Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Guérindon

Groupes de Picard et séries formelles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. nº 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A4_0>

5 février 1973

GROUPES DE PICARD ET SÉRIES FORMELLES

par Jean GUÉRINDON

Introduction.

Les groupes de Picard des anneaux de polynômes et de séries formelles ont été étudiés notamment par AREZZO, GRECO, BASS et MURTHY, et par P. SALMON (cf. Bibliographie). Ces groupes sont faciles à déterminer sur des anneaux qui sont construits à partir d'anneaux locaux ou localement factoriels. Dans le cas d'un anneau R de séries restreintes, en général il y a peu de résultats connus ; autrement dit, on ne connaît que peu d'entre eux qui soient factoriels ou localement factoriels. On donnera, dans cet exposé, quelques résultats concernant le cas d'un anneau de base régulier et une topologie I-adique (théorèmes 1 et 2), puis le cas d'un anneau de base noethérien normal et un anneau R voisin de l'anneau des polynômes (théorème 4). On rappelle d'abord brièvement les propriétés connues sur les groupes de Picard (cf. § 1), et on pose plusieurs problèmes dans le paragraphe 3.

1. Groupes de Picard.

Les notations seront les suivantes. Si A est un anneau commutatif, unitaire et intègre, on désigne par D(A) le monoïde des classes d'idéaux fractionnaires modulo l'équivalence d'Artin, C(A) = D(A)/S est le quotient par le monoïde des classes d'idéaux principaux S , J(A) est le groupe multiplicatif des idéaux fractionnaires inversibles ; ce dernier groupe J(A) s'envoit canoniquement sur un sous-groupe de D(A)/S (cf. BOURBAKI [2], chapitres 2 et 7) qui, écrit additivement, se notera Pic A .

On identifie canoniquement Pic A au groupe des classes d'isomorphie des A-modules projectifs de rang 1 , l'addition en Pic A étant associée au produit tensoriel de A-modules.

Si E et F sont projectifs de rang 1 et $\bar{E}$, $\bar{F}$ leurs classes d'isomorphie, on a

$$\bar{E} + \bar{F} = \overline{E \otimes_A F} .$$

Si f : A ⟶ B est un homomorphisme unitaire d'anneaux commutatifs, on définit un homomorphisme canonique $\tilde{f}$ de groupes additifs au moyen de la formule

$$\tilde{f}(\bar{E}) = \overline{E \otimes_A B} ,$$

E étant A-projectif et $E \otimes_A B$ étant B-projectif à droite.

Les résultats suivants sont dus à AREZZO et GRECO (cf. [1] pour les démonstrations) :

Les homomorphismes canoniques $\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[X]$ et $\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[[X]]$ sont injectifs, le second étant un isomorphisme (pas le premier en général).

Si I est un idéal de A, si I est contenu dans le radical de Jacobson de A, et si f est $A \to A/I$ canonique, alors f^* : $\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}(A/I)$ est injectif.

Si $\hat{A}$ est le séparé-complété de A pour la topologie I-adique, alors

$$\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, \hat{A}$$

est injectif. Il y a un isomorphisme f^* si A est complet et séparé

$$f : \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A/I ,$$

et plus généralement si le couple (A , I) vérifie la condition de Hensel (A est séparé et complet pour une topologie dont une base est formée de sous-groupes additifs, I est fermé et topologiquement nilpotent).

Si $C(A)$ est le monoïde des classes de diviseurs de l'anneau intègre on voit que A est localement factoriel (relativement aux idéaux maximaux) si, et seulement si $C(A)$ est isomorphe canoniquement à $\mathrm{Pic}\, A$. Dans ce cas, $\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[X]$ est bijective.

Si A est noethérien intègre, $\mathrm{Pic}\, A = 0$ équivaut à dire que tout idéal inversible est libre, ou encore que tout idéal projectif est libre. On a alors $\mathrm{Pic}\, A = 0$ pour A semi local intègre (en fait "indécomposable" suffit d'après HINOHARA) (cf. GRECO-SALMON [7]).

D'un autre côté, la K-théorie fournit un résultat important, dû à BASS et MURTHY (cf. [2], Cor. 5.10, p. 35) : si A est un anneau de Krull

$$\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[X_1 , \ldots , X_n]$$

est un isomorphisme.

Ce résultat ne subsiste pas si A est quelconque. P. SALMON (Singolarita e gruppo di Picard, Symposia [1968. Gubbio]) a donné un contre-exemple avec A anneau local d'un point double non nodal d'une courbe algébrique.

Lorsque la flèche $A \to B$ est plate (B est un A-module plat), et si A et B sont des anneaux de Krull, alors $C(A) \to C(B)$ canonique est obtenue par passage au quotient (relativement aux idéaux principaux) de l'application $I \to \widetilde{IB}$ (I idéal divisoriel de A , $\widetilde{IB}$ = classe de IB).

2. Séries formelles. Cas d'une topologie I-adique.

Soient τ_1 et τ_2 deux topologies linéaires (cf. [3] et [9]) sur A telles que τ_1 soit plus fine que τ_2 $(\tau_1 < \tau_2)$, et soient δ la topologie discrète, ω la topologie grossière. Pour toute topologie linéaire τ , soit $A_\tau\{X\}$ $(X = X_1 , \ldots , X_n)$ le sous-anneau de $A[[X_1 , \ldots , X_n]]$ des séries qui convergent (c'est-à-dire les séries restreintes) pour τ . On a $A_\delta\{X\} = A[X]$ (polynômes) et $A_\omega\{X\} = A[[X]]$.

On a les injections canoniques :

(1) $$A \xrightarrow{\lambda_0} A[X] \xrightarrow{\lambda_1} A_{\tau_1}\{X\} \xrightarrow{\lambda_2} A_{\tau_2}\{X\} \xrightarrow{\lambda_3} A[[X]] .$$

Le problème est d'étudier la suite des homomorphismes $\tilde{\lambda}_j$ $(j = 0 , 1 , 2 , 3)$ canoniques des groupes de Picard correspondants

(2) $$\mathrm{Pic}\, A \xrightarrow{\tilde{\lambda}_0} \mathrm{Pic}\, A[X] \xrightarrow{\tilde{\lambda}_1} \mathrm{Pic}\, A_{\tau_1}\{X\} \xrightarrow{\tilde{\lambda}_2} \mathrm{Pic}\, A_{\tau_2}\{X\} \xrightarrow{\tilde{\lambda}_3} \mathrm{Pic}\, A[[X]] .$$

On voit d'abord que si $A_{\tau_2}\{X\}$ est noethérien (c'est le cas si A est noethérien et τ_2 est I-adique), alors λ_3 est une flèche plate, car $A[[X]]$ est le complété (X)-adique de $A_{\tau_2}\{X\}$, donc il y a platitude. Il n'y a pas fidèle platitude (l'inverse de $1 - X$ de $A_{\tau_2}\{X\}$ est $1 + X + X^2 + \dots$ qui n'est en $A_{\tau_2}\{X\}$ que si λ_3 est l'identité).

Si A est noethérien et τ_1 I-adique, alors $A_{\tau_1}\{X\}$ est noethérien et λ_1 est plate. En effet $A_{\tau_1}\{X\}$ est le complété IX-adique de $A[X]$.

On voit, d'après le paragraphe 1, que dans le cas général la flèche composée $\theta = \tilde{\lambda}_3 \circ \tilde{\lambda}_2 \circ \tilde{\lambda}_1 \circ \tilde{\lambda}_0$ est un isomorphisme.

Supposons A noethérien, τ_1 I_1-adique, τ_2 I_2-adique ; quitte à remplacer I_1 et I_2 par des puissances, on peut supposer $I_1 \subseteq I_2$, car τ_1 est par hypothèse plus fine que τ_2 .

Si par exemple A est un anneau de Dedekind de caractéristique 0 (plus généralement si les fibres formelles de A en chaque idéal maximal sont géométriquement normales, cf. [7], prop. 12.6 12.7 et 15.8), alors $A[X]$, $A_{\tau_1}\{X\}$, $A_{\tau_2}\{X\}$ et $A[[X]]$ sont des anneaux noethériens de Krull, les flèches λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 sont plates. De plus, $\tilde{\lambda}_0$ est un isomorphisme, car A est un anneau de Krull (cf. § 1).

Lorsque A est un anneau régulier, $I_1 = I$ et $I_2 = A$, on a les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - Si A est un anneau intègre noethérien normal, tel que les fibres formelles de A en chaque idéal maximal soient géométriquement normales, alors pour la topologie I-adique, l'anneau des séries restreintes $A\{X\}$ est noethérien normal, $CA[X]$ est facteur direct de $CA\{X\}$, et $\mathrm{Pic}\, A[X]$ est facteur direct de $\mathrm{Pic}\, A\{X\}$.

En effet, $A\{X\}$ est le complété IX-adique de $A[X]$ dont les fibres relatives à ses idéaux maximaux sont géométriquement normales (cf. [7], prop. 12.7) et, de plus, $A\{X\}$ est un anneau de Krull (cf. [7], prop. 15.8). On a les homomorphismes de groupes

$$C(A) \xrightarrow{\gamma_0} C(A[X]) \xrightarrow{\gamma_1} C(A\{X\}) \xrightarrow{\gamma_2} C(A[[X]]) \xrightarrow{\gamma_3} C(A) ,$$

les anneaux étant tous des anneaux de Krull, γ_3 , étant l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $C(A) \xrightarrow{\sigma} CA[[X]]$, produit $\sigma = \gamma_2 \gamma_1 \gamma_0$ (cf. CLABORN [4], et

[1] prop. 2.18).

Comme γ_0 est un isomorphisme, et comme le produit $\gamma_0\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ est l'identité sur $CA[X]$, alors $CA[X]$ est facteur direct en $CA\{X\}$. D'autre part, on a

$$\mathrm{Pic}\,A \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Pic}\,A[X] \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Pic}\,A\{X\} \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{Pic}\,A[[X]] \xrightarrow{\pi_3} \mathrm{Pic}\,A\ ,$$

alors π_0 est un isomorphisme, car A est anneau de Krull, et π_3 l'isomorphisme réciproque de $\pi = \sigma_2\sigma_1\sigma_0$ (cf. § 1), et donc Pic $A[X]$ est facteur direct de Pic $A\{X\}$. Les hypothèses du théorème 1 sont réalisées si A est un anneau de Dedekind de caractéristique nulle. On a aussi le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - Soient A un anneau noethérien, semi-local et régulier, et τ sa topologie naturelle, alors $CA[X]$ est facteur direct de $C\{X\}$, Pic $A[X]$ est facteur direct de Pic $A\{X\}$, $A\{X\}$ étant l'anneau des séries restreintes pour la topologie τ.

On sait, d'après SALMON, que $A\{X\}$ est régulier (cf. [7]).

Soient $\{M_i\}$ $(i \in I)$ le spectre maximal de A, et $A_{M_i}\{X\}$ l'anneau des séries restreintes sur A_{M_i} (pour la topologie M_i A_{M_i}-adique). Ce dernier anneau est noethérien régulier pour tout i, et on a

$$A\{X\} = \cap_i A_{M_i}\{X\}\ .$$

Comme I est fini, $A\{X\}$ est un anneau de Krull. En écrivant les deux suites des (γ_i) et des (π_i) comme plus haut, on a le résultat.

En général, Pic $A \to$ Pic $A[T]$ n'est pas surjectif si A n'est pas normal (SALMON, loco citato), et Pic $A\{X\} \to$ Pic $A[[X]]$ peut être l'homomorphisme nul, si par exemple A est local régulier (factoriel), car on a Pic $A[[X]] = 0$. Par contre, dans le cas général où A est un anneau noethérien, Pic $A[[X]]$ est facteur direct de Pic $A\{X\}$, car Pic $A[[X]] \approx$ Pic A (cf. § 1), et Pic A est facteur direct de Pic $A\{X\}$.

3. Cas d'une topologie linéaire quelconque.

Lorsque la topologie linéaire τ considérée au paragraphe 2 n'est plus I-adique, on a peu de renseignements sur l'anneau des séries restreintes en $X=(X_1,\dots,X_n)$ sur A pour τ, $A_\tau\{X\}$, en particulier la flèche $\lambda_3 : A_\tau\{X\} \to A[[X]]$ n'est pas plate. Toutefois on a des résultats précis lorsque A est noethérien régulier (cf. [1]) ou en plus principal (cf. [8]).

Lorsque A est noethérien régulier, on a des isomorphismes canoniques.

$$C(A) \xrightarrow{\sim} CA[X] \xrightarrow{\sim} CA[[X]] \qquad \text{(cf. § 2)}. \tag{3}$$

Si on prend pour τ la topologie artinienne (ou naturelle) sur A, la suite canonique

$$\mathrm{Pic}\,A \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Pic}\,A[X] \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Pic}\,A_\tau\{X\} \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{Pic}\,A[[X]] \xrightarrow{\pi_3} \mathrm{Pic}\,A$$

a tous ses termes nuls sauf peut-être $\mathrm{Pic}\, A_\tau\{X\}$, car A et $A[X]$ sont localement factoriels, et π_3 est un isomorphisme. On ignore si $\mathrm{Pic}\, A_\tau\{X\}$ peut être non nul dans le cas général.

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $A[X]$. On a $\mathfrak{I}A[[X]] \cap A[X] \neq \mathfrak{I}$ en général. En effet, comme A est noethérien, $A[[X]]$ est plat sur $A[X]$, et comme il n'y a pas fidèle platitude, l'inégalité est vraie. Cela n'est plus vrai pour $A\{X\}$ comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - *Soit A un anneau de Dedekind de spectre infini, et soit τ sa topologie artinienne. Alors, pour tout idéal $\mathfrak{I}$ de $A[X]$, on a*

$$\mathfrak{I}A_\tau\{X\} \cap A[X] = \mathfrak{I} .$$

L'hypothèse faite sur A entraîne que τ est alors la restriction de la topologie artinienne de $A[X]$ à A. C'est la topologie finie $\mathfrak{T}$ sur A (cf. [8] et [9]), et on sait que, pour cette dernière, la proposition est valable (Corollaire du théorème 4.1.2 de [9]).

Lorsque A a un spectre premier fini, A est principal semi-local, et la topologie naturelle est R-adique si R est le radical de Jacobson de A. Alors $A\{X\}$ est plat sur $A[X]$ comme complété RX-adique. Comme il n'y a pas fidèle platitude, le résultat du théorème n'est plus vrai.

Soit alors A un anneau noethérien de Krull. Appelons quasi-polynôme une série restreinte en $X = (X_1, \ldots, X_n)$ qui converge sur la topologie finie $\mathfrak{T}$, restriction de la topologie artinienne sur $A[X_1, \ldots, X_n]$.

THÉORÈME 4. - *Si A est noethérien de Krull, et si $A\{X\}$ est l'anneau des quasi-polynômes sur A, $\mathrm{Pic}\, A[X]$ est facteur direct en $\mathrm{Pic}\, A\{X\}$.*

Soit en effet Γ le monoïde des diviseurs de $A[X]$, Γ' celui de $A\{X\}$. On sait qu'il y a une injection canonique de Γ en Γ' (cf. [8]). Comme on a, pour tout idéal entier $\mathfrak{I}$ de $A[X]$, l'égalité $\mathfrak{I}A\{X\} \cap A[X]$ (cf. corollaire du théorème 4.1.2 de [9]), on a une injection canonique des monoïdes de classes de diviseurs $CA[X] \hookrightarrow CA\{X\}$.

Soit alors $\mathfrak{I}$ un idéal entier inversible de $A[X]$. Alors $\mathfrak{I}A\{X\}$ est inversible en $A\{X\}$, et donc l'homomorphisme canonique $\pi_r : \mathrm{Pic}\, A[X] \to \mathrm{Pic}\, A\{X\}$ est injectif. Or A étant un anneau de Krull, $\pi_0 : \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[X]$ est bijectif (cf. § 2). La suite (4) montre que $\pi_0\, \pi_3\, \tau_2\, \tau_1$ est l'identité sur $A[X]$, et donc $\mathrm{Pic}\, A[X]$ est facteur direct en $\mathrm{Pic}\, A\{X\}$.

Remarque. - Dans le cas où A est régulier, A est localement factoriel, et on a $\mathrm{Pic}\, A = \mathrm{Pic}\, A[X] = \mathrm{Pic}\, A[[X]] = 0$. On ignore si dans ce cas $\mathrm{Pic}\, A\{X\}$ est non nul et si $A\{X\}$ est complètement intégralement clos (ce dernier point est vrai si A est principal d'après l'exposé [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AREZZO (M.), GRECO (S.). - Sul gruppo delle classi di ideali, Annali della Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. di Sc. t. 21, 1967, p. 459-483.

[2] BASS (H.) and MURTHY (M. P.). - Of abelian group rings, Grothendieck groups and Picard groups, Annals of Math., t. 86 1967, p. 16-73.

[3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. - Paris, Hermann, 1961-1965 (Act. scient. et ind., 1290, 1293, 130 et 1314 ; Bourbaki, 27, 28, 30 et 31).

[4] CLABORN (L.). - Note generalizing a result of Samuel, Pacific J. Math., t. 15, 1965, p. 805-808.

[5] ENDO (S.). - Projective modules over polynomial rings, J. Math. Soc. Japan, t. 15, 1963, p. 339-352.

[6] GRECO (S.). - Sugli ideali frazionari invertibili, Rend. Semin. Math. Univ. Padova, t. 36, 1966, p. 315-333.

[7] GRECO (S.) and SALMON (P.). - Topics in m-adic topologies. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 58).

[8] GUÉRINDON (J.). - Séries restreintes sur un anneau principal, Colloque d'Algèbre commutative [1972. Rennes], exposé n° 6, 11 p. - Rennes, Secrétariat mathématique de l'Université de Rennes [1972].

[9] GUÉRINDON (J.). - Topologies linéaires sur les anneaux de polynômes, Bull. Sc. math., 2e serie, t. 95, 1971, p. 241-259.

(Texte reçu le 26 février 1973)

Jean GUÉRINDON
Université de Rennes
Département de Mathématiques 1er cycle
Boîte postale 25-A
35031 RENNES CEDEX