Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Grappy

Éléments tertiaires d'une $(\mathcal{T})$-algèbre

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 24, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A11_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 24

6 avril 1964

ÉLÉMENTS TERTIAIRES D'UNE $(\mathcal{C})$-ALGÈBRE

par Jacques GRAPPY

L'objet de cet exposé est de donner une nouvelle présentation de la théorie des éléments tertiaires d'une $(\mathcal{C})$-algèbre, généralisant celle des sous-modules primaires d'un module M sur un anneau A, commutatif unitaire, donnée par BOURBAKI [1]. Un idéal premier $\mathcal{P}$ de A est dit associé à M si $\mathcal{P} = \mathrm{Ann}(x)$, $x \neq 0$, $x \in M$. On remarque que les idéaux premiers associés à M ne sont autres que les résiduels essentiels de 0, ce qui permet de définir les idéaux associés à un module sur un anneau non nécessairement commutatif et unitaire, et plus généralement les éléments associés à une $(\mathcal{C})$-algèbre. Cela étant, il n'y a plus qu'à transcrire dans le language des $(\mathcal{C})$-algèbres, les démonstrations de BOURBAKI.

Pour les définitions d'une $(\mathcal{C})$-algèbre, on se reportera au livre de L. LESIEUR et R. CROISOT [2].

1. Compléments sur les $(\mathcal{C})$-algèbres.

Soient L une $(\mathcal{C})$-algèbre, et $N \subseteq M$ deux éléments de L. Alors l'intervalle $[N , M]$, si l'on pose

$$A \star X = AX + N , \quad \forall A \in \mathcal{C} , \quad \forall X \in [M , N] ,$$

est muni d'une structure de $(\mathcal{C})$-algèbre.

Supposons maintenant que L soit un treillis modulaire, et soient M et N deux éléments de L. On sait que les treillis $[M \cap N , M]$ et $[N , M + N]$ sont isomorphes, l'isomorphisme φ étant défini par

$$X \in [M \cap N , M] , \qquad \varphi(X) = X + N .$$

On vérifie immédiatement que φ est un isomorphisme de $(\mathcal{C})$-algèbres.

Dans toute la suite, nous supposerons que L est une $(\mathcal{C})$-algèbre modulaire, c'est-à-dire que L est un treillis modulaire, faiblement $\cap$-continu (rappelons que L est faiblement $\cap$-continu si la relation

$$X \cap (\sum_i Y_i) = \sum_i (X \cap Y_i)$$

a lieu lorsque les Y_i forment un ensemble totalement ordonné). Nons supposerons de plus que L vérifie la condition :

(D) L'ensemble des résiduels à gauche, et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément $X \in L$, vérifient la condition de chaîne ascendante.

2. Eléments premiers associés à une $(\mathfrak{T})$-algèbre.

Définition 1. - On appelle résiduel essentiel (de 0), un résiduel à gauche propre $0 \mathbin{\dot{.}} X$ tel que

$$0 \subset Y \subseteq X \implies 0 \mathbin{\dot{.}} X = 0 \mathbin{\dot{.}} Y .$$

PROPOSITION 1. - Tout résiduel à gauche propre maximal (de 0) est essentiel.

En effet, si $\mathcal{P} = 0 \mathbin{\dot{.}} X$ est un résiduel propre maximal, $0 \subset Y \subseteq X$ implique $0 \mathbin{\dot{.}} X \subseteq 0 \mathbin{\dot{.}} Y$, d'où $\mathcal{P} = 0 \mathbin{\dot{.}} Y$.

PROPOSITION 2. - Tout résiduel essentiel est premier.

Si $\mathcal{P} = 0 \mathbin{\dot{.}} X$ est essentiel, et $\mathcal{B}.\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$, avec $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}\mathcal{C}X = 0$ et $\mathcal{C}X \neq 0$, on en déduit, puisque $\mathcal{C}X \subseteq X$,

$$\mathcal{B} \subseteq 0 \mathbin{\dot{.}} \mathcal{C}X = \mathcal{P} .$$

Définition. - Soit L une $(\mathfrak{T})$-algèbre. Un élément $\mathcal{P} \in \mathfrak{T}$ est dit associé à L si $\mathcal{P}$ est un résiduel essentiel. On note $\mathrm{Ass}(L)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{T}$ associés à L.

Si $M \in L$, on notera

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}([0 , M]) .$$

Si $N \subseteq M$, on notera

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \mathrm{Ass}([N , M]) .$$

Remarque. - Si $\mathcal{P} = (0 \mathbin{\dot{.}} X) \in \mathrm{Ass}(L)$, on a

$$\mathrm{Ass}(X) = \{\mathcal{P}\} .$$

PROPOSITION 3. - Soit $M \in L$. On a

$$M = 0 \iff \mathrm{Ass}(M) = \emptyset .$$

Si $M = 0$, on a évidemment $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$.

Si $M \neq 0$, soit $\mathcal{P}$ maximal dans la famille $\{0 \mathbin{\dot{.}} X , 0 \subset X \subseteq M\}$; d'après la proposition 1, $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M)$.

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> $N \subseteq M$ <u>deux éléments de</u> L , <u>alors</u> :

$$\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(M/N) .$$

La première inclusion est évidente.

Soit $\mathcal{P} = 0 \,^{\bullet}\!. \, X \in \mathrm{Ass}(M)$, $0 \subset X \subseteq M$.

1° Si $X \cap N \neq 0$, alors $\mathcal{P} = 0 \,^{\bullet}\!. \,(X \cap N)$ et $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(N)$;

2° Si $X \cap N = 0$, on a

$$[0 , X] \simeq [N , N + X] \subseteq [N , M]$$

d'où

$$\{\mathcal{P}\} = \mathrm{Ass}(X) \subseteq \mathrm{Ass}\{M/N\}$$

PROPOSITION 5. - <u>Si</u> $0 = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, $Q_i \subseteq M$, <u>alors</u> $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}(M/Q_i)$.

Il suffit de démontrer la proposition pour $n = 2$.

Si $0 = Q_1 \cap Q_2$, soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M)$. On sait que

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(Q_1) \cup \mathrm{Ass}(M/Q_1) .$$

Si $\mathcal{P} = (0 \,^{\bullet}\!. \, X_1) \in \mathrm{Ass}(Q_1)$, $0 \subset X_1 \subseteq Q_1$, alors $X_1 \cap Q_2 = 0$ et

$$[0 , X_1] \simeq [Q_2 , Q_2 + X_1] \subseteq [Q_2 , M] ,$$

d'où

$$\{\mathcal{P}\} = \mathrm{Ass}(X_1) \subseteq \mathrm{Ass}(M/Q_2) .$$

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> $M \in L$, <u>et soit</u> $\Phi \subseteq \mathrm{Ass}(M)$. <u>Alors il existe</u> $N \subseteq M$ <u>tel que</u>

$$\mathrm{Ass}(N) = \mathrm{Ass}(M) - \Phi , \qquad \mathrm{Ass}(M/N) = \Phi .$$

Soit $\mathcal{S} = \{N , N \subseteq M , \mathrm{Ass}\, N \subseteq \mathrm{Ass}(M) - \Phi\}$. $\mathcal{S}$ est inductive. Soit en effet $\{N_i\}_{i \in I}$ une chaîne de $\mathcal{S}$,

$$N = \sum_{i \in J} N_i .$$

Si $\mathcal{P} = (0 \,^{\bullet}\!. \, X) \in \mathrm{Ass}(N)$, $0 \subset X \subseteq N$, on ne peut avoir $N_i \cap X = 0$, $\forall i$, car alors

$$X = (\sum N_i) \cap X = \sum (N_i \cap X) = 0$$

d'après la propriété de faible intercontinuité. Il existe donc i , $X \cap N_i \neq 0$, et $0 \,^{\bullet}\!. \,(X \cap N_i) = \mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(N_i)$. On a donc $\mathcal{P} \in (\mathrm{Ass}\, M - \Phi)$, d'où $N \in \mathcal{S}$.

Soit N un élément maximal de $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M/N)$. Il existe donc F , $N \subset F \subseteq M$, $\mathcal{P} = N \,^{\bullet}\!. F$, et $\mathcal{P} = \mathrm{Ass}(F/N)$. On a alors

$$\mathrm{Ass}(F) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(F/N) \subseteq (\mathrm{Ass}\, M - \Phi) \cup \{\mathcal{P}\} .$$

N étant maximal dans $\mathcal{S}$, il en résulte $\mathcal{P} \in \Phi$, d'où $\mathrm{Ass}(M/N) \subseteq \Phi$. La proposition résulte immédiatement de la proposition 4.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $M \in L$. <u>Il existe une suite</u> $M_0 = (0) \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ <u>vérifiant</u>

$$\mathrm{Ass}(M_{i+1}/M_i) = \{\mathcal{P}_{i+1}\} = \{(M_i \,^{\bullet}\!. M_{i+1})\} .$$

Soit $\mathcal{P}_1$ un résiduel à gauche propre maximal de 0 , et $M_1 = 0 \,.^{\bullet} \mathcal{P}_1$. On a $\mathcal{P}_1 = 0 \,^{\bullet}\!. M_1$, et si $0 \subset X \subseteq M_1$, $\mathcal{P}_1 = 0 \,^{\bullet}\!. M_1 = 0 \,^{\bullet}\!. X$, car $\mathcal{P}_1$ est maximal. Il en résulte

$$\{\mathcal{P}_1\} = \mathrm{Ass}(M_1) = \{(0 \,^{\bullet}\!. M_1)\} .$$

M_i étant supposé défini, si $M_i \neq M$, en considérant $[M_i , M]$, on construit de même $\mathcal{P}_{i+1} = M_i \,^{\bullet}\!. M_{i+1}$ tel que $\mathrm{Ass}(M_{i+1}/M_i) = \{\mathcal{P}_{i+1}\}$,

$$M_{i+1} = M_i \,.^{\bullet} \mathcal{P}_{i+1} = 0 \,.^{\bullet} (\mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_{i+1}) .$$

La condition (D) étant vérifiée, il existe donc un entier n tel que $M_n = M$.

COROLLAIRE. - <u>Pour tout</u> $M \in L$, $\mathrm{Ass}(M)$ <u>est fini</u>.

En effet, avec les notations du théorème 1

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1})\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathcal{P}_i\} .$$

3. Éléments tertiaires. Décomposition en éléments tertiaires.

<u>Définition.</u> - Soit U le plus grand élément de la $(\mathcal{C})$-algèbre L . $Q \in L$ est <u>tertiaire</u> si $\mathrm{Ass}(U/Q) = \{\mathcal{P}\}$.

On dit aussi que Q est $\mathcal{P}$-<u>tertiaire</u>.

PROPOSITION 7. - <u>L'intersection d'un nombre fini d'éléments</u> $\mathcal{P}$-<u>tertiaires est</u> $\mathcal{P}$-<u>tertiaire</u>.

En effet, si $Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$,

$$\mathrm{Ass}(U/Q) \subseteq \bigcup \mathrm{Ass}(U/Q_i) = \{\mathcal{P}\} .$$

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $N \in L$. <u>Alors il existe des éléments</u> $\mathcal{P}$-<u>tertiaires</u> : $Q(\mathcal{P})$ <u>tels que</u>

$$N = \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(U/N)} Q(\mathcal{P}) .$$

On peut supposer $N = 0$, en considérant U/N . Alors, d'après la proposition 6, pour tout $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(L)$, il existe $Q(\mathcal{P})$ vérifiant

$$\mathrm{Ass}(U/Q(\mathcal{P})) = \{\mathcal{P}\} , \qquad \mathrm{Ass}(Q(\mathcal{P})) = \mathrm{Ass}(L) - \{\mathcal{P}\} .$$

Soit $S = \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(L)} Q(\mathcal{P})$. $\mathrm{Ass}(S) \subseteq \mathrm{Ass}(Q(\mathcal{P}))$ pour tout $\mathcal{P}$, d'où

$$\mathrm{Ass}(S) = \emptyset \quad \text{et} \quad S = 0$$

d'après la proposition 3.

<u>Définition</u>. - Une décomposition $N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ en éléments Q_i , $\mathcal{P}_i$-tertiaires, est dite <u>réduite</u> si

1° $i \neq j \Longrightarrow \mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_j$;

2° $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} Q_j \not\subseteq Q_i$.

THÉORÈME 3. - <u>Une décomposition</u> $N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, <u>en éléments</u> Q_i , $\mathcal{P}_i$-<u>tertiaires est réduite si et seulement si les</u> $\mathcal{P}_i$ <u>sont distincts deux à deux, et appartiennent à</u> $\mathrm{Ass}(U/N)$. <u>On a alors</u> :

$$(1) \qquad \mathrm{Ass}(U/N) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathcal{P}_i\} ;$$

$$(2) \qquad \mathrm{Ass}(Q_i/N) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \{\mathcal{P}_j\} .$$

a. <u>Conditions suffisantes</u>. - Si l'on avait $N = \bigcap_{j \neq i} Q_j$, il en résulterait $\mathrm{Ass}(U/N) \subseteq \bigcup_{j \neq i} \{\mathcal{P}_j\}$. Or par hypothèse $\mathcal{P}_i \in \mathrm{Ass}(U/N)$. La décomposition est donc réduite.

b. <u>Conditions nécessaires</u>. - Considérons $S_i = \bigcap_{j \neq i} Q_j$. On a $S_i \neq N$, $S_i \cap Q_i = N$, d'où

$$[N , S_i] \simeq [Q_i , Q_i + S_i] \subseteq \{Q_i , U\} ,$$

et

$$\mathrm{Ass}(S_i/N) = \{\mathcal{P}_i\} = \mathrm{Ass}(U/Q_i) \subseteq \mathrm{Ass}(U/N) .$$

L'égalité (1) résulte alors de $\mathrm{Ass}(U/N) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{\wp_i\}$. De $N = \bigcap_{i \neq j} (Q_j \cap Q_i)$, on déduit

$$\mathrm{Ass}(Q_i/N) \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathrm{Ass}(Q_i/Q_j \cap Q_i) = \bigcup_{j \neq i} \mathrm{Ass}(Q_i + Q_j/Q_j) = \bigcup_{j \neq i} \{\wp_j\} .$$

L'égalité (2) résulte alors de

$$\mathrm{Ass}(U/N) \subseteq \mathrm{Ass}(U/Q_1) \cup \mathrm{Ass}(Q_i/N) .$$

4. Radical tertiaire.

Définition. - Soit $N \in L$. On appelle radieal tertiaire de N :

$$R_3(N) = \bigcap_{\wp \in \mathrm{Ass}(U/N)} \wp .$$

PROPOSITION 8. - Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{C}$. On a :

$$\mathfrak{a} \subseteq R_3(N) \iff \forall X \not\leq N , \exists Y \subseteq X , Y \not\subseteq N , \mathfrak{a}Y \subseteq N .$$

On peut supposer $N = 0$, car on peut exprimer une forme équivalente de la condition :

$$\forall X \supset N , \exists Y \subseteq X , Y \supset N , \mathfrak{a}Y \subseteq N .$$

Condition nécessaire. - Soit $X \neq 0$, il existe $0 \subset Y \subseteq X$ tel que $\wp = (0 \,\dot{.}\, Y) \in \mathrm{Ass}(L)$. On a alors

$$R_3(0).Y \subseteq \wp.Y = 0 .$$

Condition suffisante. - Soit $\mathfrak{a}$ vérifiant la condition, et soit $\wp = (0 \,\dot{.}\, X) \in \mathrm{Ass}(L)$. Puisque $X \neq 0$, il existe $0 \subset Y \subseteq X$ avec $\mathfrak{a}Y = 0$, soit

$$\mathfrak{a} \subseteq 0 \,\dot{.}\, Y = 0 \,\dot{.}\, X .$$

On a donc $\mathfrak{a} \subseteq \wp$, $\forall \wp \in \mathrm{Ass}(L)$, d'où $\mathfrak{a} \subseteq R_3(0)$.

Remarque. - On peut expliciter de façons équivalentes la condition donnée à la proposition 8. On a successivement :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \subseteq R_3(N) &\iff \{\forall X \not\subseteq N , \exists Y \not\subseteq N , Y \not\subseteq X , Y \subseteq N \,\dot{.}\, \mathfrak{a}\} \\ &\iff \{\forall X \not\subseteq N , \exists Y \not\subseteq N , Y \not\subseteq X , (N \,\dot{.}\, \mathfrak{a}) \cap X \not\subseteq N\} \\ &\iff \{(N \,\dot{.}\, \mathfrak{a}) \cap X = N \implies X = N\} . \end{aligned}$$

PROPOSITION 9. - Un élément $Q \in L$ est tertiaire si et seulement s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

(1) $\mathfrak{a}X \subseteq Q$, $X \not\subseteq Q \implies \mathfrak{a} \subseteq R_3(Q)$;

(2) $(Q \mathbin{.\!\cdot} \mathfrak{a}) \supset Q \implies \mathfrak{a} \subseteq R_3(Q)$;

(3) $(Q \mathbin{.\!\cdot} \mathfrak{a}) \supset Q$, $(Q \mathbin{.\!\cdot} \mathfrak{a}) \cap X = Q \implies X = Q$.

Soit Q tertiaire, et $\mathfrak{a}X \subseteq Q$, $X \not\subseteq Q$. On peut supposer $X \supset Q$ (en considérant $Q + X$). Il existe alors $Q \subset Y \subseteq X$ tel que $\{\mathfrak{P}\} = \mathrm{Ass}(U/Q) = \{Q \mathbin{.\!\cdot} Y\}$.

On a donc

$$\mathfrak{a} \subseteq Q \mathbin{.\!\cdot} X \subseteq Q \mathbin{.\!\cdot} Y = \mathfrak{P} = R_3(Q) .$$

Supposons que Q vérifie (1), et soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(U/Q)$. Il existe donc $X \supset Q$, $\mathfrak{P}X \subseteq Q$. Il en résulte :

$$\mathfrak{P} \subseteq R_3(Q) ,$$

d'où

$$\mathfrak{P} = R_3(Q) ,$$

et Q est $\mathfrak{P}$-tertiaire.

(2) est trivialement équivalente à (1).

(3) équivaut à (2) d'après la caractérisation de $R_3(Q)$ vue en remarque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).

[2] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).