

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JOACHIM LAMBECK

## Localisation et dualité

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 25,  
p. 1

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1974-1975\\_\\_28\\_1\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A19_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LOCALISATION ET DUALITÉ

par Joachim LAMBECK

Cet exposé est le résumé d'un travail en commun avec B. A. RATTRAY.

Tout couple de foncteurs adjoints  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , avec adjonctions  $\eta : \text{id} \rightarrow UF$  et  $\epsilon : FU \rightarrow \text{id}$ , donne une équivalence entre la sous-catégorie pleine  $\text{Fix}(UF, \eta)$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $\eta(A)$  est un isomorphisme et la sous-catégorie pleine  $\text{Fix}(FU, \epsilon)$  de  $\mathcal{B}$  telle que  $\epsilon(A)$  est un isomorphisme. D'un intérêt particulier est le cas où  $(UF, \eta)$  est idempotent, ce qui est la même chose que dire que  $(FU, \epsilon)$  est idempotent. Cette situation est illustrée par les dualités bien connues de STONE et GEL'FAND. Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie additive complète, et  $I$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $K$ -injectif et co-petit, on peut prendre  $F = \text{Hom}(-, I)$ , et obtenir que  $\text{Fix}(UF, \eta)$  est la fermeture  $\mathcal{L}(I)$  de  $I$  par limites dans  $\mathcal{A}$ . La situation est illustrée par la dualité de Pontrjagin et par l'équivalence de Morita. En particulier, si  $\mathcal{A}$  est la catégorie des  $R$ -modules continus, et  $I$  un  $R$ -module quasi-injectif muni de la topologie discrète, nous obtenons une dualité entre  $\mathcal{L}(I)$  et la sous-catégorie pleine de  $E \text{ Mod}$  cogénérée par  ${}_E I$ . Si  $I$  est un cogénérateur quasi-injectif ou complètement réductible,  $\mathcal{L}(I)$  contient exactement les  $R$ -modules séparés et complets dans une topologie continue dans la topologie  $I$ -adique.

Si  $I$  est un injectif "joli", on doit supposer aussi que ces modules sont divisibles sans torsion par rapport à  $I$ . Si  $I$  est injectif et artinien,  $\mathcal{L}(I)$  comprend toutes les limites inverses des  $R$ -modules artiniens et divisibles sans torsion par rapport à  $I$ . En particulier, si  $R$  est noethérien commutatif, et si  $I$  est l'enveloppe injective de  $R/P$ , où  $P$  est un idéal premier, on obtient une dualité entre les catégories des  $R_P$ -modules pro-artiniens et des  $\hat{R}_P$ -modules abstraits. On peut en déduire des résultats connus de LEFSCHETZ, KAPLANSKY et MATLIS.

(Texte reçu le 2 juin 1975)

Joachim LAMBECK  
Mathématiques  
Université McGill  
MONTREAL, Québec  
(Canada)