

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

KLAUS KEIMEL

## Un théorème sur les demi-groupes compacts commutatifs

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 23, n° 2 (1969-1970), exp. n° DG 4, p. DG1-DG4

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1969-1970\\_\\_23\\_2\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A4_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN THÉORÈME SUR LES DEMI-GROUPES COMPACTS COMMUTATIFS

par Klaus KEIMEL

### 1. Le but.

Dans la théorie des demi-groupes topologiques, on considère que la structure d'un demi-groupe est connue si l'on peut décrire le demi-groupe par exemple en termes de groupes topologiques et cônes convexes. Dans une certaine mesure, cela est possible pour un demi-groupe vérifiant les hypothèses ci-dessous.

Nos résultats constituent une généralisation et une synthèse de résultats de D. R. BROWN et M. FRIEDBERG [1], J. M. DAY [2], J. A. HILDEBRANT [3] et de l'auteur [4]. Ici, nous énoncerons nos résultats. On trouvera les démonstrations complètes dans [5].

### 2. Les hypothèses.

Dans cette communication, soit  $S$  toujours un demi-groupe compact commutatif ayant un élément unité  $1$  et un élément zéro  $0$ , mais pas d'autre élément idempotent.

Le groupe  $H$  des unités de  $S$  opère de manière naturelle sur  $S$ . L'ensemble des orbites  $xH$ ,  $x \in S$ , est un demi-groupe compact pour la topologie quotient et la multiplication quotient; nous le désignerons par  $S/H$ . Soit  $\eta: S \rightarrow S/H$  l'homomorphisme canonique  $x \mapsto xH$ . Notons que  $S/H = S/\mathcal{R}$ , où  $\mathcal{R}$  est la relation de Green habituelle.

Nous supposerons toujours que le demi-groupe compact  $S/H$  est de dimension finie et divisible; la divisibilité signifie que, pour tout  $a \in S/H$ , et tout entier positif  $n$ , il existe  $b \in S/H$  tel que  $b^n = a$ .

Remarque. - Au lieu de supposer que  $S/H$  est de dimension finie et divisible, on pourrait supposer que  $S$  vérifie ces hypothèses sans que les résultats soient modifiés.

### 3. Une convention.

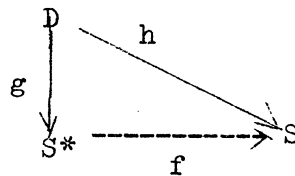
Nous appellerons cône, tout cône convexe fermé  $C$  dans un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie tel que  $C \cap (-C) = \{0\}$ . Un cône local sera l'intersection d'un cône  $C$  avec un voisinage de  $0$  dans  $V$ , par exemple avec la boule unité.

Tout cône  $C$  est un demi-groupe topologique. L'addition sur  $C$  peut être prolongée de manière unique au compactifié  $C^*$  de  $C$  par un point  $\infty$ ; et  $C^*$  est un demi-groupe compact.

4. Les résultats.

Un demi-groupe compact  $S$  vérifiant les hypothèses ci-dessus possède les propriétés suivantes :

1° Il existe un demi-groupe compact commutatif  $u$ -divisible  $S^*$ , et un homomorphisme continu  $f : S^* \rightarrow S$  qui possède la propriété universelle suivante : Pour tout demi-groupe compact commutatif  $u$ -divisible  $D$  et tout homomorphisme continu  $h : D \rightarrow S$ , il existe un homomorphisme continu  $g : D \rightarrow S^*$  tel que  $h = f \circ g$  :



Remarque. - On dit que  $S^*$  est  $u$ -divisible si, pour tout  $a \in S^*$  et tout entier positif  $n$ , il existe un unique élément  $b \in S^*$  tel que  $b^n = a$ .

2° Soit  $H^*$  le groupe des unités de  $S^*$ , alors :

- (a) Il existe un cône  $C$  tel que  $S^*/H^*$  soit isomorphe à  $C^*$ ,
- (b)  $S^*$  est isomorphe au quotient de Rees  $(H^* \times C^*) / (H^* \times \{\infty\})$ ,
- (c) L'application canonique  $\eta^* : S^* \rightarrow S^*/H^*$  correspond à la projection  $pr_2 : H^* \times C^* \rightarrow C^*$ .

3° L'homomorphisme continu  $f : S^* \rightarrow S$  induit un homomorphisme continu  $\bar{f} : S^*/H^* \rightarrow S/H$  défini par  $\bar{f}(xH^*) = f(x)H$ . On a :

(a)  $\bar{f}$  est un isomorphisme local dans le sens que les éléments unités de  $S^*/H^*$  et  $S/H$  ont des voisinages  $U$  et  $V$  respectivement tels que  $\bar{f}|_U : U \rightarrow V$  soit un homéomorphisme. Dans un voisinage de 1,  $S/H$  est donc un cône local (algébriquement et topologiquement).

(b)  $S$  contient un demi-groupe local compact  $W$  tel que  $\eta|_W : W \rightarrow V$  soit un isomorphisme local. Donc localement dans un voisinage de 1, l'opération naturelle de  $H$  sur  $S$  admet une section (continue et homomorphe).

(c) Si  $S/H$  est  $u$ -divisible, alors  $\bar{f} : S^*/H^* \rightarrow S/H$  est un isomorphisme, et  $\eta : S \rightarrow S/H$  admet une section globale (continue et homomorphe).

4° Supposons que  $S$  vérifie aussi la propriété suivante :

(D) Pour tout  $0 \neq x \in S$  et tout  $h \in H$ ,  $(xh = x)$  entraîne  $(h = 1)$ .

(a) Alors  $S$  est dans un voisinage de  $1$  localement isomorphe au produit direct  $H \times U$  du groupe  $H$  des unités avec le cône local  $U$ .

(b) Si de plus  $S/H$  est  $u$ -divisible, alors  $S$  est isomorphe à  $(H \times C^r)/(H \times \{\infty\})$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 (H^* \times C^r)/(H^* \times \{\infty\}) \cong S^* & \xrightarrow{f} & S & & \\
 \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow \eta & \cong & \downarrow \eta|_W \\
 C^r & \cong & S^*/H^* & \xrightarrow{\bar{f}} & S/H & \cong & Y \\
 & & \cong & & \cong & & \\
 & & U & \xrightarrow{\bar{f}|_U} & & & 
 \end{array}$$

5. Une question.

Si  $S$  vérifie les hypothèses ci-dessus, l'application canonique  $\eta : S \rightarrow S/H$  admet-elle toujours une section globale (homomorphe et continue) ?

Dans [5], une question plus particulière a été posée, et J. M. DAV nous a communiqué un contre-exemple. Une modification légère de cet exemple nous permet de répondre négativement à la question posée ci-dessus.

6. Un contre-exemple.

Désignons par  $\underline{H}$  le demi-groupe additif des nombres réels non négatifs. Soit  $G = \{1, -1\}$  le groupe à deux éléments. Soit  $T$  le demi-groupe compact produit  $G \times (\underline{H} \times \underline{H})^*$ . Soit  $\rho$  la plus petite congruence fermée sur  $T$  telle que

$$(1, 1, 0) \rho (-1, 0, 1).$$

Pour tout  $a \in T$ , soit  $\bar{a}$  sa  $\rho$ -classe. Désignons par  $S$  le demi-groupe quotient  $T/\rho$ . Alors  $S$  vérifie les hypothèses.  $T/G$  peut être identifié à  $(\underline{H} \times \underline{H})^*$  et  $S/H$  peut être identifié au quotient  $(\underline{H} \times \underline{H})^*/\bar{\rho}$ , où  $\bar{\rho}$  est la plus petite congruence fermée sur  $(\underline{H} \times \underline{H})^*$  telle que

$$(1, 0) \bar{\rho} (0, 1).$$

Remarquons que la restriction de  $\eta$  à  $\{1\} \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$  est injective, et que toute section pour  $\eta$  coïncide nécessairement avec l'inverse de cette restriction (dans un voisinage de  $0$ ). On en déduit qu'une section globale ne peut pas exister car  $(1, 0) \bar{\rho} (0, 1)$ , mais  $(1, 1, 0) \not\rho (1, 0, 1)$ .

Dans l'exemple ci-dessus, le groupe des unités de  $S$  n'est pas connexe. On peut construire un autre contre-exemple où le groupe des unités est connexe : soient  $G$  le groupe des nombres complexes de module 1, et  $T = G \times (\underline{\mathbb{H}} \times \underline{\mathbb{H}})^{\times}$ . Soit  $\rho$  la plus petite congruence fermée sur  $T$  telle que

$$(1, 0, 1) \rho (-1, 1, 0) \text{ et } (1, 0, e) \rho (-1, e, 0),$$

où  $e$  est un nombre irrationnel. Soit  $S = T/\rho$ . Alors  $S$  vérifie les hypothèses, et  $\eta : S \rightarrow S/H$  n'admet pas de section globale.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWN (D. R.) and FRIEDBERG (M.). - Representation theorems for uniquely divisible semigroups, Duke math. J., t. 35, 1968, p. 341-352.
- [2] DAY (J. M.). - Compact semigroups with square roots, Pacific J. Math. (à paraître).
- [3] HILDEBRANT (J. A.). - On compact divisible abelian semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 19, 1968, p. 405-410.
- [4] KEIMEL (K.). - Eine Exponentialfunktion für kompakte Abelsche Halbgruppen, Math. Z., t. 97, 1967, p. 7-25.
- [5] KEIMEL (K.). - A cross section theorem for certain compact abelian semigroups, Semigroup Forum, t. 1, 1970 (à paraître)

(Texte reçu le 5 octobre 1970)

Klaus KEIMEL  
 M. Conf. assoc. C. S. U. Tours  
 22 rue des Bas-Longchamps  
 92 - BAGNEUX

---