pour k fixé, $e_{r,k}$ est une fonction croissante de r , et pour r fixé, $e_{r,k}$ est un polynôme en k de degré $r+1$, de coefficient dominant

$$\frac{k^{r+1}}{(r+1)!} \quad .$$

3. Fonctions associées à certains modules gradués.

On peut traduire, (et généraliser) les notions de postulation de Hilbert au moyen du théorème suivant qui fait intervenir les dimensions de E_n dès le début. Le procédé de la suite exacte utilisé est en substance le même que celui donné par SERRE (FAC) (*).

THÉORÈME 3. - Soit $F = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots$ un B -module gradué de type fini, B étant noethérien, gradué : $B = B_0 \oplus B_1 \oplus \dots$, l'anneau B_0 étant artinien et les générateurs de B sur B_0 étant de degrés respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$. On a alors

$$\sum_{n \geq 0} \ell_{B_0} (E_n) z^n = \frac{P(z)}{(1-z^{\alpha_1}) \dots (1-z^{\alpha_\rho})} \quad ,$$

$P(z)$ étant un polynôme à coefficients entiers.

On pose, pour tout B_0 -module de type fini G , $\varphi(G) = \ell_{B_0}(G)$, et on raisonne par récurrence sur ρ . La proposition est vraie pour $\rho = 0$, car, h désignant le degré maximum des générateurs de E sur A , on a $E = (E_0 \oplus \dots \oplus E_h) B_0$. Alors B étant noethérien, on a $B = B_0[x_1, \dots, x_\rho]$ avec $\deg x_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, \rho$). Soit alors u l'endomorphisme (de modules gradués) résultant de la multiplication par x_ρ . On a la suite exacte de B -modules gradués :

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \xrightarrow{u} E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

d'où, pour chaque n ($n = 0, 1, 2, \dots$) la suite exacte de B_0 -modules :

(*) SERRE (J.-P.). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

$$0 \rightarrow N_n \rightarrow E_n \xrightarrow{u_n} E_{n+\alpha_\rho} \rightarrow Q_{n+\alpha_\rho} \rightarrow 0$$

u_n étant la composante de degré n de u et

$$N_n = u_n^{-1}(0), \quad Q_{n+\alpha_\rho} = E_{n+\alpha_\rho} / u_n(E_n)$$

et $u_n(E_n) = E_n / N_n$. Si le théorème est vrai jusqu'à l'entier $\rho - 1$ ($\rho \geq 1$) il s'applique à Q et N qui sont des $B_0[x_1, \dots, x_{p-1}]$ -modules gradués. On a, pour tout n ,

$$(\varepsilon_n) \quad \varphi(E_{n+\alpha_\rho}) - \varphi(E_n) = \varphi(Q_{n+\alpha_\rho}) - \varphi(N_n) \quad .$$

Si on multiplie les deux membres de (ε_n) par $z^{n+\alpha_\rho}$, et si on pose

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \varphi(E_n) z^n$$

on a

$$F(z) - [\varphi(E_0) + \dots + z^{\alpha_{\rho-1}} \varphi(E_{\alpha_{\rho-1}})] - z^\alpha F(z) = \dots$$

$$= - [\varphi(Q_0) + \dots + z^{\alpha_{\rho-1}} \varphi(Q_{\alpha_{\rho-1}})] + \sum_{n \geq 0} z^n \varphi(Q_n) - \sum_{n \geq 0} z^n \varphi(N_n) \quad .$$

Comme, par hypothèse, les produits $(1 - z^{\alpha_1}) \dots (1 - z^{\alpha_{\rho-1}}) \sum_{n \geq 0} \varphi(Q_n) z^n$ et

$(1 - z^{\alpha_1}) \dots (1 - z^{\alpha_{\rho-1}}) \sum_{n \geq 0} \varphi(N_n) z^n$ sont des polynômes en z , à coefficients entiers, on a la proposition pour l'entier ρ .

4. Modules et anneaux rationnels.

Les modules gradués utilisés dans la 3e partie peuvent se généraliser comme suit. Soit A un anneau noethérien gradué $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$, A_0 étant de rang fini (au sens donné dans ce qui précède), et soit $E = E_0 \oplus \dots \oplus E_n \oplus \dots$ un A -module gradué de type fini sur A . Si q est un idéal de A_0 , tel que A_0/q soit artinien, désignons par a_n le nombre entier $\varphi_q(E_n)$ et soit $F(z)$ la série $\sum_n a_n z^n$ ($|z| < 1$).

DÉFINITION. - On dira que E est rationnel, relativement à q si $F(z)$ est une fraction rationnelle.

Alors $F(z)$ est de la forme $\frac{P(z)}{(1-z^\alpha)^{\beta+1}}$.

On dira que A est rationnel si on peut en plus prendre $E = A$.

EXEMPLES.

1° A_0 est artinien, E quelconque, $q = (0)$ d'après le théorème 3.

2° $E_n = 0$ pour n grand.

3° $A = A_0 \oplus q \oplus q^2 \oplus \dots \oplus q^h \oplus \dots$. Alors E étant de type fini sur A , on a, pour n grand ($n \geq N$) : $E_{n+1} = qE_n$ suivant un résultat classique (démonstration du théorème d'Artin-Rees d'après CARTIER et J. P. SERRE). Donc, en posant

$$F_p(z) = \sum_{n \geq 0} \lg(q^n E_p / q^{n+1} E_p) z^n,$$

on a, pour $p \geq N$

$$F_{p+1}(z) = \sum_{n \geq 0} \lg(q^n E_{p+1} / q^{n+1} E_{p+1}) z^n$$

et donc, pour $p \geq N$:

$$F_p(z) = \lg(E_p / q E_p) + z F_{p+1}(z).$$

Or, pour un ℓ entier on a, avec $p \geq N'$:

$$\lg(E_p / E_{p+1}) = \lg(q^{p-\ell} E_\ell / q^{p-\ell+1} E_\ell)$$

l'expression étant alors un polynôme en p , noté $\mu(p)$. On a

$$F_p(z) = \mu(p) + z F_{p+1}(z).$$

On a, $\Phi_p(z)$ étant une série entière en $(z-1)$:

$$F_{p+1}(z) = \left[\frac{\Delta_h(p)}{(z-1)^h} + \dots + \frac{\Delta_1(p)}{z-1} \right] + \varphi_q(E_{p+1}) + (z-1) \Phi_p(z)$$

et h dépendant de p . On a

$$F_p(z) = \varphi_q(E_{p+1}) + \mu(p) + \left[\frac{z A_h^{(p)}}{(z-1)^h} + \dots + \frac{z A_1^{(p)}}{z-1} \right] + (z-1) \psi_p(z)$$

avec $\psi_p(z)$ série entière en $(z-1)$. Alors

$$\varphi_q(E_p) = \varphi_q(E_{p+1}) + \mu(p) + v(p) \quad ;$$

en désignant par $v(p)$ le résidu de $F_{p+1}(z)$ (ici c'est $A_1^{(p)}$). Or, en posant $H_0(z) = F_0(z)$, ..., $H_p(z) = z H_{p+1}(z)$ et $z = 1 + t$, on a

$$H_0(z) = \frac{B_0}{t^0} + \dots + \frac{B_1}{t} + \dots, \text{ résidu } H_p(z) = B_1 - pB_2 + \frac{p(p+1)}{2} B_3 - \dots$$

et donc v_p est un polynôme en p . Finalement $\sum_p \varphi_q(E_p) z^p$ est rationnel en z .

Grandeurs géométriques - Dimension et multiplicité. - Lorsque la fonction génératrice utilisée dans ce qui précède est une fraction rationnelle, on a

$$F(z) = \frac{P(z)}{(1-z)^\alpha}^\beta. \text{ On désignera par } e \text{ la multiplicité (coefficient de } \frac{1}{(1-z)^\beta}$$

dans le développement de Laurent de F au voisinage de $z=1$). On appellera β la dimension (on la retrouve facilement dans les cas classiques) et α la polarité (qui vaut 1 dans le cas classique).

Lorsque l'on est dans le cas d'application du théorème 5, on a

$$\varphi_q(E_n) \leq \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_s n^s$$

pour $n \geq 0$ puisque k est déterminé. Soit $M(R)$ le maximum du module de la fonction $\sum_{n \geq 0} \varphi_q(E_n) z^n$ pour $|z| \leq R$ ($0 < R < 1$). Il existera un entier $d \geq 0$ tel que $(1-R)^d M(R)$ soit borné pour $R \rightarrow 1$, $(1-R)^{d-1} M(R)$ ne l'étant pas. On appellera d dimension de E . Lorsque E est rationnel sur A (cas classique), on retrouve alors la dimension ordinaire. La multiplicité peut se définir comme le plus petit entier $e > 0$ tel que $\overline{\lim} (1-R)^d M(R) \leq e$ pour $R \rightarrow 1$. Lorsque $\alpha = 1$, β s'interprète facilement au moyen de la dimension (au sens des chaînes d'idéaux premiers).