SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

MARCEL P. SCHÜTZENBERGER

Langages formels et monoïdes finis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, n° 2 (1969-1970), exp. n° DG 3, p. DG1-DG3

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70
Demi-groupes, n° 3, 3 p.

LANGAGES FORMELS ET MONOÏDES FINIS

par Marcel P. SCHÜTZENBERGER

L'une des problématiques de ce que l'on appelle la théorie des automates et des langages formels, consiste en l'étude des relations qu'entretiennent certaines parties d'un monoïde libre, X^* , et les monoïdes abstraits définis par le monoïde syntactique de ces dernières. (Rappelons ici que si A est une partie d'un monoïde M , le monoïde syntactique $M//A$ est le quotient de M par la plus grande congruence dont A est une union de classes.)

La légitimité de ce projet repose sur le théorème de Kleene qui caractérise de façon très remarquable les parties dont le monoïde syntactique est fini (les parties "reconnaissables" au sens de S. EILENBERG). Pour l'énoncer, appelons rationnelle la plus petite famille de parties $\mathcal{R} = \text{Rat}(M)$ d'un monoïde M qui satisfasse les trois conditions suivantes :

(1) $$\{\emptyset\} \in \mathcal{R} \; ; \quad m \in M \implies \{m\} \in \mathcal{R} \, .$$

(2) $$A \, , B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R} \text{ et } AB \in \mathcal{R} \, .$$

(3) $$A \in \mathcal{R} \implies A^* \in \mathcal{R} \, ,$$

où A^* désigne le sous-monoïde engendré par A .

Ceci posé, on a :

THÉORÈME (KLEENE). - *Soit X^* un monoïde libre finiment engendré. $\text{Rat}(X^*)$ est la famille des parties reconnaissables de X^* .*

Il est important de souligner le rôle critique joué par l'hypothèse que X^* est un monoïde libre (finiment engendré). Sans celle-ci, le théorème n'est plus valable, et il en résulte que la théorie générale des objets rationnels et reconnaissables, qu'a développée S. EILENBERG, n'a que bien peu à faire de la notion de monoïde syntactique. Pour cette raison, je me limiterai ici au cas du monoïde libre X^* .

Mise à part cette direction de recherches, deux séries de questions se posent selon que l'on part du monoïde fini $X^*//A$, ou au contraire des parties $A \subset X^*$.

La première voie est la plus évidente : elle consiste à étudier comment les propriétés algébriques classiques (idéaux, groupes, etc.) d'un monoïde fini M , se reflètent dans la structure des parties $A \subset X^*$ dont M est le monoïde syntactique. Par exemple, McNAUGHTON et TRACHTENBROT ont considéré celles dont tous les groupes de M sont triviaux. On peut vérifier que cette sous-famille $\mathcal{R}' \subset \underset{\sim}{\mathrm{Rat}}(X^*)$ est définie par les conditions (1) et (2) ci-dessus et la nouvelle condition :

(4) $$A \in \mathcal{R}' \implies X^* \setminus A \in \mathcal{R}' ,$$

remplaçant (3).

De même, l'on peut se demander quelles sont les parties de X^* dont le monoïde syntactique est un groupe, ou un monoïde de Clifford, ou un monoïde inverse, etc. Il n'est pas surprenant que les concepts fondamentaux introduits par P. DUBREIL, dans son mémoire de 1940, jouent un rôle important dans ces recherches. Il est d'ailleurs intéressant de noter que les monoïdes infinis les plus remarquables (groupe libre, monoïde bicyclique) se rencontrent comme monoïdes syntactiques de certaines parties de X^* qui jouent un rôle de base dans la théorie de la famille $\underset{\sim}{\mathrm{Alg}}(X^*)$ des parties dites algébriques de X^*, généralisation naturelle de $\underset{\sim}{\mathrm{Rat}}(X^*)$.

A ces questions se rattache, je crois, la discussion des décompositions de M par produit direct et produit en couronne, qu'a si brillamment effectuée J. RHODES.

Je passe maintenant à la deuxième des voies de recherches, que j'indiquais plus haut, et qui offre peut-être des points de vue plus originaux par rapport à la théorie algébrique classique.

En effet, la structure de monoïde libre de X^* privilégie certaines notions, dont la contre-partie dans les monoïdes abstraits est assez cachée.

Par exemple, il paraît naturel d'étudier les monoïdes syntactiques des sous-monoïdes de X^* qui sont finiment engendrés, et il est curieux que ceux-ci ne soient des groupes que s'ils sont cycliques.

D'autre part, on peut faire intervenir la notion de partie (rationnelle) non ambigüe en restreignant les unions aux parties disjointes, les produits AB au cas où

$$a , a' \in A , \quad bb' \in B , \quad ab = a'b' \implies a = a' , \quad b = b' ,$$

et les sous-monoïdes A^* au cas où A^* est libre et librement engendré par A.

Le résultat fondamental, dû à N. CHOMSKY, est que toute partie rationnelle de X^* peut être présentée comme une partie rationnelle non ambigüe. Le même énoncé vaut pour les monoïdes commutatifs (S. EILENBERG et M. P. SCHÜTZENBERGER).

Combinant maintenant les deux conditions d'engendrement fini et de non-ambigüité, l'on se trouve amené à étudier en profondeur les sous-monoïdes libres finiment engendrés de X^* et leurs monoïdes syntactiques. Des résultats forts surprenants ont été obtenus par J.-F. PERROT, qui a montré que les groupes de Suschkewitsch de ces derniers étaient extrêmement particuliers, et il y a là, je crois, tout un domaine important de recherches.

Dans une direction voisine, G. VIENNOT a considéré les factorisations non ambigües de X^* en produits de sous-monoïdes libres, $X^* = A^* B^*$; ou plus généralement, $X^* = A^* B^* \dots C^*$.

Cette question apparait de façon naturelle dans bien d'autres structures algébriques. Par exemple, en utilisant une méthode due à M. LAZARD, on peut la rattacher au problème de la recherche des bases monomiales des algèbres de Lie libres (et réciproquement).

Elle joue de façon évidente un rôle important dans la théorie des décompositions de Rhodes, et elle semble sous-jacente à l'étude de certaines relations d'ordre sur les représentations des monoïdes syntactiques, c'est-à-dire, suivant la terminologie d'usage, des automates finis.

Marcel P. SCHÜTZENBERGER
Prof. Fac. Sc. Paris
9 villa Poirier
75 - PARIS 15

(Texte reçu le 3 novembre 1970)