

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

THOMAS S. BLYTH

Images homomorphes, ordonnées en treillis des demi-groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, n° 2 (1969-1970), exp. n° DG 8, p. DG1-DG5

http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IMAGES HOMOMORPHES, ORDONNÉES EN TREILLIS
 DES DEMI-GROUPES ORDONNÉS

par Thomas S. BLYTH

La recherche des groupes ordonnés, qui sont des images d'un demi-groupe ordonné S par un homomorphisme isotone, a déjà fait l'objet d'une étude complète. Nous considérons ici le cas analogue des homomorphismes isotones qui appliquent un demi-groupe ordonné sur une algèbre de Boole.

Rappelons quelques définitions. Si S est un demi-groupe ordonné, alors l'ensemble $P(S)$ des parties de S est un demi-groupe par rapport à la multiplication suivante :

$$\begin{cases} XY = \{xy ; x \in X, y \in Y\} , \\ X\emptyset = \emptyset = \emptyset X . \end{cases}$$

Ce demi-groupe est un demi-groupe ordonné par rapport à l'inclusion ensembliste, et est aussi résidué au sens que, quels que soient $X, Y \in P(S)$, les éléments

$$X \dot{\cdot} Y = \max\{Z \in P(S) ; YZ \subseteq X\} \quad \text{et} \quad X \dot{\cdot} Y = \max\{Z \in P(S) ; ZY \subseteq X\}$$

existent. Un sous-ensemble non vide H d'un demi-groupe ordonné S est appelé réflexif, si, et seulement si, quel que soit $x \in S$, $H \dot{\cdot} \{x\} = H \dot{\cdot} \{x\}$ (et dans ce cas, nous écrivons $H:\{x\}$). Associée à un sous-ensemble réflexif H , nous avons l'équivalence de Dubreil R_H définie par $x \equiv y (R_H) \iff H:\{x\} = H:\{y\}$. Dans le problème des homomorphismes sur un groupe, cette équivalence était la clé de voûte de la solution ; nous verrons qu'il en est de même dans le problème analogue des homomorphismes sur une algèbre de Boole. Nous dirons qu'un sous-ensemble non vide H de S est un idéal double de S , si, et seulement si, H est à la fois un idéal bilatère de S (c'est-à-dire $HS \subseteq H$ et $SH \subseteq H$) et un idéal de l'ensemble ordonné S (c'est-à-dire $x \in H$ et $y \leq x$ impliquent $y \in H$). Si L est un \cap -demi-treillis, nous dirons qu'une application $f : S \rightarrow L$ est un homomorphisme, si, et seulement si, $\forall x, y \in S, f(xy) = f(x) \cap f(y)$.

THÉOREME 1. - Soit S un demi-groupe ordonné, et soit H un sous-ensemble non vide de S tel que :

- (1) H est un idéal double réflexif de S ;
- (2) $\forall x \in S, H:\{x\} = H:\{x^2\}$.

Alors l'équivalence de Dubreil R_H est une congruence, et S/R_H est un \wedge -demi-treillis à élément nul $G_H = \{x \in S ; H:\{x\} = S\} = H:S$, et l'application canonique $h_H : S \rightarrow S/R_H$ est un épimorphisme isotone. Le \wedge -demi-treillis S/R_H est un treillis, si, et seulement si, H satisfait en plus à la propriété suivante :

$$(3) \quad \forall x, y \in S, \exists z \in S \text{ tel que } H:\{x, y\} = H:\{z\} ;$$

et si S/R_H est un treillis, il est nécessairement distributif. Inversement, si L est un treillis distributif à élément nul, et si $f : S \rightarrow L$ est un épimorphisme isotone, alors $\text{Ker } f = \{x \in S ; f(x) = 0_L\}$ satisfait aux propriétés (1), (2), et (3).

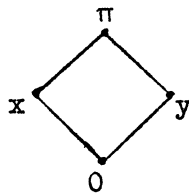
Remarques.

1° Si S est a priori ordonné en \cup -demi-treillis, on peut remplacer la condition (3) par la condition suivante :

$$(3') \quad H:\{x \cup y\} = H:\{z\} .$$

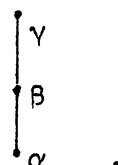
Si S est un gerbier, la propriété (3') est automatiquement vérifiée.

2° Il est faux, en général, que tout treillis distributif à élément nul, qui est image homomorphe de S , soit de la forme S/R_H , où H satisfait aux propriétés (1), (2), (3). Par exemple, soit S le demi-groupe ordonné dont le tableau de Cayley et le diagramme de Hasse sont les suivants :



	π	x	y	0
π	π	x	0	0
x	x	x	0	0
y	0	0	0	0
0	0	0	0	0

et soit L le treillis distributif à élément nul dont le diagramme de Hasse est :



L'application $f : S \rightarrow L$, définie par $f(\pi) = \gamma$, $f(x) = \beta$, $f(0) = f(y) = \alpha$, est un épimorphisme isotone. Cependant il est facile de vérifier que les seuls sous-ensembles H de S qui satisfont aux propriétés (1), (2), (3) sont les ensembles $\{0\}$, $\{0, x\}$, $\{0, y\}$, $\{0, x, y\}$, S , et pour chacun de ces sous-ensembles, l'ensemble quotient S/R_H n'a au plus que deux éléments.

Un sous-ensemble non vide H de S qui satisfait aux propriétés (1), (2), et (3) ci-dessus sera appelé une pré-base de S . Une pré-base H de S sera appelée forte, si, et seulement si, $H = H:S$.

THÉOREME 2. - Si H est une pré-base de S , alors $H:S$ est une pré-base forte. Pour toute pré-base forte H de S , le treillis $L = S/R_H$ est faiblement complé-
menté (c'est-à-dire, $\forall a, b \in L, a \neq b, \exists c \in L$ tel que $a \cap c = 0$ et $b \cap c \neq 0$). Tout treillis faiblement complé-
menté et distributif L , qui est image
homomorphe de S , est de la forme S/R_H , où H est une pré-base forte de S , et
il y a une bijection entre l'ensemble de telles images et l'ensemble des pré-bases
fortes de S .

COROLLAIRE. - Un treillis L à élément nul 0 est 0 -distributif (c'est-à-dire,
 $a \cap x = 0$ et $a \cap y = 0$ impliquent $a \cap (x \cup y) = 0$), si, et seulement si, $R_{\{0\}}$
est une congruence, et $L/R_{\{0\}}$ est faiblement complé-
menté et distributif.

Pour obtenir les quotients qui sont des algèbres de Boole, nous avons besoin de la notion suivante. Un sous-ensemble non vide H de S sera appelé une base de S , si, et seulement si, H est tel que :

- (1) H est un idéal double réflexif de S ;
- (2) $\forall x \in S, H:\{x\} = H:\{x^2\}$;
- (3) $\forall x \in S, \exists x^0 \in S$ tel que $H:(H:\{x\}) = H:\{x^0\}$.

THÉOREME 3. - Si H est une base de S , alors S/R_H est une algèbre de Boole. Toute algèbre de Boole qui est image homomorphe de S est de la forme S/R_H , où H est une base de S , et il y a une bijection entre l'ensemble des homomorphismes isotones de S sur une algèbre de Boole et l'ensemble des bases fortes de S .

COROLLAIRE. - Un treillis L à élément nul 0 est 0 -distributif et quasi-
complé-
menté (c'est-à-dire, $\forall x \in L, \exists x^0 \in L$ tel que $x \cap x^0 = 0$ et $x \cup x^0$
est dense), si, et seulement si, $R_{\{0\}}$ est une congruence, et $L/R_{\{0\}}$ est une al-
gèbre de Boole.

Renforçons maintenant la notion d'homomorphisme. Soient E, F deux ensembles ordonnés. Une application $f: E \rightarrow F$ est appelée résiduée, si, et seulement si, elle est isotone, et il existe une application isotone (nécessairement unique) $f^+: F \rightarrow E$, telle que $f^+ \circ f \geq id_F$ et $f \circ f^+ \leq id_E$ [autrement dit : si, et seulement si, $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f^+[\leftarrow, y] = [\leftarrow, x]$; ou bien : si, et seulement si, $\forall y \in F, \max\{x \in E ; f(x) \leq y\}$ existe].

THÉORÈME 4. - Soit S un demi-groupe ordonné, et soit B une algèbre de Boole.
Si $f : S \rightarrow B$ est un épimorphisme isotone, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est résidué ;
- (2) $\text{Ker } f$ admet un élément maximum qui est équirésiduel.

Les théorèmes 3 et 4 donnent le résultat suivant.

THÉORÈME 5. - Un demi-groupe ordonné S admet une algèbre de Boole comme image par un homomorphisme résidué, si, et seulement si, S admet un élément t tel que :

- (1) t est quasi-intègre [$\forall x \in S, xt \leq t, tx \leq t$] ;
- (2) t est équi-résiduel ;
- (3) $\forall x \in S, t:x = t:x^2$.

Toute algèbre de Boole qui est image de S par un homomorphisme résidué est de la forme S/A_t (où A_t est l'équivalence de Molinaro définie par

$$x \equiv y (A_t) \iff t:x = t:y ,$$

pour un élément t qui satisfait aux propriétés (1), (2), (3), et il y a une bijection entre l'ensemble de telles images et l'ensemble des éléments t qui satisfont à (1), (2), (3), et à :

- (4) $t = t:(t:t)$.

COROLLAIRE. - Soit S un \cap -demi-treillis. Il y a une bijection entre l'ensemble des épimorphismes résidués de S sur une algèbre de Boole et l'ensemble des éléments de S qui sont résidués.

Appelons maintenant demi-groupe de Brouwer, un demi-groupe ordonné dans lequel tout élément satisfait aux propriétés (1), (2), (3) du théorème 5. En particulier, tout demi-treillis de Brouwer (demi-treillis implicatif) est demi-groupe de Brouwer. Le résultat suivant caractérise ces demi-groupes.

THÉORÈME 6. - Un demi-groupe ordonné S est un demi-groupe de Brouwer, si, et seulement si, S est abélien, résidué, et tel que

$$\forall x \in S, \quad B_x = F_x \quad \text{et} \quad S/F_x \quad \text{est idempotent}$$

(où B_x et F_x sont les équivalences de Molinaro définies par

$$a \equiv b (B_x) \iff a:x = b:x \quad \text{et} \quad a \equiv b (F_x) \iff ax = bx) .$$

La condition que chaque demi-groupe quotient S/F_x soit idempotent (rencontrée dans le résultat précédent) implique beaucoup sur la structure du demi-groupe, comme l'indique le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Soit S un demi-groupe abélien. Alors S est un demi-treillis de 0-demi-groupes, si, et seulement si, chaque demi-groupe quotient S/F_x est idempotent.

Ce résultat nous permet de décrire complètement la structure des demi-groupes de Brouwer.

THÉORÈME 8. - S est un demi-groupe de Brouwer, si, et seulement si, S est un demi-treillis de Brouwer de 0-demi-groupes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLYTH (T. S.). - On isotone homomorphic boolean images of ordered semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Section A, t. 68, 1970, p. 211-228.
- [2] BLYTH (T. S.). - Homomorphic images of \cup -semigroups, Bull. Soc. royale Sc. Liège, t. 38, 1969, p. 149-154.
- [3] BLYTH (T. S.). - Sur les demi-groupes de Brouwer et Glivenko, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 15-40.
- [4] JANOWITZ (M. F.) and JOHNSON (C. S., Jr). - A note on Brouwerian and Glivenko semigroups, J. of London math. Soc., Series 2, t. 1, 1969, p. 733-736.

(Texte reçu le 5 octobre 1970)

Thomas S. BLYTH
 Mathematical Institute
 University of St-Andrews
 St-ANDREWS, Scotl. (Grande-Bretagne)
