Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Robert Vidal

Modules de type quasi fini sur un anneau non commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, nº 1 (1974-1975), exp. nº 8, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A4_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 8, 6 p.
27 janvier 1975

MODULES DE TYPE QUASI FINI SUR UN ANNEAU NON COMMUTATIF

par Robert VIDAL

1. Définitions et notations.

Soit A un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, de radical de Jacobson R, vérifiant :

(i) L'anneau quotient A/R est artinien à droite.

(ii) Le A/R-module à droite R/R^2 est de type fini.

DÉFINITION. - Un A-module à droite M est dit de type quasi fini si M/MR est un A/R-module à droite de type fini.

La catégorie des A-modules à droite de type quasi fini est notée $\mathrm{mod}_{q.f.}(A)$, et nous utiliserons les catégories algébriques suivantes :

$\mathrm{mod}_{t.f.}(A)$: sous-catégorie des A-modules à droite de type fini.

$\mathrm{mod}_{l.f.}(A)$: sous-catégorie des A-modules à droite de longueur finie qui s'identifie à $\bigcup_{n>0} \mathrm{mod}_{t.f.}(A/R^n)$. C'est la catégorie des objets artiniens de $\mathrm{mod}_{q.f.}(A)$.

pro-$\mathrm{mod}_{l.f.}(A)$: pro-catégorie des objets artiniens de la catégorie $\mathrm{mod}_{q.f.}(A)$.

Pour la définition d'une pro-catégorie, nous renvoyons à : A. GROTHENDIECK [7] et à M. ARTIN, B. MAZUR [1]. Tout objet de $\mathrm{mod}_{q.f.}(A)$ peut être équipé d'une famille de topologies linéaires particulières, à savoir :

DÉFINITION. - M étant un module de type quasi fini, on le munit d'une structure d'espace topologique pré-strictement linéairement compact (en abrégé : P. S. L. C.) chaque fois qu'on lui associe une famille filtrante $(N_\alpha)_\alpha$ de sous-modules, tels que M/N_α soit un module de longueur finie.

(cf. P. GABRIEL [3], et H. LEPTIN [8] et [9].)

Remarque.

1° Dans ce qui suivra, on supposera la topologie séparée : $\bigcap_\alpha N_\alpha = \{0\}$ ce qui ne nuit en rien à la généralité de notre étude.

2° Le séparé-complété de M pour la topologie, définie par la famille $(N_\alpha)_\alpha$, est le pro-module de longueur finie : $\varprojlim_\alpha M/N_\alpha$, que l'on appellera module strictement linéairement compact (en abrégé S. L. C.) associé.

Exemples.

1° La topologie de Krull : $(MR^n)_{n>0}$ est une topologie P. S. L. C. sur M.

2° La topologie discrète est P. S. L. C. sur M si, et seulement si, M est de longueur finie. (Dans ce cas, elle est identique à la topologie de Krull, et M est S. L. C.)

Le séparé-complété de M par rapport à la topologie de Krull sera noté : $\hat{M}$. Signalons que cette topologie est la plus fine des topologies P. S. L. C. sur M . L'objet de ce travail est de développer, selon les méthodes de P. GABRIEL et J. E. ROOS, l'outil "catégorie abélienne localement artinienne", et d'appliquer les résultats obtenus à l'étude des topologies S. L. C. sur des modules à droite de type quasi fini.

2. Quelques résultats sur l'étude et la représentation des catégories abéliennes localement artiniennes.

DÉFINITION. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui vérifie

(i) $\mathcal{C}$ est abélienne,

(ii) Les limites projectives filtrantes sont représentables et exactes dans $\mathcal{C}$,

(iii) Les objets artiniens de $\mathcal{C}$ sont un système de cogénérateurs, noté $\mathrm{Ar}\ \mathcal{C}$.

On dit alors que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne localement artinienne.

A. GROTHENDIECK [6] et P. GABRIEL ([2] et [3]) ont montré que $\mathcal{C}$ est une catégorie avec enveloppes projectives et que tout projectif est produit unique (à un isomorphisme près) de projectifs indécomposables.

Notons pro-Ar $\mathcal{C}$ la pro-catégorie des objets de $\mathrm{Ar}\ \mathcal{C}$, et rappelons qu'un pro-objet est strict s'il est isomorphe à un pro-objet dont les flèches de transition sont des épimorphismes.

THÉORÈME 1. - La catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la pro-catégorie pro-Ar $\mathcal{C}$, et tout pro-objet est strict.

Représentation linéaire continue de la catégorie $\mathcal{C}$. - Soient S (produit des types de projectifs indécomposables) le socle de la catégorie $\mathcal{C}$, $A = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(S)$ l'anneau des $\mathcal{C}$-endomorphismes de S , et R le radical de Jacobson de A ; le foncteur $S^H = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S , ?)$ réalise un plongement exact de $\mathcal{C}$ dans la catégorie abélienne $\mathrm{mod}(A)$ des A-modules à droite, dont la restriction à $\mathrm{Ar}\ \mathcal{C}$ est pleinement fidèle ; il s'ensuit que tout module atteint par le foncteur S^H est un pro-objet strict et peut ainsi être équipé de la topologie linéaire (appelée naturelle) pour laquelle une base de voisinages de (0) est constituée des noyaux des épimorphismes canoniques. Il est clair que les objets de $S^H(\mathrm{Ar}\ \mathcal{C})$ sont discrètement topologisés ; plus précisément on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - Le foncteur S^H définit une équivalence entre la catégorie $\mathcal{C}$ et une catégorie abélienne de A-modules à droite linéairement topologisés séparés et

<u>et complets, notée</u> $\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A)$; <u>la topologie sur un</u> A-<u>module étant la topologie limite projective de topologies discrètes, les flèches étant les morphismes continus.</u>

<u>Localisation de la catégorie</u> $\mathcal{C}$. - La catégorie spectrale de $\mathcal{C}$, ($\mathrm{Spec}\ \mathcal{C}$, $L : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathcal{C}$) (cf. P. GABRIEL et M. ZISMAN [4], et P. GABRIEL et V. OBERST [5]), obtenue en rendant formellement inversibles les épimorphismes essentiels de $\mathcal{C}$, est une catégorie abélienne localement artinienne, où toutes les extensions sont scindées ; elle se représente (d'après les théorèmes 1 et 2) comme un produit $\pi_i\ \text{pro-mod}_{t.f.}(K_i)$ de catégories de modules linéairement topologisés séparés et complets sur des corps gauches K_i qui sont les anneaux d'endomorphismes des types d'objets simples, et qui sont liés à l'anneau A par l'isomorphisme $A/R \simeq \pi_i K_i$. Le foncteur de localisation $L : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathcal{C}$ définit une correspondance bijective entre les types de projectifs indécomposables de $\mathcal{C}$ et les types d'objets simples de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{C}$.

Si on prend des notations analogues à celles du théorème 2 pour représenter la catégorie spectrale, on obtient une représentation du foncteur de localisation.

THEOREME 3. - <u>Le foncteur</u>

$$? \hat{\otimes}_A A/R = \varprojlim (? \otimes_A A/R) : \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A) \dashrightarrow \pi_i\ \text{pro-mod}_{t.f.}(K_i)$$

<u>est l'unique foncteur faisant commuter le diagramme</u> :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "S^H"'] & \mathrm{Spec}\ \mathcal{C} \arrow[d, "S^H_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{C}}"] \\ \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A) \arrow[r, "? \hat{\otimes}_A A/R"] & \pi_i\ \text{pro-mod}_{t.f.}(K_i) \end{tikzcd}$$

<u>C'est le foncteur de localisation de la catégorie</u> $\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A)$, <u>il est exact à droite, et commute aux limites projectives filtrantes</u>.

3. Applications à l'étude des modules.

Nous appliquons les résultats précédents à un cas particulier qui nous rapproche de la situation des modules. Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ de dimension de Krull nulle (cf. J. E. ROOS [10] et [11]) ; ce qui revient à supposer que $\mathrm{Spec}\ \mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$) et telle que le groupe de Grothendieck de la sous-catégorie épaisse des objets artiniens de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{C}$, noté $\mathcal{K}$ (Ar Spec $\mathcal{C}$), soit de type fini (ce qui revient à supposer que $\mathcal{C}$ contient un nombre fini de types de projectifs indécomposables, ou bien que R est un idéal ouvert de A), notons $H_1 L$ le foncteur dérivé à gauche en dimension 1 du foncteur de localisation ; les théorèmes suivants caractérisent totalement la représentation topologique de la catégorie $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> $\mathcal{C}$ <u>une catégorie abélienne localement artinienne de dimension de Krull nulle et de groupe de Grothendieck associé de type fini, alors les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) La restriction de $H_1 L$ à $\mathrm{Ar}\,\mathcal{C}$ est un foncteur de type fini,

(ii) La topologie naturelle sur $A = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(S)$ est la topologie de Krull,

(iii) R/R^2 est un A/R-module à droite de type fini.

THÉORÈME 5. - Si l'une des trois conditions équivalentes du théorème 4 est vérifiée, $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des modules profinis sur A, à savoir : $\text{pro-mod}_{\text{l.f.}}(A)$.

COROLLAIRE 1. - Sur tout pro-module à droite de type fini, la topologie naturelle est celle de Krull.

[Car sur un quotient (respectivement sur un sous-objet, respectivement sur un produit), la topologie naturelle est la topologie quotient (respectivement la topologie induite, respectivement la topologie produit).]

COROLLAIRE 2. - Tout sous-module ouvert d'un pro-module de type fini est un pro-module de type fini.

En particulier, le radical de Jacobson R de A est de type fini comme A-module à droite.

Structure des A-modules à droite de type quasi fini S. L. C. - Si A est un anneau unitaire, avec A/R artinien à droite et R/R^2 de type fini, $\text{pro-mod}_{\text{l.f.}}(A)$ est une catégorie abélienne localement artinienne, de dimension de Krull nulle, de groupe de Grothendieck associé de type fini ; la catégorie spectrale s'identifie au couple :

$$\text{pro-mod}_{\text{t.f.}}(A/R)\ , \quad L = ?\ \hat{\otimes}_{\hat{A}}\ A/R\ ,$$

et si I désigne le foncteur injection de $\text{pro-mod}_{\text{t.f.}}(A/R)$ dans $\text{pro-mod}_{\text{l.f.}}(A)$, on a

$$L \circ I = 1_{\text{pro-mod}_{\text{t.f.}}(A/R)}\ .$$

THÉORÈME 6. - Tout module de type quasi fini S. L. C. est un module de type fini sur $\hat{A}$.

Par exemple : $\hat{M}$ est de type fini sur $\hat{A}$ (si M est de type quasi fini sur A).

THÉORÈME 7. - Tout module de type quasi fini S. L. C. est muni de la topologie de Krull.

(En effet, c'est un pro-module de longueur finie qui est de type fini sur $\hat{A}$).

COROLLAIRE. - Pour tout entier n, on a :

(i) $\hat{R}^n = \widehat{R^n}$,

(ii) $\hat{M}\hat{R}^n = \widehat{MR^n}$ pour tout M de type quasi fini,

(iii) $E\hat{R}^n = \widehat{ER^n}$ *pour* E *de type quasi fini S. L. C.*

Krull-complétion des modules à droite de type quasi fini.

DÉFINITION. - *On appelle foncteur de Krull-complétion de la catégorie des modules à droite de type quasi fini le foncteur* :

$$\varprojlim_{k>0}(? \otimes_A A/R^k) : \text{mod}_{q.f.}(A) \longrightarrow \text{S. L. C. mod}_{q.f.}(A) \ (C \text{ pro mod }_{l.f.}(A)) .$$

Ce foncteur est exact à droite, et associe à tout A-module à droite de type quasi fini, le $\hat{A}$-module à droite de type fini qui est son séparé-complété pour la topologie de Krull. Nous montrons que ce foncteur est isomorphe à un foncteur produit tensoriel séparé convenable.

THÉORÈME 8. - *Soit* M *un* A-*module à droite de type quasi fini, le* $\hat{A}$-*module à droite*

$$(M \otimes_A \hat{A})^0 = (M \otimes_A \hat{A})/(\cap_{k>0}(M \otimes_A \hat{A})\widehat{R^k})$$

est isomorphe au $\hat{A}$-*module à droite* $\hat{M}$. *Le foncteur ainsi construit*

$$(? \otimes_A A)^0 : \text{mod}_{q.f.}(A) \longrightarrow \text{S. L. C. mod}_{q.f.}(A)$$

est isomorphe au foncteur de complétion.

COROLLAIRE. - *Si* M *est un* A-*module à droite de présentation finie, alors*

$$(M \otimes_A \hat{A})^0 = M \otimes_A \hat{A} = \hat{M} .$$

Nous terminons cet exposé en remarquant qu'un module de type quasi fini S. L. C. peut être considéré comme le complété d'un A-module de type fini pour une topologie P. S. L. C. moins fine que celle de Krull. Le problème de savoir si on peut le considérer comme le complété d'un A-module de type fini pour la topologie de Krull reste ouvert. Une méthode d'attaque de ce problème est l'étude de sous-A-modules de type fini particuliers d'un A-module de type quasi fini, denses pour la topologie de Krull (cf. [14]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.) et MAZUR (B.). - Etale homotopy. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 100).

[2] GABRIEL (P.). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 12e année, 1958/59, n° 17, 32 p.

[3] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[4] GABRIEL (P.) and ZISMAN (M.). - Calculus of fractions and homotopy theory. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1967 (Ergebnisse der Mathematik, 35).

[5] GABRIEL (P.) und OBERST (U.). - Spektralkategorien und reguläre ringe im von Neumannschen Sinn, Math. Z., t. 92, 1966, p. 389-395.

[6] GROTHENDIECK (A.). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-221.

[7] GROTHENDIECK (A.). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, ..., Séminaire Bourbaki, 12e année, 1959/60, n° 190, 29 p., n° 195, 22 p.

[8] LEPTIN (H.). - Linear kompakte Moduln und Ringe, I, Math. Z., t. 62, 1955, p. 241-267.

[9] LEPTIN (H.). - Linear kompakte Moduln und Ringe, II, Math. Z., t. 66, 1957, p. 289-327.

[10] ROOS (J. E.). - Locally noetherian categories and generalised strictly linearly compact rings : Applications, "Category theory, homology theory and their applications, II", p. 197-277. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 92).

[11] ROOS (J. E.). - Locally distributive spectral categories and strongly regular rings, "Reports of the Midwest category seminar", p. 156-181. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 47).

[12] VIDAL (R.). - Sur les catégories abéliennes localement artiniennes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 1293-1296.

[13] VIDAL (R.). - Quelques propriétés des modules de type quasi fini, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 562-564.

[14] VIDAL (R.). - Sur la structure des modules de type quasi fini, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 323-324.

(Texte reçu le 1er février 1975)

Robert VIDAL
Résidence du Parc
Bâtiment A
63540 ROMAGNAT