Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Alain Bigard

Sur la décomposition en éléments primaires dans les $\mathcal{T}$-algèbres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 23, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 23

16 mars 1964

SUR LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS PRIMAIRES DANS LES $\mathcal{C}$-ALGÈBRES

par Alain BIGARD

Le présent exposé comporte trois parties. Dans la première partie, nous rappelons les résultats essentiels exposés par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [4], chapitre V. Nous renvoyons à cet ouvrage pour la définition et les propriétés générales des $\mathcal{C}$-algèbres.

Dans la seconde partie, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que la décomposition en éléments primaires soit possible. On trouvera à la fin une bibliographie sommaire sur les différentes solutions qui ont été apportées à ce problème dans le cas des anneaux. L. LESIEUR et R. CROISOT ont montré que l'existence des décompositions est liée au lemme d'Artin-Rees.

Nous étudions, dans une troisième partie, comment cette condition se transfère aux algèbres-quotient.

I

Soit $(\mathcal{C}, L)$ une $\mathcal{C}$-algèbre satisfaisant à l'axiome D , c'est-à-dire que les résiduels à gauche et les résiduels à droite de tout élément de L satisfont à la condition maximale.

Nous noterons en lettres droites les éléments de L , en lettres rondes les éléments de $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $X \in L$, $\{\mathfrak{a} \mid \exists m , \mathfrak{a}^m \subseteq X \cdot\!\!. U\}$ <u>admet un élément maximum, qui est l'intersection des éléments premiers minimaux contenant</u> $X \cdot\!\!. U$.

DÉFINITION 1. - L'élément introduit par le théorème 1 est appelé radical primaire de X et noté $\mathcal{R}_1(X)$.

Si $\mathcal{C}$ et L coïncident avec le treillis des idéaux bilatères d'un anneau, ce n'est autre que le radical de Baer-McCoy.

DÉFINITION 2. - $Q \in L$ est dit primaire si

$$\mathfrak{a}X \subseteq Q \quad \text{et} \quad X \not\subseteq Q \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{R}_1(Q) .$$

La propriété écrite à gauche de l'implication signifie que $\mathfrak{a}$ est contenu dans un résiduel à gauche propre de X. La définition peut donc se formuler de la manière suivante :

$$Q \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a} \supset Q \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{R}_1(Q) \ ,$$

ou encore, si $Q \neq U$,

$$Q \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a} \supset Q \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{R}_1(Q) \ .$$

En effet, si $Q \neq U$, il admet des résiduels à gauche propres premiers. $\mathfrak{a}$ est contenu dans ces résiduels, donc $Q \mathbin{.^{\bullet}} \mathfrak{a} \supset Q$.

PROPRIÉTÉ 1. - Soient $X_1 , \dots , X_n \in L$,

$$\mathcal{R}_1\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{R}_1(X_i) \ .$$

THÉORÈME 2. - <u>Pour que</u> $X \neq U$ <u>soit primaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier</u> $\mathcal{P}$ <u>qui soit élément premier minimum contenant</u> $X \mathbin{^{\bullet}.} U$.

$\mathcal{P}$ est alors le radical de X. Il est commode de dire que X est $\mathcal{P}$-primaire.

COROLLAIRE. - <u>Tout élément primaire est primal.</u>

PROPRIÉTÉ 2. - Si $Q \in L$ $(Q \neq U)$ et $\mathcal{P}$ sont tels que

1° $\mathfrak{a}X \subseteq Q$ et $X \nsubseteq Q \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}$,

2° $\exists\, n$, $\mathcal{P}^n U \subseteq X$,

alors $\mathcal{P}$ est premier et Q est $\mathcal{P}$-primaire.

PROPRIÉTÉ 3. - L'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{P}$-primaires est $\mathcal{P}$-primaire.

Ceci résulte immédiatement de la propriété 1.

DÉFINITION 3. - Une intersection $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$, où Q_i est $\mathcal{P}_i$-primaire, est dite réduite si

1° Il n'y a pas d'élément superflu,

2° Les $\mathcal{P}_i$ sont deux à deux distincts.

Etant donnée une décomposition, on peut toujours se ramener à une décomposition réduite (Propriété 3).

THÉORÈME 3. - Deux décompositions réduites d'un même élément comme intersection d'éléments primaires ont le même nombre d'éléments et mêmes éléments premiers associés.

Comme tout élément primaire est tertiaire, ce théorème est une conséquence du théorème d'unicité pour les décompositions tertiaires.

PROPRIÉTÉ 4. - Soient $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = Q_i' \cap \dots \cap Q_n'$ deux décompositions réduites où Q_i et Q_i' sont $\mathfrak{P}_i$-primaires, on a

$$X = Q_1' \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n .$$

COROLLAIRE. - Soient X un élément décomposable, $\mathfrak{P}_1 , \mathfrak{P}_2 , \dots , \mathfrak{P}_n$ ses idéaux premiers associés. Si, pour tout i, il existe une décomposition telle que le composant $\mathfrak{P}_i$-primaire soit Q_i, on a

$$X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n .$$

PROPRIÉTÉ 5. - Soit X un élément décomposable. Il existe une décomposition réduite $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$, où les Q_i sont d'exposant minimum et sont minimum pour cette propriété.

Rappelons que l'exposant de Q_i est le plus petit entier σ tel que

$$\mathfrak{P}_i^{\sigma} \subseteq Q_i .$$

Soient $X \in L$ et $\mathcal{C} \in \mathcal{T}$. Les $(X \mathbin{.\!^{\bullet}} \mathcal{C}^n)_{n \in N}$ constituent une suite croissante. Elle est donc stationnaire. Il existe n, $X \mathbin{.\!^{\bullet}} \mathcal{C}^n = X \mathbin{.\!^{\bullet}} \mathcal{C}^{n+1}$.

L'élément $X_{[\mathcal{C}]} = X \mathbin{.\!^{\bullet}} \mathcal{C}^n$ est appelé frontière de X par $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 4. - Un élément quelconque de L n'admet qu'un nombre fini de frontières.

PROPRIÉTÉ 6. - Pour que $X \neq U$ soit primaire, il faut et il suffit que X et U soient ses seules frontières.

PROPRIÉTÉ 7. - Soit $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ une décomposition en p_i-primaires. Si $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{P}_1 , \dots , \mathfrak{P}_m$ et $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{P}_{m+1} , \dots , \mathfrak{P}_n$,

$$X_{[\mathfrak{a}]} = Q_1 \cap \dots \cap Q_m .$$

Si $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$, le segment $[1 , n]$ peut être ordonné par

$$i \leqslant j \iff \mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P}_j .$$

$\bigcap_{i \in J} Q_i$ est appelé composant isolé de X , si J est une partie héréditaire de $[1 , n]$.

THÉORÈME 5. - X' ($\neq U$ et $\neq X$) <u>est un composant isolé de</u> X <u>si, et seulement s'il existe</u> $\mathfrak{a}$ <u>tel que</u> $X_{[\mathfrak{a}]} = X'$.

Les composants isolés sont donc indépendants de la décomposition.

A ces propositions (dont on trouvera la démonstration dans [4]), nous pouvons joindre les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 8. - Soient $X \in L$ et $\mathcal{P}$ premier, différent de $\mathcal{E}$.

$$\{Y \mid \exists \mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{P} \ , \ \mathcal{M}Y \subseteq X\}$$

admet un maximum $I = X_{]\mathcal{P}[}$. Cet élément est une frontière de X ,

$$I : \mathcal{M} = I \qquad \text{quel que soit } \mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{P} \ .$$

Soit $I = X : \mathfrak{a}$ un élément maximal parmi les $X : \mathcal{M}$ où $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{P}$.

Si $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathcal{P}$, $\mathfrak{ac} \not\subseteq \mathcal{P}$, mais $\mathfrak{ac} \subseteq \mathfrak{a}$.

$$X : \mathfrak{a} \subseteq X : \mathfrak{ac} \qquad X : \mathfrak{a} = X : \mathfrak{ac} = (X : \mathfrak{a}) : \mathfrak{c} \ ,$$

donc $I = I : \mathfrak{c}$.

Si $\mathcal{M}Y \subseteq X$ avec $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{P}$,

$$\mathfrak{a}\mathcal{M}Y \subseteq X \qquad Y \subseteq X : \mathfrak{a}\mathcal{M} = I : \mathcal{M} = I \ ;$$

I est donc maximum.

Pour tout r , $\mathfrak{a}^r \not\subseteq P$, donc $(X : \mathfrak{a}) : \mathfrak{a}^r = X : \mathfrak{a}$,

$$X : \mathfrak{a}^{r+1} = X : \mathfrak{a} \ ,$$

$$I = X_{[\mathfrak{a}]} \ .$$

PROPOSITION 9. - Soit $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ une décomposition réduite en P_i-primaire et P premier différent de $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{P}_1 , \dots , \mathcal{P}_r \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{r+1} , \dots , \mathcal{P}_n \not\subseteq \mathcal{P}$, alors

$$X_{]\mathcal{P}[} = Q_1 \cap \dots \cap Q_r \ .$$

En effet, on sait que $X_{]\mathcal{P}[} = X_{[\mathfrak{a}]}$ avec $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathcal{P}$, donc

$$\mathfrak{a} \nsubseteq \mathcal{P}_1 , \dots , \mathcal{P}_r .$$

D'après la propriété 7,

$$X_{[\mathfrak{a}]} = Q_1 \cap \dots \cap Q_s , \qquad r \leqslant s .$$

Cette décomposition est réduite. Or, $\mathcal{P}_s$ est un résiduel à gauche propre de $X_{[\mathfrak{a}]}$ (cf. [4], théorème 8.4).

$$X_{[\mathfrak{a}]} \cdot\!\cdot\, \mathcal{P}_s \supset X_{[\mathfrak{a}]} ,$$

$\mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{P}$, donc $s \leqslant r$, $s = r$.

II

DÉFINITION. - Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{T}$, nous désignerons par $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ l'intersection des éléments premiers qui contiennent $\mathfrak{a}$.

Notons que si $\mathcal{T}$ et L coïncident, cette notation est compatible avec la définition du radical donnée précédemment.

LEMME 1. - <u>Soient</u> $Q \in L$, $\mathcal{P}$-<u>primaire et</u> $Y \nsubseteq Q$,

$$\mathcal{R}(Q \cdot\!\cdot\, Y) = \mathcal{P} .$$

En effet, il existe n tel que $\mathcal{P}^n U \subseteq Q$, donc $\mathcal{P}^n Y \subseteq Q$,

$$\mathcal{P}^n \subseteq Q \cdot\!\cdot\, Y \qquad \mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}(Q \cdot\!\cdot\, Y) ,$$

$(Q \cdot\!\cdot\, Y)\, Y \subseteq Q$ et $Y \nsubseteq Q \implies Q \cdot\!\cdot\, Y \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{R}(Q \cdot\!\cdot\, Y) \subseteq \mathcal{P}$.

PROPOSITION 10. - Soit $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ une décomposition réduite.

(A) <u>Pour tout résiduel à gauche propre premier</u> $\mathcal{P}$ <u>de</u> X , <u>il existe</u> Q , <u>diviseur</u> $\mathcal{P}$-<u>primaire de</u> X <u>tel que</u>

$$M \subseteq Q \quad \underline{\text{et}} \quad M \nsubseteq X \implies \mathcal{R}(X \cdot\!\cdot\, M) \neq \mathcal{P} .$$

$\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche propre de **l'un** des Q_i ([4], prop. 4.6), soit Q_1 . Mais Q_1 n'admet qu'un seul résiduel à gauche propre premier.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 .$$

Si $M \subseteq Q_1$, $M \nsubseteq X$, $M \subseteq Q_1 , \dots , Q_s$, $M \nsubseteq Q_{s+1} , \dots , Q_n$, $1 \leqslant s < n$,

$$X \cdot\!\cdot\, M = (Q_{s+1} \cdot\!\cdot\, M) \cap \dots \cap (Q_n \cdot\!\cdot\, M) , \quad \mathcal{R}(X \cdot\!\cdot\, M) = \mathcal{P}_{s+1} \cap \dots \cap \mathcal{P}_n .$$

Si $\mathcal{R}(X \,^{\bullet}\!.\, M) = \mathcal{P}_1$, on a donc $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_i$ pour un $i > 1$, ce qui est impossible car la décomposition est réduite. Donc,

$$\mathcal{R}(X \,^{\bullet}\!.\, M) \neq \mathcal{P} .$$

PROPOSITION 11. - Soit $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ une décomposition réduite.

(B) <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>est un résiduel à gauche propre de</u> X , <u>tout diviseur premier minimal</u> $\mathcal{P}$ <u>de</u> $\mathfrak{a}$ <u>est un résiduel à gauche propre de</u> X . <u>Si</u> $\mathfrak{a} \neq \varepsilon$, $\mathfrak{a} \,^{\bullet}\!.\, \mathcal{P} \neq \mathfrak{a}$.

Soit $\mathfrak{a} = X \,^{\bullet}\!.\, Y$, $Y \not\subseteq X$, $Y \not\subseteq Q_1 , \ldots , Q_r$, $Y \subseteq Q_{r+1} , \ldots , Q_n$, $1 \leqslant r \leqslant n$,

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i \leqslant r} (Q_i \,^{\bullet}\!.\, Y) , \qquad \mathcal{R}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i \leqslant r} \mathcal{P}_i ,$$

$$\bigcap_{i \leqslant r} \mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P} , \qquad \exists\, i , \ \mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P} , \ \mathcal{P}_i = \mathcal{P} .$$

D'après le théorème 8.4 de [4], $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche propre de X .

On peut supposer que $\bigcap_{i \leqslant r} (Q_i \,^{\bullet}\!.\, Y)$ est sans éléments superflus. Supposons également que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_r$,

$$\mathcal{P} \not\subseteq \mathcal{P}_1 , \ldots , \mathcal{P}_s , \ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{s+1} , \ldots , \mathcal{P}_r \qquad 0 \leqslant s < r ;$$

il existe h tel que, pour tout $i \in [s+1 , r]$, $\mathcal{P}_i^h U \subseteq Q_i$, $\mathcal{P}^h Y \subseteq Q_i$, $\mathcal{P}^h \subseteq Q_i \,^{\bullet}\!.\, Y$.

Distinguons 2 cas :

- Si $s > 0$,

$$\mathfrak{a} \,^{\bullet}\!.\, \mathcal{P}^h = \bigcap_{i \leqslant s} (Q_i \,^{\bullet}\!.\, Y) \,^{\bullet}\!.\, \mathcal{P}^h \supseteq \bigcap_{i \leqslant s} (Q_i \,^{\bullet}\!.\, Y) \not\supseteq \mathfrak{a} ,$$

- Si $s = 0$,

$$\mathfrak{a} \,^{\bullet}\!.\, \mathcal{P}^h = \varepsilon \not\supseteq \mathfrak{a} .$$

Dans les 2 cas, $\mathfrak{a} \,^{\bullet}\!.\, \mathcal{P}^h \not\supseteq \mathfrak{a}$, donc $\mathfrak{a} \,^{\bullet}\!.\, \mathcal{P} \not\supseteq \mathfrak{a}$.

THÉORÈME 6. - <u>Les conditions</u> (A) <u>et</u> (B) <u>sont nécessaires et suffisantes pour qu'un élément</u> $X \in L$ <u>soit décomposable en éléments primaires.</u>

On vient de montrer que ces conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un résiduel à gauche propre de</u> X . <u>Il existe des diviseurs premiers minimaux de</u> $\mathfrak{a}$. $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ <u>est l'intersection de ces éléments.</u>

Les résiduels à gauche de $\mathfrak{A}$ sont des résiduels à gauche de X, donc ils vérifient la condition maximale et la condition minimale. Par suite, les résiduels à droite de $\mathfrak{A}$ vérifient également ces deux conditions.

De proche en proche, on voit que les résiduels à gauche de $\mathfrak{A} \,.^{\bullet}\, \mathfrak{B}$ vérifient la condition maximale (quel que soit $\mathfrak{B}$). La démonstration du théorème 3.1 de [4] peut donc s'appliquer ici.

Il existe $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ premiers tels que

$$\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A} , \qquad \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}_i .$$

Soit $\mathfrak{P}_{n+1}$ un diviseur premier de $\mathfrak{A}$. On a alors

$$\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{n+1} \subseteq \mathfrak{A} , \qquad \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_i \text{ pour tout } i .$$

Le lemme en résulte immédiatement.

LEMME 3. - <u>Soient</u> $\mathfrak{A} = X \,{}^{\bullet}.\, Y$ <u>un résiduel à gauche propre de</u> X, $\mathfrak{P} \neq \mathcal{E}$ <u>diviseur premier minimal de</u> $\mathfrak{A}$. <u>Il existe</u> $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{P}$ <u>avec</u> $\mathcal{R}(\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}) = \mathfrak{P}$.

On a $\mathfrak{P} \neq \mathcal{E}$, donc

$$\mathfrak{A} \neq \mathcal{E} .$$

Soit $\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}$ maximal parmi les $\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathcal{C}$ où $\mathcal{C} \nsubseteq \mathfrak{P}$. $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{P}$, donc $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{A}$ c'est-à-dire $\mathfrak{M}Y \nsubseteq X$.

$\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M} = X \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}Y$ est un résiduel à gauche propre de X. Son radical est l'intersection des éléments premiers minimaux $\mathfrak{P}'$ qui le contiennent.

$$(\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M})\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P} , \qquad \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P} , \qquad \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M} \neq \mathcal{E} .$$

D'après la condition (B),

$$(\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}) \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{P}' \supset \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M} , \qquad \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{P}'\mathfrak{M} \supset \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}$$

d'où, en raison du caractère maximal de $\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P} , \qquad \mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P} , \qquad \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P} .$$

Comme $\mathfrak{P}$ est minimal, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}.\, \mathfrak{M}) = \mathfrak{P} .$$

<u>Démonstration</u>. - Si $X = U$, le théorème est trivial. Supposons $X \neq U$.

Soient $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ ses résiduels à gauche propres premiers. Soient $Q_1, \ldots, Q_n$

les diviseurs $\mathcal{P}_i$-primaires qui leurs sont associés par la condition (A).

$$X \subseteq T = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i \, .$$

Supposons $X \subset T$; $X \,{}^{\bullet}\!.\, T = \mathfrak{A}$ est un résiduel à gauche propre. Soit $\mathcal{P}$ un diviseur premier minimal de $\mathfrak{A}$. D'après (B), $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche propre de X , par exemple $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$.

Distinguons 2 cas.

1° $\mathcal{P} \neq \mathcal{E}$. D'après le lemme 3, il existe $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathcal{P}$,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}\!.\, \mathfrak{M}) = \mathcal{P} \, .$$

$\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{A}$, $M = \mathfrak{M}T \nsubseteq X$, $M \subseteq T$, $\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}\!.\, \mathfrak{M} = X \,{}^{\bullet}\!.\, M$. On a donc $M \nsubseteq X$, $M \subseteq Q_1$ et $\mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, M) = \mathcal{P}$, ce qui contredit la condition (A).

2° Si $\mathcal{P} = \mathcal{E}$, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{E}$,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{A}) = \mathcal{E} \, .$$

On a $T \nsubseteq X$, $T \subseteq Q_1$, $\mathcal{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, T) = \mathcal{P}_1$, contradiction.

III

Soit $(\mathcal{T} , L)$ une $\mathcal{T}$-algèbre modulaire et noethérienne.

Nous dirons qu'un élément $A \in L$ satisfait au lemme d'Artin-Rees, si

$$\forall \, \mathfrak{I} \in \mathcal{T} , \ \forall \, n , \ \exists \, m , \qquad \mathfrak{I}^m U \wedge A \subseteq \mathfrak{I}^n A \, .$$

On dira que L satisfait au lemme d'Artin-Rees, si tout élément $A \in L$ possède cette propriété.

L. LESIEUR et R. CROISOT ont montré [3] que la décomposition en éléments primaires est possible dans L , si et seulement si L satisfait au lemme d'Artin-Rees.

Soit $A \in L$, $L' = (A|$ la sous-algèbre définie par A .

THÉORÈME 7. - L satisfait au lemme d'Artin-Rees si, et seulement si A , L' et L/L' y satisfont.

Supposons que L vérifie le lemme d'Artin-Rees.

Soient $B \subseteq A$, $\mathfrak{I} \in \mathcal{T}$, et n . Il existe m tel que

$$\mathfrak{I}^m U \wedge B \subseteq \mathfrak{I}^n B \, .$$

A fortiori, $\mathfrak{J}^m A \wedge B \subset \mathfrak{J}^n B$.

Soit φ l'homomorphisme $L \to L/L'$. Soient $B' \in L/L'$, $\mathfrak{J} \in \mathfrak{T}$ et n . Considérons un $B \in L$ tel que $\varphi(B) = B'$. Il existe m tel que

$$\mathfrak{J}^m U \wedge (B + A) \subseteq \mathfrak{J}^n (B + A) \ ;$$

d'où, par modularité,

$$(\mathfrak{J}^m U + A) \wedge (B + A) = A + [\mathfrak{J}^m U \wedge (B + A)] \subseteq A + \mathfrak{J}^n (B + A) \ .$$

En remarquant que φ est un isomorphisme entre les treillis $|A)$ et L/L' :

$$\mathfrak{J}^m \varphi(U) \wedge B' \subseteq \mathfrak{J}^n B' \ .$$

<u>Inversement</u>, supposons que A , L' et L/L' vérifient le lemme d'Artin-Rees.

Soient $B \in L$, $\mathfrak{J} \in \mathfrak{T}$, $n \geqslant 0$.

Il existe $r \geqslant n$ tel que

$$\mathfrak{J}^r A \wedge B = \mathfrak{J}^r A \wedge B \wedge A \subseteq \mathfrak{J}^n (B \wedge A) \ .$$

Il existe $m \geqslant r$,

$$\mathfrak{J}^m U \wedge A \subseteq \mathfrak{J}^r A \ .$$

Il existe $s \geqslant m$ tel que :

$$(\mathfrak{J}^s U + A) \wedge (B + A) \subseteq \mathfrak{J}^m (B + A) + A = \mathfrak{J}^m B + \mathfrak{J}^m A + A \ ,$$

donc

$$\mathfrak{J}^s U \wedge B \subseteq \mathfrak{J}^m B + A \ .$$

On aura

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^s U \wedge B \subseteq (\mathfrak{J}^m B + A) \wedge \mathfrak{J}^s U \subseteq (\mathfrak{J}^m B + A) \wedge \mathfrak{J}^m U \ , \\ \subseteq \mathfrak{J}^m B + (A \wedge \mathfrak{J}^m U) \ , \\ \subseteq \mathfrak{J}^m B + \mathfrak{J}^r A \ ; \end{aligned}$$

donc

$$\mathfrak{J}^s U \wedge B \subseteq (\mathfrak{J}^m B + \mathfrak{J}^r A) \wedge B = \mathfrak{J}^m B + (\mathfrak{J}^r A \wedge B) \ ,$$

$$\mathfrak{J}^s U \wedge B \subseteq \mathfrak{J}^m B + \mathfrak{J}^n (B \wedge A) \subseteq \mathfrak{J}^m B + \mathfrak{J}^n B = \mathfrak{J}^n B \ ,$$

ce qui prouve que L satisfait au lemme d'Artin-Rees.

Il ne semble pas qu'on puisse simplifier le théorème en supprimant la condition sur A (cf. l'exemple donné dans [4], page 54 ; considérer la sous-algèbre engendrée par A). Dans le cas des modules sur un anneau commutatif, on connaît cependant des résultats plus précis ([1], § 2 , exerc. 23, p. 172).

De nombreux travaux ont été consacrés à la décomposition en primaires dans les anneaux non commutatifs. Pour faire le lien entre ces travaux et la théorie générale dans les $\mathcal{C}$-algèbres, on peut utiliser la caractérisation suivante :

PROPOSITION 12. - Soient R un anneau, X un idéal à gauche de R . X est primaire si, et seulement si

$$aRb \subseteq X \quad \text{et} \quad b \notin X \implies a \in \mathcal{R}_1(X) .$$

Supposons cette condition réalisée. Si $\mathfrak{a}Y \subseteq X$, $Y \nsubseteq X$. Il existe $b \in Y - X$. Si $a \in \mathfrak{a}$, $aRb \subseteq X$, donc $a \in \mathcal{R}_1(X)$, il en résulte

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{R}_1(X) .$$

<u>Inversement,</u> si $aRb \subseteq X$, $b \notin X$. Si $\mathcal{R}_1(X) = R$, on a évidemment $a \in \mathcal{R}_1(X)$. Supposons $\mathcal{R}_1(X) \neq R$.

$$R\,a\,R\,R\,b \subset X , \qquad \text{donc} \quad (R\,a\,R)R\,b \subseteq X .$$

Comme X est primaire,

$$R\,b \subseteq X \implies R\,(b| \subseteq X \implies (b| \subseteq X \implies b \in X ,$$

donc

$$R\,b \nsubseteq X .$$

$$(R\,a\,R) \subseteq \mathcal{R}_1(X) , \qquad R\,a\,R \subseteq \mathcal{R}_1(X) .$$

A fortiori,

$$(a)^3 \subseteq \mathcal{R}_1(X) .$$

Mais $\mathcal{R}_1(X)$ est premier, donc

$$(a) \subseteq \mathcal{R}_1(X) , \qquad a \in \mathcal{R}_1(X) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, chap. 4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).

[2] LESIEUR (Léonce). - Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 161-193.

[3] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Extension au cas non commutatif d'un théorème de Krull et d'un lemme d'Artin-Rees, J. für reine und angew. Math., t. 204, 1960, p. 216-220.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[5] MORI (S.). - Über kommutative Ringe mit der Teilerkettenbedingung für Halbprimideale, J. Sc. Hiroshima Univ., t. 16, 1952, p. 247-260.

[6] MURDOCH (D. C.). - Contribution to noncommutative ideal theory, Canad. J. of Math., t. 4, 1952, p. 43-57.

[7] RABIN (Michael). - Sur la représentation des idéaux par des idéaux primaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 544-545.

[8] TOMINAGA (Hisao). - On primary ideal decompositions in non-commutative rings, Math. J. Okayama Univ., t. 3, 1953-1954, p. 39-46 et 135-138.

[9] VAN LEEUWEN (L. C. A.). - Primary ideal representations in non-commutative rings, Proc. Koninkl. nederl. Akad. van Wet., Series A, t. 66, 1963, p. 57-64.