

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARTHE GRANDET

Dérivés d'un ensemble d'entiers algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 15,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A14_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉRIVÉS D'UN ENSEMBLE D'ENTRIERS ALGÈBRIQUES

par Mme Marthe GRANDET

Soit S l'ensemble des entiers algébriques θ , de valeur absolue supérieure à 1, n'ayant qu'un conjugué extérieur au cercle unité, tous les autres étant intérieurs à ce cercle. Cet ensemble est fermé [1], [5]. Nous allons étudier quelques propriétés des éléments de S' et S'' , respectivement ensemble dérivé et ensemble dérivé second de S , propriétés qui permettent d'en trouver les plus petits éléments.

A tout nombre $\theta \in S$, on peut associer au moins une fraction rationnelle irréductible $A(z)/Q(z)$ possédant les propriétés suivantes :

- 1° Elle a le seul pôle $1/\theta$ à l'intérieur du cercle unité.
- 2° Son développement en série entière au voisinage de l'origine est à coefficients entiers rationnels.
- 3° Elle est bornée par 1 en module sur le cercle unité (qu'il y ait ou non identité).

Si l'on considère une suite de nombres $\theta_k \in S$, tendant vers une limite θ , à chaque nombre θ_k on peut associer au moins une fraction rationnelle $A_k(z)/Q_k(z)$ du type précédent ; ces fractions forment une famille normale de fonctions méromorphes dans $|z| < 1$. De la suite $A_k(z)/Q_k(z)$, nous pouvons extraire une suite partielle convergente dans $|z| < 1$, la limite de cette suite est alors une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ possédant les propriétés suivantes [1] :

- 1° Elle admet le seul pôle $1/\theta$ à l'intérieur du cercle unité.
- 2° Son développement en série entière au voisinage de l'origine est à coefficients entiers rationnels.
- 3° $|A(z)| \leq |Q(z)|$ pour $|z| = 1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Nous verrons plus loin que l'existence d'une telle fraction rationnelle associée à θ caractérise les nombres $\theta \in S'$.

Auparavant nous allons associer aux fonctions $A(z)/Q(z) = f(z)$ des fractions rationnelles qui nous permettront d'écrire certaines inégalités sur les coefficients de leur développement en série entière. Nous distinguerons le cas B, où $|A(z)| \equiv |Q(z)|$ pour $|z| = 1$, et le cas A, où cette identité n'est pas réalisée; dans le cas B, $A(z)$ et $Q(z)$ sont deux polynômes réciproques l'un de l'autre.

THÉOREME 1. [2]. - Pour $1 \leq n \leq s$ si $|f(0)| \neq 1$ et $2 \leq n \leq s$ si $|f(0)| = 1$, il existe deux polynômes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ et deux polynômes $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$ de degré n tels que :

$$D_n(z) \equiv -z^n E_n(1/z)$$

$$D_n^*(z) \equiv z^n E_n^*(1/z)$$

et :

$$f(z) - \frac{D_n(z)}{E_n(z)} = (V_n - W_n) z^n + \dots$$

$$f(z) - \frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} = (V_n - W_n^*) z^n + \dots \quad \text{si} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n \quad .$$

les fractions $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ et $\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)}$ sont irréductibles.

s est infini dans le cas A, et est le degré commun de $A(z)$ et $Q(z)$ dans le cas B. Ces polynômes sont uniques.

De plus $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ ont un seul zéro τ_n et τ_n^* extérieur au cercle unité, et l'on a les inégalités suivantes.

$$W_n \leq V_n \leq W_n^*$$

$$\tau_n \leq \theta \leq \tau_n^*$$

la suite $W_n^* - W_n$ est décroissante et la série de terme général : $(W_n - \frac{W_n + W_n^*}{2})^2$ converge.

Ces polynômes vérifient un certain nombre de relations de récurrence qui permettent de les obtenir simplement en connaissant les coefficients de développement de $f(z)$.

THÉOREME 2.[3]. - Si $f(z)$ est une fraction rationnelle du type A, alors on a l'inégalité :

$$W_n + 1 \leq V_n \leq W_n^* - 1$$

pour $n \geq 2$ si $a \neq s$, et $n \geq \max(r + 1, 2)$ si $a = s$, a et s étant les degrés respectifs de $A(z)$ et $Q(z)$. Et le nombre θ qui lui est associé appartient à S' .

Posons :

$$P(z) \equiv \varepsilon_1 z^s Q(1/z)$$

$$B(z) \equiv \varepsilon_1 z^a A(1/z)$$

où $\varepsilon_1 = \pm 1$ est choisi tel que $P(0) > 0$.

Considérons les polynômes

$$P_k(z) \equiv A(z) + \varepsilon z^{k+a-s} P(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z) + \varepsilon z^k B(z) \quad \text{où } k \geq 1 \text{ et } k + a - s \geq 1$$

le théorème de Rouché montre que $Q_k(z)$ a au plus un zéro intérieur au cercle unité. Nous allons voir qu'il en a effectivement un, et que $\frac{P_k(z)}{Q_k(z)}$ est une fraction rationnelle du type B.

Considérons les développements

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{P_k(z)}{Q_k(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n} z^n$$

ces développements sont à coefficients entiers rationnels. Et l'on a :

$$\frac{P_k(z)}{Q_k(z)} \equiv \frac{A(z)}{Q(z)} + \varepsilon z^K \frac{\phi(z)}{Q(z) Q_k(z)}$$

où

a. Si $a > s$, $K = k \geq 1$

$$\Phi(z) \equiv z^{a-s} P(z) Q(z) - A(z) B(z) \quad .$$

b. Si $a < s$, $K = k + a - s \geq 1$

$$\Phi(z) \equiv P(z) Q(z) - z^{s-a} A(z) B(z) \quad .$$

c. Si $a = s$, $K = k + r \geq 1 + r$

$$\Phi(z) \equiv z^{-r} [P(z) Q(z) - A(z) B(z)]$$

r étant tel que $\Phi(0) \neq 0$.

On a donc

$$u_{k,n} = V_n \quad \text{pour } n < K$$

$$u_{k,K} = V_K + \varepsilon \Phi(0) \quad .$$

De plus, la fraction rationnelle $\frac{P_k(z)}{Q_k(z)}$ ne peut être holomorphe en vertu du principe de module maximum puisque :

$$\left| \frac{P_k(0)}{Q_k(0)} \right| = |V_0| \geq 1$$

elle admet donc un pôle $1/\theta_k$ à l'intérieur du cercle unité, c'est une fraction rationnelle du type B.

D'autre part on a :

$$W_K \leq u_{k,K} \leq W_K^*$$

et comme $|V_K - u_{k,K}| = |\Phi(0)| \geq 1$ il en résulte que :

$$W_K + 1 \leq V_K \leq W_K^* - 1$$

d'où le théorème annoncé.

θ , limite des θ_k , est donc un nombre de S' .

Nous allons voir qu'il existe un théorème analogue, relatif à certaines fractions rationnelles associées à des nombres $\theta \in S''$.

THÉOREME 3 [4]. - A tout nombre $\theta \in S''$ on peut associer une fraction rationnelle du type A, telle que :

$$W_{n+2} \leq V_n \leq W_n^* - 2$$

pour $n \geq 2$ si $a \neq s$, et $n \geq \max(2, 1 + r')$ si $a = s$, où r ne dépend que de $A(z)/\theta(z)$ et peut facilement être calculé dans chaque cas.

Puisque la suite $W_n^* - W_n$ est décroissante, ceci entraîne que $W_n^* - W_n \geq 4$ pour tout $n \geq 2$.

Soit un nombre $\theta \in S''$, il peut être défini comme limite d'une suite de nombres $\theta_k \in S'$; à chaque nombre de cette suite on peut associer au moins une fraction rationnelle $A_k(z)/Q_k(z)$ de type A; de cette suite on peut extraire une sous-suite tendant vers une fraction rationnelle $A(z)/Q(z)$ de type A, qui peut être associée à θ , une telle fraction sera dite de type A'. Nous noterons encore $A_k(z)/Q_k(z)$ les fractions de la sous-suite convergente. Nous allons construire deux suites de fonctions de type A, jouant le même rôle que les fonctions $P_k(z)/Q_k(z)$ dans la démonstration du théorème précédent.

Auparavant nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME. - Soient $F_k(z)$ une fonction rationnelle de type A ou B, et $A(z)/Q(z)$ une fraction rationnelle de type A. Si $F_k(z) - \frac{A(z)}{Q(z)} = z^k(\dots)$, alors il existe deux polynômes $U_k(z)$ et $V_k(z)$ à coefficients rationnels, avec :

$$|U_k(z)| \leq |V_k(z)| \quad \text{sur } |z| = 1$$

l'égalité étant toujours vérifiée si $F_k(z)$ est de type B, et tels que :

$$F_k(z) = \frac{A(z) U_k(z) + z^{k+a-s} P(z) V_k(z)}{Q(z) U_k(z) + z^k B(z) V_k(z)}$$

de plus le nombre de pôles intérieurs au cercle unité de $V_k(z) | V_k(z)$ est borné par une constante qui ne dépend que de $A(z)/Q(z)$.

La fraction ainsi obtenue n'est pas nécessairement irréductible.

On peut toujours poser :

$$\frac{A_k(z)}{Q_k(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} \equiv z^K \frac{\Phi(z) V_k(z)}{Q(z) Q_k(z)}$$

$\Phi(z)$ étant le polynôme défini plus haut et $V_k(z)$ étant un polynôme à coefficients rationnels avec $V_k(0) \neq 0$ d'où :

$$A_k(z) Q(z) - A(z) Q_k(z) \equiv z^K \Phi(z) V_k(z)$$

$A(z)$ et $Q(z)$ étant premiers entre eux, il existe $R(z)$ et $T(z)$ à coefficients rationnels tels que :

$$Q(z) R(z) - A(z) T(z) \equiv 1 \quad \bullet$$

D'où :

$$Q(z) [A_k(z) - z^K \Phi(z) V_k(z) R(z)] - A(z) [Q_k(z) - z^K \Phi(z) V_k(z) T(z)] \equiv 0$$

et :

$$A_k(z) \equiv A(z) U_k'(z) + z^K \Phi(z) V_k(z) R(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z) U_k'(z) + z^K \Phi(z) V_k(z) T(z) \quad \bullet$$

$U_k'(z)$ étant un polynôme à coefficients rationnels.

En explicitant $\Phi(z)$, on obtient dans les trois cas possibles ($a > s$, $a < s$, $a = s$)

$$(I) \quad A_k(z) \equiv A(z) U_k(z) + z^{k+a-s} P(z) V_k(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z) U_k(z) + z^k B(z) V_k(z)$$

toutefois si $a = s$, ces formules ne sont valables que si $K \geq r$, et dans tous les cas, k et K se correspondent comme plus haut. $U_k(z)$ est un polynôme à coefficients rationnels.

A partir des identités (I), on voit facilement que

$$|V_k(z)| \leq |U_k(z)| \quad \text{pour } |z| = 1$$

cette inégalité devenant une égalité si $F_k(z)$ est de type B .

On remarque que, sous cette forme, la fraction obtenue n'est pas nécessairement irréductible, il peut y avoir simplification par un diviseur de $\Phi(z)$; d'où l'on déduit, par application du théorème de Rouché, la dernière partie de la proposition.

Les fractions $A_k(z)/Q_k(z)$, considérées plus haut, peuvent se mettre sous cette forme. Posons :

$$B_k(z) \equiv \varepsilon_1 z^{a_k} A_k(1/z)$$

$$P_k(z) \equiv \varepsilon_1 z^{s_k} Q_k(1/z)$$

a_k et s_k étant les degrés respectifs de $A_k(z)$ et $Q_k(z)$, les fractions $B_k(z)/Q_k(z)$ et $P_k(z)/Q_k(z)$ forment des suites dont on peut extraire des sous-suites convergeant respectivement vers $B'(z)/Q(z)$ et $A''(z)/Q(z)$, la première de ces fonctions étant de type A' et la seconde de type A . Pour ne pas alourdir les notations, nous noterons encore par k les indices pour lesquels les trois suites considérées convergent. On peut alors écrire :

$$B_k(z) \equiv B'(z) U_k'(z) + z^{k'+a'-s'} P(z) V_k'(z)$$

$$A_k(z) \equiv A(z) U_k(z) + z^{k+a-s} P(z) V_k(z)$$

$$P_k(z) \equiv A''(z) U_k''(z) + z^{k''+a''-s} P(z) V_k''(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z) U_k(z) + z^k B(z) V_k(z)$$

$$\equiv Q(z) U_k'(z) + z^{k'} A'(z) V_k'(z)$$

$$\equiv Q(z) U_k''(z) + z^{k''} B''(z) V_k''(z)$$

les polynômes $U_k(z)$ et $V_k(z)$, $U_k'(z)$ et $V_k'(z)$; $U_k''(z)$ et $V_k''(z)$ n'étant pas nécessairement premiers entre eux.

Formons maintenant les polynômes :

$$P_{nk}(z) \equiv A_k(z) + \varepsilon z^{n+a_k-s_k} P_k(z)$$

$$Q_{nk}(z) \equiv Q_k(z) + \varepsilon z^n B_k(z)$$

la fraction $P_{nk}(z)/Q_{nk}(z)$ est de type B, et est associée à un nombre $\theta_{nk} \in S$, si l'on fait tendre k vers l'infini, k étant fixé, elle tend vers une fraction $A_n(z)/Q_n(z)$ de type A, associée à un nombre $\theta_n \in S$, et quand n tend vers l'infini, la suite des fractions $A_n(z)/Q_n(z)$ tend vers $A(z)/Q(z)$. Nous allons voir, en étudiant la forme des fractions $A_n(z)/Q_n(z)$ que nous avons bien construit les deux suites cherchées.

Distinguons les différents cas possibles :

a. $a_k - s_k$ est borné. - Dans ce cas, nous pouvons supposer $a_k - s_k = \delta$, entier positif, négatif ou nul.

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A(z) + z^{n+\delta} A''(z)}{Q(z) + \varepsilon z^n B'(z)}$$

donc :

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} = \varepsilon z^N \frac{\Phi_1(z)}{Q(z) Q_n(z)}$$

où

$$1^\circ \text{ si } \delta > 0, \quad \Phi_1(z) \equiv z^\delta Q(z) A''(z) - A(z) B'(z)$$

$$N = n \geq 1 \quad .$$

$$2^\circ \text{ Si } \delta < 0 \quad \Phi_1(z) \equiv Q(z) A''(z) - z^{-\delta} A(z) B'(z)$$

$$N = n + \delta \geq 1 \quad .$$

$$3^\circ \text{ Si } \delta = 0 \quad \Phi_1(z) \equiv z^{-r_1} [Q(z) A''(z) - A(z) B'(z)]$$

$$N = n + r_1 \geq r_1 + 1$$

r_1 étant choisi tel que $\Phi_1(0) \neq 0$.

Dans ce dernier cas, si $a'' = a'$ et $a = s$, posons :

$$\Phi_2(z) \equiv [A(z) B''(z) - A'(z) Q(z)] z^{-r_2}$$

avec $\Phi_2(0) \neq 0$, et soit $r' = \max(r_1, r_2)$.

Si l'on n'a pas deux égalités, on peut recommencer l'opération avec la suite $A_n(z)/Q_n(z)$, pour laquelle $\delta' = a'' - a' = 0$; dans ce cas, on peut convenir de prendre $r' = 0$.

On a donc bien le résultat annoncé

b. $\underline{a_k - s_k \rightarrow +\infty}$

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A(z)}{Q(z) + \varepsilon z^n B'(z)}$$

et l'on a l'inégalité voulue pour $n \geq 2$.

c. $\underline{a_k - s_k \rightarrow -\infty}$

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A(z) + \varepsilon z^n A''(z)}{Q(z)}$$

et l'inégalité a encore lieu pour $n \geq 2$.

Application à la recherche des plus petits éléments des ensembles S' et S'' .

A partir du théorème 2, DUFRESNOY et PISOT [3] ont obtenu les nombres de S' qui sont inférieurs à $1, 8$ en utilisant les inégalités sur les coefficients que permettent d'écrire les relations de récurrence vérifiées par les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$, et en remarquant que si, à partir d'un certain rang, on a

$$W_n^* - W_n < 3$$

il ne peut y avoir qu'une seule fraction de type A correspondant au développement considéré. Ils ont ainsi démontré que :

Les seules fractions de type A relatives à des nombres $\theta \in S'$ inférieurs à $1, 8$ sont :

$$\frac{1-z^2}{1-z-z^2} \text{ et } \frac{1}{1-z-z^2}; \quad \frac{1-z+z^2-z^3}{1-2z+z^2-z^3} \text{ et } \frac{1-z+z^2}{1-2z+z^2-z^3} .$$

Mais cette méthode n'a pas permis d'obtenir tous les nombres de S' inférieurs à 2 ; par contre une méthode analogue basée sur le théorème 3 permet de montrer qu'il n'y a pas de nombre de S'' inférieur à 2 . Or il est facile de voir que

les fractions $\frac{1+z+\dots+z^{n-2}}{1-z-\dots-z^{n-1}}$ sont de type A , et correspondent à une suite

de nombres $\theta_n \in S'$ et tendant vers 2 , d'où l'on déduit que 2 est le plus petit nombre de S'' .

Pour calculer des coefficients des développements des fractions cherchées on utilise les relations suivantes :

$$(1) \quad D_{n+2}(z) \equiv (1+z) D_{n+1}(z) - z \frac{V_{n+1} - W_{n+1}}{V_n - W_n} D_n(z) \text{ pour } n \geq 1$$

$$(2) \quad W_{n+1}^* - W_{n+1} = 2 \frac{D_{n+1}(1)}{D_n(1)} (V_n - W_n) \text{ pour } n \geq 1$$

$$(3) \quad W_{n+1}^* - W_{n+1} = \frac{4(W_n^* - V_n)(V_n - W_n)}{W_n^* - W_n} \text{ pour } n \geq 3 .$$

De plus il faut $\tau_2 < 2$, d'où

$$(4) \quad V_{n+1} - W_{n+1} < \frac{3}{2} \frac{D_{n+1}(2)}{D_n(2)} (V_n - W_n) \text{ pour } n \geq 1 .$$

D'autre part pour que $A(z)/Q(z)$ soit de type A' , il faut : $W_n^* - W_n \geq 4$ pour $n \geq 2$, il n'y aura qu'une fraction de ce type correspondant au développement considéré, et, à partir d'un certain rang : $W_n^* - W_n < 5$.

Principe de déroulement des calculs.

$$D_1(z) \equiv V_0 - z$$

$$D_1(2) = V_0 - 2 < 0 \text{ il faut donc } V_0 = 1 .$$

On a alors :

$$D_2(z) \equiv 1 + \frac{V_1}{2} z - z^2 \text{ et } W_1 = 0$$

$\tau_2 < 2$, donc $0 < V_1 < 3$, donc $V_1 = 1$ où $V_1 = 2$.

Si $V_1 = 2$, on a

$$D_2(z) \equiv 1 + z - z^2 \quad \text{et} \quad W_2 = 2 \quad .$$

D'après (4), il faut $V_2 - W_2 < 3$, les valeurs possibles pour V_2 sont donc 3 et 4 . On voit facilement que si $V_2 = 3$, on ne peut pas obtenir de nombre de S'' correspondant au développement considéré ; il faut donc prendre $V_2 = 4$, d'où

$$D_z(z) \equiv 1 + z + z^2 - z^3$$

et

$$W_3 = 6 \quad \text{et} \quad W_3^* - W_3 = 8$$

pour que

$$W_4^* - W_4 \geq 4 \quad \text{et} \quad \tau_2 \leq 2$$

il faut que

$$V_3 = 8 \quad .$$

On obtient donc le développement $(1, 2, 4, 8, \dots)$ et l'on voit assez facilement que la fraction $\frac{1}{1-2z}$ est la seule fraction ayant ce développement et correspondant à un nombre de S'' . En effet, on peut calculer les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ correspondant à cette fraction ainsi que les coefficients W_n et W_n^* . On trouve que :

$$W_n = 2^n - 2$$

$$W_n^* = 2^n + \frac{2n}{n-2} \quad \text{donc} \quad W_n^* - W_n = \frac{4(n-1)}{n-2}$$

$$D_n(1) = 1$$

$$D_n(2) = -1 \quad .$$

On en déduit que, pour $n \geq 4$, 2^n est le seul nombre vérifiant les inégalités voulues.

Si $V_1 = 1$, les calculs sont plus compliqués du fait que pour la fraction $\frac{1-z}{1-2z}$, $W_n^* - W_n \rightarrow \sqrt{5} + 3$, toutefois l'on peut calculer tous les coefficients,

ainsi que les constantes r ou r' des fonctions de type A' , correspondant à des nombres θ , inférieurs à 2, qui pourraient l'approcher, et on voit que $r' \leq 2$, il est alors aisé de voir que le seul développement possible est celui $\frac{1-z}{1-2z}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., t. 77, 1953, 1re partie, p. 129-136.
 - [2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité ..., Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 72, 1955, p. 69-92.
 - [3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., t. 78, 1955, 1re partie, p. 54-64.
 - [4] GRANDET (Marthe). - Sur un ensemble d'entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 1542-1543.
 - [5] SALEM (Raphaël). - A remarkable class of algebraic integers, Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.
-