Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Tonny A. Springer

Caractères d'algèbres de Lie finies

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 10, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A6_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 10, 6 p.
17 février 1975

CARACTÈRES D'ALGÈBRES DE LIE FINIES

par Tonny A. SPRINGER

1. Introduction.

Soit k un corps fini, à q éléments. Soient $\underset{\sim}{G}$ un groupe algébrique linéaire défini sur k, et $G = \underset{\sim}{G}(k)$ le groupe (fini) des points k-rationnels de $\underset{\sim}{G}$. Soient $L(\underset{\sim}{G})$ l'algèbre de Lie de $\underset{\sim}{G}$, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie finie des éléments k-rationnels de $L(\underset{\sim}{G})$. Le groupe G opère sur $\mathfrak{g}$, via la représentation adjointe Ad. On note $O(X)$ l'orbite de $X \in \mathfrak{g}$ sous G.

On dénote par $A(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions sur $\mathfrak{g}$ à valeurs complexes, invariantes sous G, le produit étant le produit de convolution sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$:

$$f * g(X) = \sum_{Y \in \mathfrak{g}} f(Y)\, g(X - Y) .$$

$A(\mathfrak{g})$ est une algèbre associative et commutative (Il y a un objet correspondant associé à G, à savoir le centre de l'algèbre du groupe G).

Il est facile de déterminer les homomorphismes de $A(\mathfrak{g})$ dans $\underset{\sim}{C}$. Fixons une fois pour toutes un caractère ψ non trivial du groupe additif de k, à valeurs complexes. Soit $\mathfrak{g}'$ le dual de $\mathfrak{g}$, c'est un espace vectoriel sur k ; G opère encore sur $\mathfrak{g}'$. Soit (X , X') la valeur de $X' \in \mathfrak{g}'$ sur $X \in \mathfrak{g}$, et posons

$$\langle X , X' \rangle = \psi((X , X')) .$$

LEMME 1. - <u>Les homomorphismes d'algèbres</u> $\theta : A(\mathfrak{g}) \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ <u>ont tous la forme</u>

$$\theta(X) = \sum_{Y \in O(X)} \langle Y , X' \rangle , \tag{1}$$

<u>avec</u> $X' \in \mathfrak{g}'$.

On va discuter quelques résultats (assez élémentaires) sur les sommes trigonométriques de la forme (1).

Il est clair que la fonction θ du lemme ne dépend que de l'orbite α' de X' sous G, on écrira donc $\theta_{\alpha'}(X)$. Nous posons

$$\chi_{X'}(X) = \chi_{\alpha'}(X) = |\mathfrak{g}|^{-1} \sum_{x \in G} \langle \mathrm{Ad}(x)\, X , X' \rangle ,$$

et nous appellerons les fonctions $\chi_{\alpha'}$, les <u>caractères</u> de $\mathfrak{g}$. On comparera avec la situation dans le groupe fini G.

2. Quelques exemples.

(a) PGL_2. - Supposons $\mathrm{char}(k) \neq 2$, et prenons $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{PGL}_2$. Alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des (2×2)-matrices sur k de trace nulle, sur laquelle $G = PGL_2(k)$ opère de la manière habituelle. On identifie $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, via la forme bilinéaire non dégénéré $(X , Y) \longmapsto Tr(XY)$. Alors les homomorphismes θ sont donnés par les sommes

$$(2) \qquad s(A , B) = \sum_{X \in O(A)} \psi(Tr(XB)) ,$$

où $A , B \in \mathfrak{g}$. Il est facile de les calculer, à l'aide de formules connues relatives au nombre de solutions d'une équation quadratique sur un corps fini.

Le résultat est le suivant. Soit $\varkappa$ le caractère non trivial $k^* \longrightarrow \{\pm 1\}$. Supposons $A , B \neq 0$. Il y a 4 cas :

(i) $\det A \det B \neq 0$. Alors $s(A , B) = 0$ si $\det A \det B \notin (k^*)^2$, et $s(A , B) = \varkappa(- \det A)(\psi(2a) + \psi(- 2a))$ si $\det A \det B = a^2 \in (k^*)^2$;

(ii) $\det A \neq 0$, $\det B = 0$ et $s(A , B) = \varkappa(- \det A)\, q$;

(iii) $\det A = 0$, $\det B \neq 0$ et $s(A , B) = \varkappa(- \det B)\, q - 1$;

(iv) $\det A = \det B = 0$ et $s(A , B) = - 1$.

Il est facile d'écrire maintenant la "table de caractères" de $\mathfrak{g}$. On constatera qu'elle est assez ressemblante à la table de caractères du groupe $PGL_2(k)$.

(b) GL_n. – Si $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{GL}_n$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de toutes les $(n \times n)$-matrices. Comme dans le cas précédent, on peut identifier $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, et les homomorphismes θ sont encore donnés par la formule (2). Nous y prenons A régulier semi-simple (c'est-à-dire ayant toutes ses valeurs propres distinctes). Alors on peut montrer (cf. [6]) que les nombres

$$(- 1)^{n-1}\, q^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\, s(A , x - 1) ,$$

où x parcourt les matrices unipotentes de $G = GL_n(k)$, donnent les valeurs sur x de certains caractères irréductibles complexes de G. Les sommes (2) donnant alors une interprétation en termes "intrinsèques" de ces valeurs. Leur première description, due à J. A. GREEN [1] était combinatoire (les "polynômes de Green", voir aussi [4], et [5] partie D).

(c) PSp_4. – Soient $char(k) \neq 2$, et $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{PSp}_4$, le groupe symplectique projectif à 4 dimensions. Alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de toutes les (4×4)-matrices, on en conclut que les θ sont encore donnés par une formule (2), avec $A , B \in \mathfrak{g}$.

Prenons A régulier semi-simple dans $\mathfrak{g}$. Soit x un élément unipotent de G. Soit $x_1 \in G_1 = Sp_4(k)$ l'élément unipotent avec image x dans G, et soit $f(x) = (x_1 - 1)(x_1 + 1)^{-1}$ ("application de Cayley"). Alors f est une bijection des unipotents de G sur les nilpotents de $\mathfrak{g}$. On peut calculer explicitement les valeurs $s(A , f(x))$ et, en comparant avec la table de caractères de $Sp_4(k)$ (déterminée par Bhama SRINIVASAN [7]) on constate encore que les $s(A , f(x))$ sont les valeurs de certains caractères irreductibles complexes de G sur les unipotents x.

Dans le calcul des $s(A, f(x))$, on utilise le procédé d'induction, décrit au paragraphe suivant (notamment le corollaire 1, avec $A = 0$). De plus, il faut déterminer directement $s(A, f(x))$ si x est régulier unipotent.

3. Induction.

Soit G comme au paragraphe 1. Définissons un produit hermitien $(f, g)_{\mathfrak{g}}$ sur $A(\mathfrak{g})$ par

$$(f, g)_{\mathfrak{g}} = |G|^{-1} \sum_{X\in\mathfrak{g}} f(X)\, \overline{g(X)} .$$

Si $\underset{\sim}{H}$ est un sous-groupe algébrique de $\underset{\sim}{G}$, défini sur k, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On a donc un homomorphisme de restriction

$$r_{\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}} : A(\mathfrak{g}) \longrightarrow A(\mathfrak{h}) .$$

Comme dans le cas des groupes, on a une application d'induction, donnée par la formule de Frobenius

$$i_{\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}} f(X) = |H|^{-1} \sum_{x\in G, \mathrm{Ad}(x)X\in\mathfrak{h}} f(\mathrm{Ad}(x)\, X) .$$

On a les résultats habituels suivants. Les démonstrations n'offrent pas de difficultés (Noter cependant que, dans la formule de Mackey, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les groupes).

LEMME 2.

(i) (*Dualité de Frobenius*). *Soit* $\underset{\sim}{H}$ *un* k-*sous-groupe de* $\underset{\sim}{G}$. *Si* $f \in A(\mathfrak{h})$, $g \in A(\mathfrak{g})$, *on a*

$$(i_{\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}} f, g)_{\mathfrak{g}} = (f, r_{\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}}\, g)_{\mathfrak{h}} ;$$

(ii) (*Formule de Mackey*). *Soient* $\underset{\sim}{H}$ *et* $\underset{\sim}{K}$ *deux* k-*sous-groupes de* $\underset{\sim}{G}$. *Supposons que, pour chaque* $x \in G$, *on ait*

$$L(\underset{\sim}{H} \cap x\underset{\sim}{K}x^{-1}) = L(\underset{\sim}{H}) \cap \mathrm{Ad}(x)\, L(\underset{\sim}{K}) .$$

Alors on a, si $f \in A(\mathfrak{h})$, $g \in A(\mathfrak{g})$,

$$(i_{\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}} f, i_{\mathfrak{l}\to\mathfrak{g}}\, g)_{\mathfrak{g}} = \sum_{H\backslash G/K} (r_{\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l}}\, f, r_{\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l}\to\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l}}\, g)_{\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l}} .$$

Si α' est une G-orbite dans le dual $\mathfrak{g}'$, soit $\chi_{\alpha',\mathfrak{g}}$ le caractère de $\mathfrak{g}$ correspondant. La proposition suivante décrit la "décomposition des caractères induits".

Soit $\underset{\sim}{H}$ un k-sous-groupe de $\underset{\sim}{G}$.

PROPOSITION 1. - *Soit* π *la projection* $\mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{h}'$. *Si* α', β' *sont des* G-*orbites dans* $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$, *désignons par* $n_{\alpha',\beta'}$ *le nombre des* $X' \in \alpha'$ *tels que* $\pi X'$ *soit un élément donné de* β. *Alors*

$$i_{\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}}\, \chi_{\beta',\mathfrak{h}} = \sum_{\alpha'} n_{\alpha',\beta'}\, \chi_{\alpha',\mathfrak{g}} .$$

C'est une vérification directe.

Dorénavant, soit $\underset{\sim}{G}$ un k-groupe connexe réductif. Nous supposerons qu'il existe sur l'algèbre de Lie $L(\underset{\sim}{G})$, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée F, $\underset{\sim}{G}$-invariante et définie sur k. (Voir [5], p. 184 pour cette condition.) On identifie $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, via F.

Nous allons appliquer la proposition 1 dans le cas d'un k-sous-groupe parabolique $\underset{\sim}{P}$ de $\underset{\sim}{G}$. Soit $\underset{\sim}{Q}$ un k-sous-groupe parabolique opposé à $\underset{\sim}{P}$. Alors on peut, au moyen de F, identifier $\mathfrak{p}'$ à $\mathfrak{q}$. Si $A \in \mathfrak{q}$, on a donc un caractère $\chi_{A,\mathfrak{p}}$. Soit $\underset{\sim}{U}$ le radical unipotent de $\underset{\sim}{Q}$. La proposition 1 donne maintenant le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> $A \in \mathfrak{q}$, <u>on a</u>

$$i_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{g}}\, \chi_{A,\mathfrak{p}} = \sum_{\alpha} |\alpha \cap (A + \mathfrak{u})|\, \chi_{\alpha,\mathfrak{g}}\,, \tag{3}$$

<u>où</u> α <u>parcourt les</u> G-<u>orbites dans</u> $\mathfrak{g}$.

Prenons $A = 0$. Alors il est clair que seules les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}$ interviennent dans la somme, et on voit que le caractère induit ne contient que des caractères "nilpotents" de $\mathfrak{g}$.

Soient $\underset{\sim}{B}$ un k-sous-groupe de Borel de $\underset{\sim}{G}$, et $\underset{\sim}{T}$ un k-tore maximal de $\underset{\sim}{G}$, contenu dans $\underset{\sim}{B}$. On constate alors que les $\chi_{A,\mathfrak{g}}$, où A est nilpotent, sont analogues aux caractères des représentations irréductibles de G qui sont contenues dans la représentation ρ de G, induite par la représentation triviale de B (représentations qu'on voudrait bien appeler unipotentes). On sait que le nombre d'entrelacement de ρ avec lui-même est $|W|$, l'ordre du groupe de Weyl W défini par $\underset{\sim}{T}$. Dans le cas de $\mathfrak{g}$, le résultat correspondant est donné dans la proposition suivante. Il est obtenu en appliquant la formule de Mackey (lemme 2) à $i_{\mathfrak{b}\to\mathfrak{g}}\, \chi_{0,\mathfrak{b}}$. Si $X \in \mathfrak{g}$, soit $n(X)$ le nombre des k-groupes de Borel de $\underset{\sim}{G}$ dont l'algèbre de Lie contient X.

PROPOSITION 2. - <u>On a</u> $\sum_{X \text{ nilpotent}} n(X)^2 = |G|\,|W|\,|T|^{-1}$.

Du reste, un résultat analogue vaut dans G.

4. La fonction de Steinberg.

La représentation ρ, introduite à la fin du paragraphe 3, contient l'importante "représentation de Steinberg" de G. La question se pose s'il y a un caractère analogue de $\mathfrak{g}$.

Il existe, en effet, une fonction st dans $A(\mathfrak{g})$ qui joue le rôle du caractère de Steinberg de G, mais ce n'est pas un caractère de $\mathfrak{g}$ dans notre sens. La définition de st que nous allons donner est inspirée par la formule de Curtis pour le caractère de Steinberg.

Si $\underset{\sim}{P}$ est un k-sous-groupe parabolique, soit $r(\underset{\sim}{P})$ son k-rang semi-simple.

Nous posons $\varepsilon(\mathfrak{p}) = (-1)^{r(\underset{\sim}{P})}$. Soit $\underset{\sim}{B}$ comme ci-dessus. Alors st est définie par

$$st = \sum_{\mathfrak{p}\supset\mathfrak{b}} \varepsilon(\mathfrak{p})\ i_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{g}}(1) ,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les algèbres de Lie des k-sous-groupes paraboliques de $\underset{\sim}{G}$ qui contiennent $\underset{\sim}{B}$ ($\underset{\sim}{G}$ inclus).

On peut déterminer explicitement les valeurs de st . Le résultat est analogue à celui concernant le caractère de Steinberg de G (établi dans [8]).

PROPOSITION 3.

(i) Si $X \in \mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple, alors $st(X) = 0$;

(ii) Si X est semi-simple, on a $st(X) = \pm\, a(X)$, où $a(X)$ est l'ordre d'un p-groupe de Sylow du centralisateur de X dans G (où $p = \mathrm{char}(k)$).

La démonstration utilise certains immeubles de type sphérique.

Il y a un résultat supplémentaire sur st , où intervient la transformation de Fourier sur $A(\mathfrak{g})$ et qui ne paraît pas avoir de pendant dans G .

Rappelons que nous identifions $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, via la forme bilinéaire F . Nous posons $\langle X , Y\rangle = \psi(F(X , Y))$. La transformation de Fourier de $f \in A(\mathfrak{g})$ est alors définie par

$$\hat{f}(X) = \sum_{Y\in\mathfrak{g}} \langle X , Y\rangle\, f(Y) .$$

Soit a l'ordre d'un p-groupe de Sylow de G .

PROPOSITION 4. - On a $\hat{st}(X) = a^2$ si X est nilpotent, et $\hat{st}(X) = 0$ sinon.

5. Relation éventuelle avec les caractères de G .

Soient $A , B \in \mathfrak{g}$, et posons

$$s(A , B) = \sum_{X\in O(A)} \langle X , B\rangle ,$$

les notations étant comme ci-dessus. Dans le cas de GL_n et Sp_4 , on a vu au paragraphe 2 que ces nombres sont, pour A régulier semi-simple et B nilpotent, relié à certains caractères irréductibles de G . On peut se demander si cela est vrai en général.

Supposons qu'il existe une bijection f de l'ensemble des unipotents de G sur l'ensemble des nilpotents de $\mathfrak{g}$, qui commute avec G (opérant par automorphismes intérieurs sur lui-même et par la représentation adjointe sur $\mathfrak{g}$). (Voir [5], p. 229.)

Soit A un élément régulier semi-simple de $\mathfrak{g}$. Son centralisateur connexe dans $\underset{\sim}{G}$ est un k-tore maximal $\underset{\sim}{T}$ de $\underset{\sim}{G}$.

Soit $\ell \neq p$ un nombre premier, et soit L une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Récemment, LUSZTIG et DELIGNE ont associé, utilisant la cohomologie ℓ-adique, à $\underset{\sim}{T}$ et à tout caractère $\varphi : T \longrightarrow L^*$ un caractère virtuel χ_φ de G, à valeurs dans L (voir [3], [4]). Si $x \in G$ est unipotent, la valeur de $\chi_\varphi(x)$ est indépendante de φ, nous la désignons par $Q_{\underset{\sim}{T}}(x)$. Les exemples du n° 2 suggèrent la conjecture que

$$s(A , f(x)) = (-1)^{\sigma(\underset{\sim}{G})-\sigma(\underset{\sim}{T})} aQ_{\underset{\sim}{T}}(x) ,$$

si x est unipotent, a est l'ordre d'un p-groupe de Sylow de G, et $\sigma(G)$, $\sigma(T)$ sont les k-rangs de G, T.

On peut, encore via la cohomologie ℓ-adique, montrer que les $s(A , f(x))$ ont des propriétés qui seraient des conséquences de la conjecture et des propriétés des $Q_T(x)$. Ainsi, les "relations d'orthogonalité", qui seraient une conséquence de LUSZTIG ([3], théorème 4), sont vérifiées par les $s(A , f(x))$.

N.-B. - La conjecture qu'on vient de mentionner a été démontrée par D. KAZHDAN si la caractéristique de k et le nombre d'éléments de k sont assez grands [Juin 1975].

BIBLIOGRAPHIE

[1] GREEN (J. A.). - The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 80, 1955, p. 402-447.

[2] LUSZTIG (G.). - On the discrete series representations of the classical groups over finite fields, Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1974. Vancouver] (à paraître).

[3] LUSZTIG (G.). - Sur la conjecture de Macdonald, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 317-320.

[4] MACDONALD (I. G.). - Hall polynomials and related topics (à paraître).

[5] Seminar on algebraic groups and related finite groups. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 131).

[6] SPRINGER (T. A.). - Generalization of Green's polynomials, "Representation theory of finite groups and related topics", p. 149-153. - Providence, American mathematical Society, 1971 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 21).

[7] SRINIVASAN (Bhama). - The characters of the finite symplectic group Sp(4,q), Trans. Amer. math. Soc., t. 131, 1968, p. 488-525.

[8] STEINBERG (R.). - Endomorphisms of linear algebraic groups. - Providence, American mathematical Society, 1968 (Memoirs of American mathematical Society, 80).

(Texte reçu le 20 février 1975)

Tonny A. SPRINGER
I. H. E. S.
35 route de Chartres
91440 BURES-SUR-YVETTE