Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Massoud Halek-Shahmirzadi

Sur le nombre de générateurs des idéaux à gauche d'une algèbre de Weyl

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 27, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A21_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 27, 5 p.

2 juin 1975

SUR LE NOMBRE DE GÉNÉRATEURS DES IDÉAUX À GAUCHE D'UNE ALGÈBRE DE WEYL

par Massoud MALEK-SHAHMIRZADI

(d'après T. Stafford [8])

Soit k un corps commutatif de caractéristique 0. On appelle <u>algèbre de Weyl</u>, l'algèbre $A_n(k)$, définie par $2n$ générateurs $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n$, et les relations $[p_i, q_j] = \delta_{ij}.1$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$ (où $[x, y] = xy - yx$). L'algèbre $A_n(k)$ est quasi simple (i. e. sans idéal bilatère propre), de centre k, noethérien à gauche et à droite ([1], chapitre 4) intègre ; sa dimension de Krull est égale à n (cf. [2]), ainsi que sa dimension homologique globale.

T. STAFFORD et ROBSON ([6] et [8]) viennent de démontrer, entre autres, que tout module projectif de type fini sur $A_n(k)$, dont le rang est $> n$, est libre, et que tout idéal à droite (resp. à gauche) de $A_n(k)$ possède $n+1$ générateurs. Le but de cet exposé est de présenter le second de ces résultats.

Soient A un anneau, M un A-module à gauche. On note $\Gamma(M)$ l'ensemble des couples (K, N), où K et N sont des sous-modules de M, et $N \subsetneq K$. On pose :

$$\Gamma_C(M)=\{(K, N) \in \Gamma(M) \text{ tel que } K/N \text{ est artinien}\}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_n(M)=\{(K,N)\in\Gamma(M), \exists\, K \supsetneq K_1 \supsetneq \dots \supsetneq K_i \supsetneq \dots \supsetneq N \text{ tel que } (K_i, K_{i+1}) \in \textstyle\bigcup_{m<n} \Gamma_m(M)\}.$$

<u>Définition</u> 1 (cf. [2], [5]). - La <u>dimension de Krull de</u> M (en abrégé K-dim M) est (si elle existe) le plus petit entier n tel que $\Gamma_n(M) = \Gamma(M)$. On pose

$$\text{K-dim}(0) = -1 .$$

La dimension de Krull de A est la K-dimension du A-module à gauche A_s.

PROPOSITION 1 (cf. [2], [4]). -

(a) <u>On a</u> $\text{K-dim } M = \sup\{\text{K-dim } N, \text{K dim } M/N\}$ <u>pour tout sous-module</u> N <u>de</u> M.

(b) <u>Si</u> A <u>est un anneau semi-premier, et si</u> $\text{K-dim } A = n$, <u>alors</u> A <u>admet un anneau de quotient.</u>

<u>Définition</u> 2 [5]. - Soient M un A-module, et p un entier ≥ 0. Le module M est dit <u>p-critique</u> si $\text{K-dim } M = p$ et si, pour tout sous-module $N \neq 0$, $\text{K-dim } M/N < p$.

PROPOSITION 2 (cf. [3]).

(a) Tout sous-module d'un module p-critique est p-critique.

(b) Si K-dim $M < \infty$, le module M possède des sous-modules critiques.

PROPOSITION 3. - Si M est un A-module noethérien et K-dim $M = p$, il existe une chaîne finie de sous-modules

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = M ,$$

telle que N_{i+1}/N_i $(i = 0 , \ldots , n)$ est un A-module monogène et critique.

Preuve. - On utilise la proposition 2 (b) et l'hypothèse noethérienne.

Définition 3. - Soit M un A-module noethérien, et K-dim $M = p$. On définit la longueur de M (en abrégé : long M) comme la borne inférieure des longueurs des chaînes de sous-modules définies dans la proposition 3.

LEMME 1. - Soit D un A-module avec K-dim $D = n$. Soit C un sous-module p-critique de D avec $p \leq n$, et tel que D/C soit monogène. Si la suite exacte

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow D/C \longrightarrow 0 \tag{1}$$

n'est pas scindée, il existe un sous-module D' de D monogène, tel que

$$\text{K-dim } D/D' < p .$$

Preuve. - Par hypothèse, il existe $a \in D$ tel que $D = C + Aa$ et, puisque la suite (1) n'est pas scindée, $Aa \cap C \neq (0)$. Posons $D' = Aa$; on a

$$\text{K-dim } D/D' = \text{K-dim } C/(C \cap Aa) < p$$

puisque C est p-critique.

Définition 3. - On dit qu'un A-module M est complètement fidèle, s'il n'est pas nul et si, pour tout sous-module N , $N \neq M$, $N \neq 0$, on a

$$\mathrm{Ann}_A(M/N) = \mathrm{Ann}_A(N) = (0) .$$

En particulier, sur un anneau quasi-simple tout module non nul est complètement fidèle.

LEMME 2. - Soit M un A-module noethérien et complètement fidèle. On suppose que K-dim $M = n <$ K-dim $A < \infty$. Si C est un sous-module de M tel que M/C est monogène, il existe un sous-module monogène D de M tel que K-dim $M/D < n$.

Preuve. - On raisonne par récurrence sur la longueur m_C de C . Si $m_C = 0$, alors $C = (0)$, et il suffit de prendre $D = M$. Supposons le lemme démontré pour tous les couples (M' , C') , $C' \subseteq M'$, K-dim $M' \leq n$, M' complètement fidèles et noethériens, M'/C' monogène, et $\mathrm{long}(C') \leq m_C - 1$. Par définition de la longueur de C , il existe une chaîne :

$$C = C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_{m_C} = (0) ,$$

où C_i/C_{i+1} est un A-module monogène et critique. Posons $m = m_C - 1$. Alors $(M/C_m , C/C_m)$ vérifie l'hypothèse de récurrence.

Donc il existe un sous-module monogène D'/C_m tel que $K\text{-dim } M/D' < n$. Si la suite exacte

(2) $$0 \longrightarrow C_m \longrightarrow D' \longrightarrow D'/C_m \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée, il existe, d'après le lemme 1, un sous-module monogène D'' tel que $K\text{-dim } D'/D'' < n$. D'où

$$K\text{-dim } M/D'' = \sup\{K\text{-dim } D'/D'' , K\text{-dim } M/D'\} < n .$$

Etudions le cas où la suite (2) est scindée. On a alors $D'' \simeq D'/C_m \oplus C_m$; puisqu'il est monogène, D'/C_m est isomorphe à A/J, où J est un idéal à gauche de A, nécessairement non nul car

$$K\text{-dim } A > K\text{-dim } M \geq K\text{-dim } C_m .$$

Puisque C_m est un sous-module non nul du module complètement fidèle M, on a $J.C_m \neq (0)$, donc il existe $c \in C_m$ tel que $\text{Ann}_A(c) \not\supset J$. Soit $D'' = D'/C_m \oplus Ac$; alors $D'' \simeq A/J \oplus A/I$, où $I = \text{Ann}_A(c) = \{y \in A , yc = 0\}$. On a

$$K\text{-dim}(D'/D'') = K\text{-dim}(C_m/Ac) < p$$

puisque C_m est p-critique. Considérons la suite exacte bien connue

$$0 \longrightarrow A/(I \cap J) \xrightarrow{\alpha} \left(\left(\frac{A}{I}\right) \oplus \left(\frac{A}{J}\right)\right) = D'' \longrightarrow A/(I + J) \longrightarrow 0 .$$

Puisque $A/I \simeq Ac$ est p-critique, on a $K\text{-dim}(A/(I + J)) < p$. Posons $\text{Im } \alpha = D$; alors D est un module monogène, et $K\text{-dim } D''/D < p$. Il suffit alors de remarquer que :

$$K\text{-dim } M/D = \sup\{K\text{-dim } D''/D , K\text{-dim } M/D''\}$$

$$K\text{-dim } M/D'' = \sup\{K\text{-dim } M/D' , K\text{-dim } D'/D''\} .$$

De la seconde de ces égalités, il résulte que $K\text{-dim } M/D'' < n$, et de la première que $K\text{-dim } M/D < n$.

THÉORÈME. - Si M est un A-module noethérien complètement fidèle, et

$$K\text{-dim } M = n < K\text{-dim } A < \infty ,$$

alors M peut être engendré par $n + 1$ éléments.

Preuve. - Puisque M est noethérien, il possède un sous-module maximal N et, par suite, M/N est monogène. Le lemme 2 prouve alors l'existence d'un sous-module monogène D_1 tel que $K\text{-dim } M/D_1 = n_1 < n$. En appliquant à M/D_1, etc. le raisonnement précédent, et en utilisant l'hypothèse noethérienne, il existe une chaîne finie :

$$0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_r \subset M , \quad r \leq n ,$$

dont chaque facteur est monogène. Donc M peut être engendré par $r + 1 \leq n + 1$

éléments.

PROPOSITION 4. - Soit A un anneau semi-premier tel que $K\text{-dim}\, A = n$. Si I est un idéal à gauche de A, il existe $c \in I$, tel que $K\text{-dim}\, I/Ac < n$.

Preuve. - Si I est n-critique, ou bien si I est monogène, ou bien si $K\text{-dim}\, I < n$, le résultat est évident.

Supposons donc que $K\text{-dim}\, I = n$. Puisque l'anneau A admet un anneau de quotient, l'idéal I n'est pas nilpotent. Donc il existe $c \in I$ tel que

$$\mathrm{Ann}_A(c) \cap I = (0) .$$

Considérons la suite :

$$I \supsetneqq Ic \supsetneqq Ic^2 \supsetneqq \dots \supsetneqq Ic^i \supsetneqq \dots$$

Puisque $K\text{-dim}\, I = n$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$K\text{-dim} \frac{Ic^m}{Ic^{m+1}} < n .$$

De l'isomorphisme $Ic^m/Ic^{m+1} \simeq I/Ic$ (induit par la multiplication par c^m) résulte alors que $K\text{-dim}\, I/Ic < n$. Comme $Ic \subseteq Ac$, on a $K\text{-dim}\, I/Ac < n$. Il suffit d'appliquer le théorème à $M = I/Ac$ et à $K\text{-dim}\, I/Ac = n_1 \leq n - 1$.

COROLLAIRE. - Soit A un anneau quasi simple, noethérien à gauche, tel que $K\text{-dim}\, A = n$. Tout idéal à gauche I de A peut être engendré par $n + 1$ éléments.

Preuve. - D'après la proposition 4, il existe $c \in J$ tel que $K\text{-dim}(I/Ac) = p<n$. Le A-module I/Ac est noethérien et complètement fidèle, de dimension de Krull $p < n = K\text{-dim}\, A$. D'après le théorème, I/Ac peut être engendré par $p + 1$ éléments. Donc il suffit de $n + 1$ éléments pour engendrer I.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (J.). - Algèbres enveloppantes. - Paris, Gauthier-Villars, 1974 (Cahiers scientifiques, 37).

[2] GABRIEL (P.) et RENTSCHLER (R.). - Sur la dimension des anneaux et des ensembles ordonnés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 712-714.

[3] GOLDIE (A.). - The structure of noetherian rings, "Lectures on rings and modules", p. 213-321. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 246).

[4] KRAUSE (G.). - On the Krull-dimension of left noetherian left Matlis rings, Math. Z., t. 118, 1970, p. 207-214.

[5] ROOS (J. E.). - Determination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Serie A, p. 23-26.

[6] ROBSON (J. C.). - Noetherian simple rings, Oberwolfach, Mai 1975.

[7] STAFFORD (T.). - On the number of generators of right ideals in simple rings, Oberwolfach, Avril 1975.

[8] GOLDIE (A.). - Some recent developments in ring theory, Israel J. of Math., t. 19, 1974, p. 153-168.

(Texte reçu le 10 juin 1975)

Massoud MALEK-SHAHMIRZADI
Maison des Arts et Métiers
Rue Pierre Massé
75014 PARIS