Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Yvette Amice

Interpolation p-adique

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 1 (1963-1964), exp. n° 7, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A6_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 7

20 janvier 1964

INTERPOLATION p-ADIQUE

par Mme Yvette AMICE

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et à valeurs dans $\underset{\sim}{Q}_p$, et soit $f_n(x)$ son n-ième polynôme d'interpolation sur la suite des entiers naturels défini par

$$\deg f_n \leqslant n \quad \text{et} \quad f_n(j) = f(j) \qquad (j = 0 , 1 , \ldots , n) .$$

On obtient aisément :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k} \quad \text{où} \quad a_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j) .$$

Cherchant à démontrer le théorème de Weierstrass pour $\underset{\sim}{Z}_p$, K. MAHLER [4] a obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME DE MAHLER. - Quelle que soit f continue sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et à valeurs dans $\underset{\sim}{Q}_p$, la suite f_n converge uniformément vers f sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et f est somme de la série (uniformément convergente)

(1) $$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \binom{x}{n} .$$

On peut de plus remarquer que

$$\|f\| = \max_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} |f(x)| = \max_{n\geqslant 0} |a_n| ,$$

et donc que les polynômes $\binom{x}{n}$ constituent une base normale de l'espace des fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$ (muni de la norme de la convergence uniforme).

Ce résultat peut être étendu à des espaces de fonctions définies sur des compacts "réguliers" M d'un corps valué complet localement compact K : on construit des bases normales polynomiales de tels espaces à l'aide de suites à valeurs dans M, convenablement réparties dans M, et cela permet d'obtenir des représentations des fonctions par des séries d'interpolation analogues à (1).

1. Compacts réguliers.

Un système projectif $(M_n , \varphi_{n,k})$ est dit régulier si les ensembles M_n sont finis et si :

(i) Card $M_0 = 1$,

(ii) les projections $\varphi_{n,k}$ sont surjectives,

(iii) $\forall\ k \geqslant 1$, il existe un entier $q_k \geqslant 1$ tel que $\forall\ \alpha \in M_{k-1}$,

$$\mathrm{Card}(\varphi_{k,k-1}^{-1}(\alpha)) = q_k \ .$$

On posera alors $\mathrm{Card}\ M_k = q_1 \ldots q_k = N_k$.

Un compact M de K est dit régulier si le système projectif qui lui est canoniquement associé est régulier (soit π une uniformisante de K : M_k peut s'identifier à l'ensemble des classes modulo π^k qui rencontrent M).

Exemple 1. - L'anneau de valuation A de K est un compact régulier de K , pour lequel $q_k = p^{rk} = \mathrm{Card}(A/\Pi A)$.

Exemple 2. - La circonférence unité U de K , $U = \{x \in K \mid |x| = 1\}$, est un compact régulier de K pour lequel $q_1 = p^r - 1$ et $q_k = p^r$ $(k \geqslant 2)$.

Exemple 3. - A un groupe profini G muni d'une métrique invariante, on peut associer un système projectif régulier canonique $G_i = G/H_i$ où H_i parcourt l'ensemble des boules centrées à l'élément neutre.

2. Conditions de répartition.

Soit u une suite à valeurs dans un compact régulier M de K , nous noterons $S_n(u) = \{u_0 , u_1 , \ldots , u_{n-1}\}$, si $\alpha \in M$

$$V_k(\alpha) = \{x \mid x \in M ,\ |x - \alpha| \leqslant |\pi|^k\}$$

$$\nu(\alpha , n , k) = \mathrm{Card}\ \{u^{-1}(V_k(\alpha)) \cap (0 , n - 1)\} \ .$$

(Si u est injective, $\nu(\alpha , n , k) = \mathrm{Card}\ \{S_n \cap V_k(\alpha)\}$.)

Nous utiliserons des suites satisfaisant aux conditions de répartition suivantes :

BRh : Une suite u est bien répartie d'ordre h dans M si $\forall\ \alpha \in M$, $\forall\ n \geqslant 1$,

$$1 \leqslant k \leqslant n \Rightarrow [\frac{n}{N_k}] \leqslant \nu(\alpha , n , k) \leqslant 1 + [\frac{n-1}{N_k}] \ .$$

TBR : Une suite u est très bien répartie dans M si elle y est bien répartie de tous ordres h .

On voit que la condition BRh signifie que les projections de u sur les ensembles M_k $(1 \leqslant k \leqslant h)$ y sont "aussi bien réparties que possible". On vérifie aisément qu'un système de représentants de M modulo π^h peut être ordonné de telle sorte que la suite périodique de période N_h , dont il constitue les N_h premières valeurs, soit bien répartie d'ordre h .

La suite des entiers naturels est très bien répartie dans $\underset{\sim}{Z}_p$.

On voit aussi que la suite $n \to \alpha^n$ est très bien répartie dans la circonférence unité de $\underset{\sim}{Q}_p$ à la condition nécessaire et suffisante qu'elle y soit partout dense (i. e. : l'image $\bar{\alpha}$ de α dans $F_p^* = (\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^*$ est racine primitive $(p - 1)$-ième de l'unité et $v(\alpha^{p-1} - 1) = 1$).

3. Interpolation des fonctions continues.

Soit $E = \mathcal{C}(M , K)$ l'espace des fonctions continues sur M et à valeurs dans K , muni de la norme de la convergence uniforme.

A une suite u injective à valeurs dans M , nous associons les suites de polynômes

$$P_n(x) = (x - u_0)(x - u_1) \dots (x - u_{n-1})$$

et

$$Q_n(x) = P_n(x)/P_n(u_n) \qquad n \geqslant 0 .$$

D'autre part, étant donnée une fonction $f \in E$, nous noterons f_n son n-ième polynôme d'interpolation sur la suite u , défini par

$$\mathrm{dg}\, f_n \leqslant n , \quad f_n(u_j) = f(u_j) \qquad (j = 0 , \dots , n) .$$

On a alors comme plus haut,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(x) \quad \text{où} \quad a_k = \Big(\sum_{j=0}^{k} f(u_j)/P'_{k+1}(u_j) \Big) P_k(u_k) .$$

Avec ces notations, nous dirons que la suite u est une <u>suite d'interpolation pour les fonctions continues à valeurs entières</u>, si :

(1) $\forall f \in E , \ \|f - f_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$,

(2) $\forall n \geqslant 0 , \ \forall f \in E , \ \|f_n\| \leqslant \|f\|$.

La condition (2) ci-dessus équivaut à : si f est à valeurs entières, les f_n le sont aussi.

THÉORÈME 1. - <u>Les quatres conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) u <u>est une suite d'interpolation pour les fonctions continues et à valeurs entières</u>,

(b) $\forall n \geqslant 0 , \ \|Q_n\| \leqslant 1$,

(c) u <u>est très bien répartie dans</u> M ,

(d) $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ <u>est une base normale de</u> E .

La démonstration utilise essentiellement les propriétés suivantes :

1° Pour que $(e_n)_{n\geqslant 0}$ constitue une base normale de $\mathcal{C}(M , K)$, il faut et il suffit que

(α) $|e_n| \leqslant 1$,

(β) Soient $E_0 = \{f \in E \mid \|f\| \leqslant 1\}$ et $\overline{E} = E_0/\pi E_0$: les images $(\overline{e}_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\overline{E}$ constituent une base algébrique de $\overline{E}$ [5].

2° L'espace $\overline{E}$ est l'espace des fonctions constantes par morceaux sur M et possède donc une base naturelle formée de fonctions caractéristiques de boules.

3° On montre, par des procédés combinatoires, que " u est très bien répartie" équivaut à l'une des conditions suivantes :

- $\forall\ n \geqslant 0$, $|P_n(u_n)| = |\pi|^{\lambda_n}$ où $\lambda_n = [\frac{n}{N_1}] + \ldots + [\frac{n}{N_k}] + \ldots$,
- $\forall\ n \geqslant 0$, $\|Q_n\| = 1$.

4° Lorsque u est très bien répartie, les images $\overline{Q}_n$ des Q_n dans $\overline{E}$ se comparent assez facilement à des fonctions caractéristiques de boules, ce qui permet de montrer qu'elles satisfont à (β).

Comme corollaire du théorème 1, on obtient un résultat sur les "polynômes à valeurs entières sur M ", voisin de celui de [2], si $M = A$.

COROLLAIRE. - <u>Les quatres conditions du théorème 1 sont équivalentes à</u> :

(e) $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ <u>constitue une base du</u> A-<u>module des polynômes à valeurs entières sur</u> M .

On peut généraliser ce théorème aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach sur K , par produit tensoriel complété, ce qui permet d'étendre les résultats aux fonctions continues de plusieurs variables.

4. Fonctions localement analytiques.

Soit f une fonction localement analytique sur M : pour $x \in M$, soit $\rho_x(f)$ le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point x , alors $\rho = \inf_{x\in M} \rho_x(f)$ est le "rayon de convergence de f sur M ".

Nous dirons que f est <u>analytique d'ordre</u> h sur M si $\rho \geqslant |\pi|^h$, donc toute fonction localement analytique sur M y possède un ordre d'analyticité.

Soient $D_1, \ldots, D_{N_h}$ les N_h disques disjoints de rayon $|\pi|^h$ qui rencontrent M, notons α_i un centre de D_i.

L'espace $A_h(M)$ des fonctions analytiques d'ordre h sur M est, de façon naturelle, somme directe des N_h espaces de fonctions strictement analytiques sur D_i : on le munit de la norme somme directe, ce qui en fait un espace de Banach.

Soit $f_i(x) = \sum_{n\geq 0} a_{n,i}(x - \alpha_i/\pi^h)^n$ la série de Taylor de f en α_i, si $f \in A_h(M)$, $a_{n,i} \to 0$ quand $n \to \infty$ et la norme $\|f\|_h$ de f dans $A_h(M)$ est

$$\|f\|_h = \max_{i=1,\ldots,N_h} (\sup_{n\geq 0} |a_{n,i}|) .$$

Si nous désignons par $\chi_{i,n}$ la restriction au disque D_i de $(x - \alpha_i/\pi^h)^n$, $(\chi_{i,n})_{n\geq 0, i=1,\ldots,N_h}$ constitue une base normale naturelle de $A_h(M)$.

Soient d'autre part u une suite non nécessairement injective et à valeurs dans M, et f une fonction localement analytique sur M : la suite des polynômes d'interpolation de f sur u est définie comme au n° 3, en imposant l'égalité des dérivées convenables comme il est d'usage.

Ceci associe à toute $f \in A_h(M)$ sa série d'interpolation sur la suite u : $\sum_{n\geq 0} b_n P_n(x)$, le théorème 2 ci-dessous permet de savoir à quelle condition cette série représente f dans $A_h(M)$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour qu'il existe une suite de scalaires</u> $(s_{n,h})_{n\geq 0}$ <u>tels que les polynômes</u> $s_{n,h}^{-1} P_n(x)$ <u>constituent une base normale de</u> $A_h(M)$, <u>il faut et il suffit que</u> u <u>soit bien répartie d'ordre</u> h <u>dans</u> M. <u>On a alors</u>

$$v(s_{n,h}) = v(\pi) \sum_{k=1}^{h} (\frac{n}{N_k}) .$$

La démonstration de ce théorème est également fondée sur la technique de "passage au quotient" (3.2) : on compare les polynômes de norme 1 proportionnels aux P_n avec la base naturelle $\bar{\chi}_{n,i}$ de $\bar{A}_h(M)$.

Comme pour les fonctions continues, la généralisation aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach sur K, donc aux fonctions de plusieurs variables, se fait par produit tensoriel complété.

On voit alors que les théorèmes 1 et 2 permettent de caractériser les fonctions localement analytiques parmi les fonctions continues.

THÉORÈME 3. - Soient u une suite très bien répartie dans M, Q_n les polynômes associés, et soit

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n Q_n(x) \qquad (a_n \to 0)$$

une fonction continue sur M, alors f est analytique d'ordre h sur M à la condition nécessaire et suffisante que

$$v(a_n) - v(\pi)\Big(\sum_{k\geqslant h+1} [\frac{n}{N_k}]\Big) \to +\infty .$$

COROLLAIRE 3.1. - Avec les notations du théorème 3, supposons de plus que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{N_k} < +\infty$, alors f est localement analytique sur M à la condition nécessaire et suffisante que

$$\underline{\lim} \frac{v(a_n)}{n} > 0 .$$

Dans le cas particulier où $M = \underset{\sim}{Z}_p$ et $u_n = n$, la condition du théorème 3 peut s'énoncer " $a_n/[\frac{n}{p^h}]! \to 0$ ", on a alors un résultat équivalent à celui de [3].

Nous voyons que le théorème 3 permet de situer le rayon de convergence ρ de f par rapport aux puissances $|\pi|^h$ de $|\pi|$, on peut préciser la valeur de ce rayon ρ, toujours à l'aide du comportement asymptotique des a_n, et aussi déterminer s'il s'agit d'un rayon de disques ouverts ou fermés de convergence (cf. [1], chap. III, théorème 3).

5. Applications.

5.1. Recollement des séries de Taylor. - Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_h}$ des représentants de M modulo π^h, indexés de telle sorte que la suite de période N_h définie par $u_{i-1} = \alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, N_h$, soit bien répartie d'ordre h dans M (cf. n° 2). Posons

$$R(x) = \pi^{-\mu_h}(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_{N_h}) \quad \text{avec} \quad \mu_h = N_h(\frac{1}{N_1} + \ldots + \frac{1}{N_h})$$

et

$$R_i(x) = \pi^{-\mu_i}(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_i) \quad \text{avec} \quad \mu_i = [\frac{i}{N_1}] + \ldots + [\frac{i}{N_h}]$$

pour $i = 1, \ldots, N_h - 1$, et $R_0 = 1$.

Alors d'après le théorème 3, les polynômes $(R_n)_{n\geqslant 0}$ définis par $R_n = R_i R^q$ si $n = i + qN_h$, $0 \leqslant i < N_h$, constituent une base normale de $A_h(M)$.

Soit d'autre part $P(x)$ un polynôme de degré inférieur à N_h : on constate aisément que ses normes $\|P\|_C$ (norme de la convergence uniforme sur M) et $\|P\|_h$ (norme de P dans $A_h(M)$) sont égales.

Avec ces notations, le théorème 3 admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.2. - Toute $f \in A_h(M)$ admet une représentation unique

$$f(x) = \sum_{m \geqslant 0} f_m(x)\, R(x)^m$$

avec

1° f_m est un polynôme de degré inférieur à N_h ;

2° $\|f\|_h = \sup_{m \geqslant 0} \|f_m\|_h = \sup_{m \geqslant 0} \|f_m\|_C$;

3° Si $F_k(x) = \sum_{m=0}^{k} f_m(x)\, R(x)^m$, $F_k(x)$ et $f(x)$ coïncident ainsi que leurs k premières dérivées aux points α_i : les polynômes $f_m(x)$ se calculent donc par interpolation à partir des séries de Taylor de f aux points α_i .

5.2. Sommes de séries de Laurent. - Désormais U est la conférence unité de $\mathbb{Q}_p$, et α un élément de U tel que $n \to \alpha^n$ soit très bien répartie dans U (par exemple $\alpha = \zeta \exp p$ ou $\alpha = \zeta(1 + p)$, ζ désignant une racine primitive $(p-1)$-ième de 1).

Nous savons qu'une série

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} b_n (1 - x)(1 - x/\alpha) \ldots (1 - x/\alpha^{n-1}) \tag{2}$$

est uniformément convergente sur U à la condition nécessaire et suffisante que $|b_n(1 - \alpha^n)(1 - \alpha^{n-1}) \ldots (1 - \alpha)| \to 0$, soit encore

$$v(b_n) + \left[\frac{n}{p-1}\right] + \left[\frac{n}{p(p-1)}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^r(p-1)}\right] + \ldots \to +\infty \qquad \text{(Théorème 2).}$$

Soit d'autre part $\sum_{n \geqslant 1} a_n/x^n$ une série de Laurent restreinte $(a_n \to 0)$: sa somme est une fonction continue sur U , donc représentable sur U par une série (2).

PROPOSITION 1. - La série (2) a pour somme une fonction $f(x)$ développable en série de Laurent restreinte à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une fonction $\varphi(t)$ continue sur U et telle que $b_n = \varphi(1/\alpha^n)$. Alors si $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} a_n/x^n$, on a

$$\varphi(t) = t \sum_{n \geqslant 1} a_n \frac{(t - \alpha) \ldots (t - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha) \ldots (1 - \alpha^{n-1})} .$$

La démonstration de cette proposition est fondée sur le calcul explicite de la série (2) associée à $1/x^n$, les sommations effectuées se justifiant par le théorème 2.

On peut remarquer que l'expression de $\varphi(t)$ ci-dessus en est un développement sur une base normale de $\mathcal{C}(U , \mathbb{Q}_p)$, ce qui permet de formuler la proposition 1 sous la forme équivalente :

PROPOSITION 1 bis. - Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de scalaires tendant vers 0 . Notons :

- $f_a(x) = \sum_{n\geq 1} a_n/x^n$ la série de Laurent restreinte qui lui est associée sur la base canonique $(1/x^n)_{n\geq 1}$;
- $\varphi_a(t) = t \sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{(t - \alpha) \dots (t - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha) \dots (1 - \alpha^{n-1})}$ la fonction continue sur U qui lui est associée par la base normale $t \dfrac{(t - \alpha) \dots (t - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha) \dots (1 - \alpha^{n-1})}$ de $\mathcal{C}(U , \mathbb{Q}_p)$.

Alors $f_a(x)$ admet la série d'interpolation

$$f_a(x) = \sum_{n\geq 0} \varphi_a(1/\alpha^n)(1 - x) \dots (1 - x/\alpha^{n-1}) .$$

Ce résultat permet aussi de caractériser parmi les séries (2) celles qui sont limite uniforme sur U de familles bornées de sommes de séries de Laurent restreintes : ce sont les séries (2) telles que $\sup_{n\geq 0} |b_n| < +\infty$.

5.3. Fonctions usuelles. - Nous donnons ici à titre d'exemple des séries d'interpolation pour l'exponentielle et le logarithme.

Exponentielle. - Soit e_k un élément de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ tel que

$$(e_k)^{p^{k-1}} = \exp p ,$$

alors la série

$$\exp px = \sum_{n\geq 0} (e_k - 1)^n \binom{p^k x}{n}$$

converge uniformément, sur la boule $|x| < p^{-k}$ de $\mathbb{Q}_p$, vers une fonction exponentielle prolongeant l'exponentielle usuelle et à valeurs dans l'extension totalement ramifiée (de degré p^{k-1}) $\mathbb{Q}_p(e_k)$ de $\mathbb{Q}_p$.

Logarithme. - Soit $\alpha = \zeta \exp p$ où ζ est une racine primitive $(p - 1)$-ième de 1 . Alors la série

$$\operatorname{Log} x = p \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1-\alpha^n}(1-x)(1-x/\alpha)\ \ldots\ (1-x/\alpha^{n-1})$$

converge uniformément sur U , sa somme est le logarithme usuel pour $x \in 1 + p\underset{\sim}{Z}_p$, et on a $\operatorname{Log} \zeta = 0$.

Cette série fournit donc une représentation globale sur U du prolongement naturel du logarithme obtenu en posant $\operatorname{Log} \zeta = 0$ si $\zeta^{p-1} = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] HILY (Jacques). - Polynômes à valeurs entières, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4, 1962/63, n° 1, 11 p.

[3] HILY (Jacques). - Séries d'interpolation pour les fonctions de plusieurs variables p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 2985-2987.

[4] MAHLER (K.). - An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, n° 12, p.69-85).