SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

RONDEAU

Condition nécessaire et suffisante d'hyperbolicité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 20, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'HYPERBOLICITE

Par Melle RONDEAU

Exposé N° 20 | 10 Mars 1971

Dans cet exposé, nous allons énoncer diverses conditions nécessaires et suffisantes d'hyperbolicité pour un polynome dont la partie principale est hyperbolique. En particulier, nous insisterons sur la conjecture d'Hörmander dont nous exposerons la démonstration donnée par Svensson [1].

§ 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Soit $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha$ un polynome complexe de degré m de la variable complexe $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ et soit $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha$ sa partie principale et $P_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \xi^\alpha$ si $0 \leq k \leq m$. Soit $N \in \mathbb{R}^n$. Le polynome P est dit hyperbolique par rapport à N si :

$$P_m(N) \neq 0$$

$$\exists\, \tau_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \tau \in \mathbb{R} \text{ et } |\tau| > \tau_0 \Rightarrow P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

On note Hyp N la classe des polynomes hyperboliques par rapport à N.
Si $P \in$ Hyp N alors $P_m \in$ Hyp N.

Inversement, si P_m est un polynome homogène de degré m, hyperbolique par rapport à N, on veut caractériser les polynomes Q, de degré inférieur à m, tels que $P_m + Q$ soit encore hyperbolique par rapport à N.
En 1956, A. Lax [3] résolut complètement ce problème dans le cas n = 2. La condition nécessaire et suffisante donnée par A. Lax fut généralisée par Hörmander en une condition nécessaire d'hyperbolicité pour n quelconque [2, p. 136].
Pour n > 2, cette condition n'est pas suffisante. Mais il a d'autre part montré une condition suffisante d'hyperbolicité : $P_m \in$ Hyp N et P plus faible que $P_m \Rightarrow P \in$ Hyp N, et conjecturé la nécessité de cette condition.
J. Chaillou, dans [5], démontra la conjecture de Hörmander, complètement pour n = 3 et pour n quelconque dans le cas de multiplicité localement constante.
(Ce papier n'est pas mentionné dans la bibliographie par ailleurs très complète de Svenson).

§ 2. DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE HÖRMANDER

Soit $P \in \text{Hyp } N$. On veut prouver l'existence d'une constante C telle que :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ |P(\xi)| \le C\, \tilde{P}_m(\xi) \qquad (2.1)$$

où
$$\tilde{P}_m(\xi) = \Big(\sum_\alpha |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{1/2}$$

La démonstration se fait en deux étapes qui se résument par les énoncés suivants :

<u>Théorème 1</u> : Soit $P \in \text{Hyp } N$, et soit $\eta(r) = \sum_{\nu \ge \nu_o} \eta_\nu r^\nu$ où $\eta_\nu \in \mathbb{R}^n$, méromorphe au voisinage de $r = 0$. Alors on a :

$$P(\eta(r)) = 0(1)\quad \tilde{P}_m(\eta(r)) \quad \text{quand } r \to 0 \qquad (2.2)$$

<u>Théorème 2</u> : Soient Q_1 et Q_2 des polynomes complexes de n variables, $Q_2(\xi) \not\equiv 0$. On suppose qe pour toute courbe $\eta(r) = \sum_{\nu \ge \nu_o} \eta_\nu r^\nu$ où $\eta_\nu \in \mathbb{R}^n$ méromorphe au voisinage de $r = 0$, on ait :

$$Q_1(\eta(r)) = 0(1)\quad Q_2(\eta(r)) \quad \text{quand } r \to 0$$

Alors, il existe une constante C telle que :

$$|Q_1(\xi)| \le C|Q_2(\xi)| \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Au cours des démonstrations, on utilisera fréquemment le développement en séries de Puiseux des zéros de polynomes $\sum_{0 \le j < m} c_j(r)\, \tau^j$ dont les coefficients $c_j(r)$ sont des séries de Puiseux de r [5].

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Rappelons d'abord la définition du polygone de Newton associé à un polynome :
Soit $R(\tau, r) = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\, r^\mu \tau^\lambda$ un polynome en τ dont les coefficients sont des séries de Puiseux de r. On considère l'ensemble $\{(\lambda,\mu) : \exists\, \mu' \le \mu$ tel que

$\Lambda_{\cdot,\cdot} \neq 0\}$. Par définition, le polygone inférieur de Newton associé à $P(\tau, r)$ est l'enveloppe convexe de cet ensemble. On le note $\mathcal{N}(P(\tau,r))$.

<u>Lemme 1</u> : Soit $P_m \in \text{Hyp } N$ homogène de degré m et $\eta(r) = \sum_{\nu \geq \nu_0} \eta_\nu r^\nu$ comme dans le théorème 1. Alors,

$$P_m(\eta(r) + \tau N) = P_m(N) \prod_{i=1}^{m} \left(\tau - \sum_{j \geq j_1} c_{i,j} r^j\right)$$

où les $\sum c_{i,j} r^j$ sont méromorphes au voisinage de $r = 0$ et $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour $j \geq j_1$, $1 \leq i \leq m$.

<u>Lemme 2</u> : Soit $P = \sum_{0<k\leq m} P_k \in \text{Hyp } N$ où $P_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \xi^\alpha$ et soit $\eta(r) = \sum_{\nu\geq\nu_0} \eta_\nu r^\nu$ comme dans le théorème 1. Alors,

$$\forall k \ : \ 0 \leq k < m \quad \mathcal{N}(P_m(\eta(r) + \tau N)) \supset \mathcal{N}(\tau^k P_{m-k}(\eta(r) + \tau N))$$

Nous admettons provisoirement ces deux lemmes pour démontrer le théorème.

On pose
$$\langle \partial, N \rangle = \sum_{1\leq i\leq n} N_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \qquad N = (N_1, \dots, N_n)$$

La formule de Taylor donne :

$$P_m(\eta(r) + \tau N) = \sum_{j=0}^{m} \langle \partial, N\rangle^j P_m(\eta(r)) \frac{\tau^j}{j!}$$

Soit μ_0 le plus petit entier tel que $(\lambda, \mu_0) \in \mathcal{N}(P_m(\eta(1) + \tau N))$ pour un certain λ. Donc il existe λ_0 tel que (λ_0, μ_0) est un sommet de $\mathcal{N}(P_m(\eta(r) + \tau N))$. Donc $\exists b_0 \neq 0$ tel que

$$\langle \partial, N\rangle^{\lambda_0} P_m(\eta(r)) = r^{\mu_0}(b_0 + o(1)) \quad \text{quand } r \to 0 \qquad (2.3)$$

Soit $0 < k \leq m$. Supposons que $P_{m-k}(\eta(r)) \not\equiv 0$. Alors il existe $b'_k \neq 0$ et μ'_k entier tels que

$$<\partial,N>^{\lambda_o} P_m(\eta(r)) = r^{\mu_o}(b_o + 0(1)) \quad \text{quand } r \to 0 \tag{2.3}$$

Soit $0 \le k \le m$. Supposons que $P_{m-k}(\eta(r)) \not\equiv 0$. Alors il existe $b'_k \neq 0$ et μ'_k entier tels que

$$P_{m-k}(\eta(r)) = r^{\mu'_k}(b'_k + 0(1)) \quad \text{quand } r \to 0 \tag{2.4}$$

c'est-à-dire, $(0,\mu'_k) \in \mathfrak{N}(P_{m-k}(\eta(r) + \tau N))$.

D'après le lemme 2, $\mu'_k \ge \mu_o$. Alors, (2.3) et (2.4) entraînent :

$$P_{m-k}(\eta(r)) = 0(1) < \partial,N>^{\lambda_o} P_m\,(\eta(r)) \tag{2.5}$$

Si $P_{m-k}(\eta(r)) \equiv 0$, alors (2.5) est trivial.

D'autre part, $<\partial,N>^{\lambda_o} P_m(\eta(r)) = 0(1)\ \ \tilde{P_m}(\eta(r))$ quand $r \to 0$
donc $\forall k \quad 0 \le k \le m, \quad P_{m-k}(\eta(r)) = 0(1)\ \tilde{P_m}(\eta(r))$ quand $r \to 0$.

<u>Démonstration du lemme 1</u> : Puisque $P_m \in \text{Hyp } N$, on a $P_m(N) \neq 0$ et

$$P_m(\eta(r) + \tau N) = P_m(N) \prod_{i=1}^{m} (\tau - \tau_i(r))$$

Soit $i \in \{1,2,\dots m\}$. On considère le développement en série de Puiseux de $\tau_i(r)$ au voisinage de $r = 0$:

$$\tau_i(r) = \sum_{p \ge p_i} \gamma_{i,p}\, r^{p/q} \qquad q \text{ entier positif.}$$

Puisque P_m est homogène et $P_m \in \text{Hyp}\, N$, $\tau_i(r)$ est réel pour r réel. Supposons que $\gamma_{i,p_o}\, r^{p_o/q}$ soit le premier terme dans le développement de $\tau_i(r)$ qui prend des valeurs non réelles : $\exists\ r_o$ réel tel que $\gamma_{i.p_o}\ r_o^{\,p_o/q}$ est non réel. On pose $l\pi = \arg r_o$ $(l = 0$ ou $1)$. Alors $\arg \gamma_{ip_o} + p_o l\,\pi/q = \rho \neq k\pi$ $\forall\ k$ entier.

Or, $$\tau_i(|r|e^{il\pi}) = \sum_{p_i \le p < p_o} \gamma_{ip}|r|^{p/q}\, e^{ilp\pi/q} + \gamma_{ip_o}\, e^{ilp_o\pi/q}\, |r|^{p_o/q}(1+\mathcal{E}(|r|))$$

où $\mathcal{E}(r) \to 0$ quand $|r| \to 0$

Puisque $\rho \neq k\pi$ $\forall k$ entier, pour $|r|$ assez petit, on a $\rho.\arg(1+\mathcal{E}(r)) \neq k\pi$ $\forall k$ entier.
Donc $\tau_i(|r|e^{il\pi})$ est non réel, ce qui est impossible puisque $|r|e^{il\pi}$ est réel.
Par conséquent, $\forall p$, $\gamma_{ip}\ r^{p/q}$ est réel pour r réel ; ce qui entraîne que $\gamma_{ip}=0$ si q ne divise pas p et que $\gamma_{i,qj} = C_{i.j} \in \mathbb{R}$ si $qj \geq r_i$.

<u>Démonstration du lemme 2</u> : On pose $P_{m-k}(\eta(r) + \tau N) = \sum_{\lambda\mu} a_{k,\lambda,\mu}\ r^{\mu}\ \tau^{\lambda}$.
On utilisera le résultat suivant concernant les polynomes de Newton [6] :
"Soit $R(\tau,r) = c_o(r) + \ldots + c_m(r)\tau^m$, $c_m(r) \neq 0$ un polygone en τ dont les coefficients $c_i(r) = \sum_\mu a_{i\mu}\ r^\mu$ sont des séries de Puiseux. Supposons que $(\lambda_1,\mu_1) \leftrightarrow (\lambda_2,\mu_2)$, $\lambda_2 > \lambda_1$ soit un segment de la frontière de $\mathfrak{N}(R(\tau,r))$, ayant une pente $-\alpha$; alors, $R(\tau)$ a exactement $\lambda_2 - \lambda_1$ racines dont la valuation en r est α."
Ce résultat et le lemme 1 nous permettent d'affirmer que les segments de la frontière de $\mathfrak{N}(P_m(\eta(r) + \tau N))$ ont des pentes entières.

$$P_m(\eta(r) + \tau N) = \sum_{\lambda,\mu} a_{o\lambda\mu}\ \tau^\lambda\ r^\mu$$

Puisque $P_m(N) \neq 0$, $(m,0) \in \mathfrak{N}(P_m(\eta(r) + \tau N))$.
Pour tout entier j, on définit n_j comme étant l'unique entier pour lequel

$$\begin{aligned} &a_{o\lambda\mu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu < n_j - \lambda_j \\ &\exists\,(\lambda,\mu) \ : \ a_{o\lambda\mu} \neq 0 \quad \text{avec } \mu = n_j - \lambda_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

La droite $\mu = n_j - \lambda_j$ est donc la seule droite de pente $-j$ qui rencontre $\mathfrak{N}(P_m(\eta(r) + \tau N))$ soit en un de ses sommets, soit suivant un des segments de sa frontière.
Par conséquent,

$$\mathfrak{N}(P_m(\eta(r) + \tau N)) = \{(\lambda,\mu) : \forall j \text{ entier},\ \ \mu \geq n_j - \lambda_j\}$$

On veut montrer que $a_{k\lambda\mu} = 0$ si $(\lambda+k,\mu) \notin \mathfrak{N}(P_m(\eta(r) + \tau N))$
c'est-à dire : $a_{k\lambda\mu} = 0$ si $\exists j$ tel que $\mu < n_j - (\lambda+k)j$.

Supposons que ceci est faux :
$\exists j$ entier et $\exists k,\lambda,\mu$ avec $\mu < n_j - (\lambda+k)j$ tels que $a_{k\lambda\mu} \neq 0$.
Soit p le plus petit entier tel que :

$$\exists\, k,\lambda,\mu \text{ avec } \mu < n_p - (\lambda+k)p \text{ tels que } a_{k\lambda\mu} \neq 0$$

p existe car $(m,0) \in \mathfrak{N}(P_m\,(\eta(r) + \tau N))$.
On peut donc choisir c réel, $c \neq 0$ tel que

$$\exists(\lambda,\mu') \quad \text{avec } \mu' < \eta_p - \lambda p \text{ et } \sum_{k=o}^{m} c^k\, a_{k,\lambda,\mu'-pk} \neq 0 \tag{2.7}$$

Considérons alors le polynome :

$$Q(\tau,r) = \sum_{\lambda,\mu'} \tau^\lambda\, r^{\mu'} \left(\sum_{k=o}^{m} a_{k,\lambda,\mu'-pk}\, c^k \right)$$

On a

$$\begin{aligned} Q(\tau,r) &= \sum_{k=o}^{m} c^k\, r^{pk} \left(\sum_{\lambda,\mu} a_{k\lambda\mu}\, r^\mu \tau^\lambda \right) \\ &= \sum_{k=o}^{m} c^k\, r^{pk}\, P_{m-k}\,(\eta(r) + \tau N) \\ &= c^m\, r^{pm}\, P(c^{-1}\, r^{-p}\,(\eta(r) + \tau N)) \end{aligned}$$

Puisque $P \in \mathrm{Hyp}\,N$, les racines réelles $\tau(\xi)$ de $P(\xi + i\tau N)$ sont bornées quand $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Par conséquent, les zéros $\tau(r)$ de $Q(\tau,r)$ sont tels que

$$\mathrm{Im}\,\tau(r) = O(r^p) \quad \text{quand } r \to 0 \tag{2.8}$$

Pour aboutir à une contradiction, on va étudier $\mathfrak{N}(Q(\tau,r))$ et en particulier les pentes des segments de la frontière :
D'après la définition de p, on a

$$a_{k\lambda\mu} = 0 \quad \text{si } \mu < n_{p-1} - (\lambda+k)(p-1)$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=o}^{m} c^k \, a_{k,\lambda,\mu'-pk} = 0 \quad \text{si } \mu' < n_{p-1} - \lambda(p-1) \tag{2.9}$$

et
$$\sum_{k=o}^{m} c^k \, a_{k,\lambda,\mu'-pk} = a_{o,\lambda,\mu'} \quad \text{si } \mu' = n_{p-1} - \lambda(p-1) \tag{2.10}$$

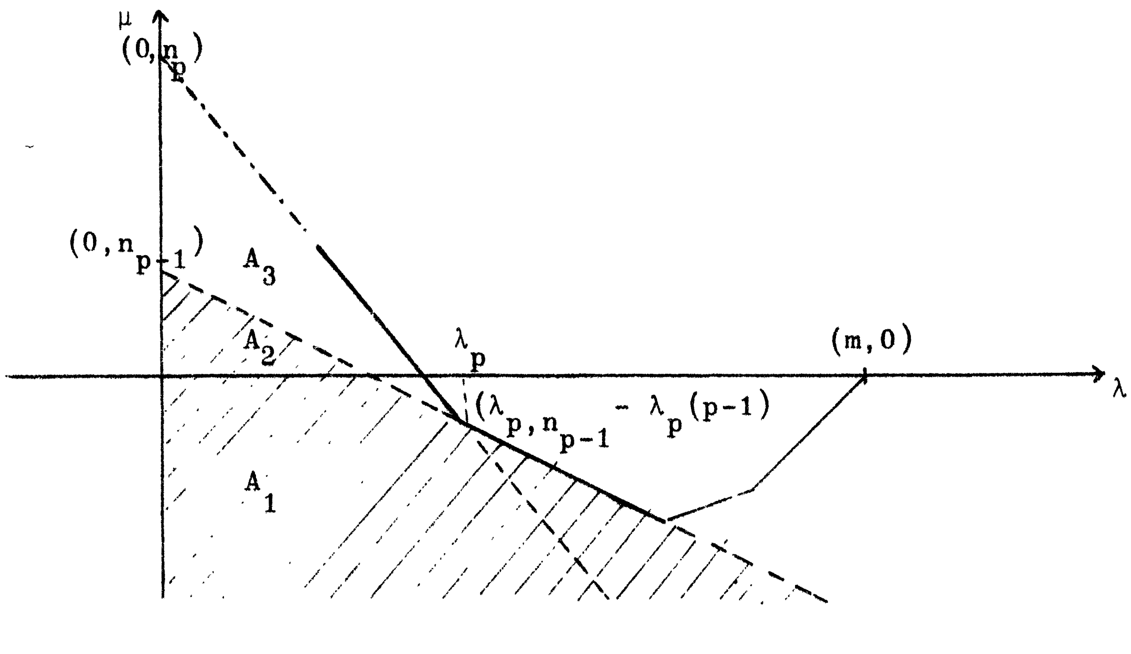
Soit λ_p le plus petit entier λ tel que $a_{o\lambda\mu} \neq 0$ pour $\mu = n_{p-1} - \lambda(p-1)$

On pose :

$$A_1 = \{(\lambda,\mu) \; : \; \mu < n_{p-1} - \lambda(p-1)\}$$

$$A_2 = \{(\lambda,\mu) \; : \; \lambda < \lambda_p \text{ et } \mu = n_{p-1} - \lambda(p-1)\}$$

$$A_3 = \{(\lambda,\mu) \; : \; \lambda < \lambda_p \text{ et } n_{p-1} - \lambda(p-1) < \mu < n_p - \lambda p\}$$



On a $\{(\lambda,\mu) \; : \; \mu < n_p - \lambda_p\} \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

D'après (2.9), il n'y a pas de point de $\mathfrak{N}(Q(\tau,r))$ dans A_1. Il n'y en a pas non plus dans A_2 à cause de la définition de λ_p. Or, d'après (2.7), il existe un point de $\mathfrak{N}(Q(\tau,r))$ dans $\{(\lambda,\mu) \; : \; \mu < n_p - \lambda_p\}$.

Ce point est donc dans A_3.

De plus, $(\lambda_p,\, n_{p-1} - \lambda(p-1))$ est un point de la frontière de $\mathfrak{N}(Q(\tau,r))$.

Donc, il existe un segment frontière de $\mathfrak{N}(Q(\tau,r))$ commençant en un point de A_3 et finissant en $(\lambda_p, n_{p-1} - \lambda(p-1))$.

Ce segment a donc une pente $-\alpha$ où $p-1 < \alpha < p$. Par conséquent, il existe une racine $\tau(r)$ de $Q(\tau,r)$ telle que $\tau(r) = b\, r^{\alpha}\, (1 + 0(1))$ quand $r \to 0$ $(b \neq 0)$.

Donc $r^{-p}\, \mathrm{Im}(\tau(r)) = \mathrm{Im}\,(r^{-p}\, \tau(r)) = \mathrm{Im}(br^{\alpha-p})(1+0(1))$ quand $r \to 0$ r réel.

Or, $\alpha - p < 0$ et $(\alpha - p)$ n'est pas entier. Donc, r^{-p} Im $(\tau(r))$ n'est pas borné quand $r \to 0$, ce qui contredit (2.8).

Le lemme 2 est donc démontré.

Démonstration du théorème 2 : Soit $B = \{\xi \in \mathbb{R}^n : Q_2(\xi) \neq 0\}$.

$B \neq \emptyset$ par hypothèse. Donc B est dense dans $\mathbb{R}^n$.

On démontre le théorème par l'absurde ; on suppose donc que :

$$\sup_{\xi \in B} \left|\frac{Q_1(\xi)}{Q_2(\xi)}\right| = +\infty \tag{2.11}$$

Considérons le système

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} |Q_1(\xi)|^2 - s|Q_2(\xi)|^2 = 0 \\ |Q_2(\xi)|^2 > 0 \end{cases}$$

Ce système définit un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, d'après le théorème de Seidenberg, il existe pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$ un nombre fini de système $G_1^j,\ldots,G_{d_j}^j$, consistant chacun en un nombre fini d'équations et d'iné quations polynomiales en $\xi_1,\xi_2\ldots\xi_j$ et s, tels que les conditions A et B son équivalentes :

A : $\exists\ \xi_{j+1},\ldots,\xi_n$ réels, tels que $(\xi_1,\ldots,\xi_n,s)$ est solution de (I)

B : $(\xi_1,\ldots,\xi_{j,s})$ satisfait au moins un des systèmes $G_1^j,\ldots,G_{d_j}^j$.

Supposons que pour un certain $j \in \{1,\ldots,n\}$ on ait trouvé des séries de Puise $\gamma_i(s),\ldots,\gamma_{j-1}(s)$ convergentes et réelles pour $s > s_o$, telles que le système a des solutions réelles de la forme $\xi = (\gamma_1(s)\ldots\gamma_{j-1}(s),\xi_j,\ldots,\xi_n)$ pour s arbitrairement grand.

Pour j = 1, cette hypothèse est vérifiée car elle signifie simplement que (I) a des solutions réelles pour s arbitrairement grand, ce qui est vrai d'après (2.11).

Soient $h_{k,j}(\xi_1\ldots\xi_j,s) = 0$, $1 \le k \le k'_j$ et $h_{k,j}(\xi_1\ldots\xi_j,s) > 0$ $k'_j < k \le k_j$ toutes les équations et inéquations polynomiales intervenant dans G^j_1, $G^j_2\ldots$ $G^j_{d_j}$.

Considérons les développements en séries de Puiseux de toutes les racines ξ_j des équations $h_{k,j}(\gamma_1(s)\ldots\gamma_{j-1}(s),\ \xi_j,s) = 0$ $0 \le k \le k_j$. Chacun de ces développements est une fonction méromorphe de $s^{1/p}$ au voisinage de $s^{1/p} = \infty$ pour p entier positif. Donc, il existe s_1 tel que si $s > s_1$, chacun de ces développement est soit toujours réel, soit toujours non réel. De plus, si $\theta_i(s)$ et $\theta_{i'}(s)$ sont deux développements réels, $\theta_i(s) - \theta_{i'}(s)$ est une fonction méromorphe de $s^{1/p}$ au voisinage de $s^{1/p} = \infty$; donc elle garde un signe constant si $s > s_2$.

Donc, il existe s_o tel que :

1) si $s > s_o$, les seules racines réelles possibles de $h_{k,j}(\gamma_1(s)\ldots\gamma_{j-1}(s),\ \xi_j,s) = 0$ $0 \le k \le k_j$ sont $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)\ldots\theta_J(s)$.

2) si $s > s_o$ on a $\theta_1(s) < \theta_2(s)\ \ldots < \theta_J(s)$

   On note $\theta_o = -\infty$ $\theta_{J+1} = +\infty$

3) si $s > s_o$, les coefficients des termes de plus haut degré en ξ_j dans les $h_{kj}(\gamma_1(s)\ldots\gamma_{j-1}(s),\xi_j,s)$ ne s'annulent pas.

Le s_o étant fixé, l'hypothèse de récurrence affirme l'existence de $s' > s_o$ et de $\xi_{j,s'}$ réel tels que $(\gamma_1(s'),\ldots,\gamma_{j-1}(s'),\ \xi_{j,s'},s')$ vérifie un des systèmes $G^j_1,\ldots,G^1_{d_j}$: Soit $G^j_{s'}$ ce système.

Deux cas peuvent se présenter :

<u>1er cas</u> : $\theta_{l-1}(s') < \xi_{j,s} < \theta_l(s')$ $1 \le l \le J+1$

Alors, $G^j_{s'}$ ne comporte que des inéquations et on a

$$\begin{cases} \forall\, s > s_o \\ \forall\, \xi : \theta_{l-1}(s) < \xi < \theta_l(s), \quad (\gamma_1(s)\ldots\gamma_{j-1}(s),\xi,s) \text{ vérifie } G^j_{s'} \end{cases}$$

Donc, si on pose $\gamma_j(s) = \dfrac{\theta_l(s) + \theta_{l-1}(s)}{2}$ pour $1 < l \leq J$

et $\quad \gamma_j(s) = \theta_1(s) - 1 \quad \text{si} \quad l = 1$

$\gamma_j(s) = \theta_J(s) + 1 \quad \text{si} \quad l = J+1$

Alors $(\gamma_1(s),\ldots,\gamma_j(s),s)$ vérifie $G^j_{s'}$ pour $s > s_o$.

<u>2ème cas</u> : $\xi_{j,s'} = \theta_l(s') \qquad 1 \leq l \leq J$

De même, si on pose $\gamma_j(s) = \theta_l(s)$,

$$\forall\, s > s_o, \quad (\gamma_1(s)\ldots\gamma_j(s),s) \text{ vérifie } G^j_{s'}$$

On a donc trouvé une série de Puiseux $\gamma_j(s)$ convergente et réelle pour $s > s_o$ telle que (I) a des solutions réelles $(\gamma_1(s),\ldots,\gamma_j(s),\ \xi_{j+1}\ldots\xi_n,s)$ pour $s > s_o$.

Par récurrence, on montre donc l'existence de $\gamma(s) = (\gamma_1(s),\ldots,\gamma_n(s))$ fonction méromorphe de $s^{1/q}$ (q entier > 0) au voisinage de $s^{1/q} = \infty$ telle que $\xi = \gamma(s)$ vérifie (I) pour s arbitrairement grand.
On pose alors $s = r^{-2q}$ et $\eta(r) = \gamma(s) = \gamma(r^{-2q})$, $\eta(r)$ est une fonction méromorphe du voisinage de $r = 0$, réelle pour r réel et telle que :

$$\frac{|Q_1(\eta(r))|^2}{|Q_2(\eta(r))|^2} = |r^{-2q}| \quad \text{pour } r \text{ arbitrairement petit.}$$

Mais ceci contredit l'hypothèse du théorème.

Donc il existe une constante C telle que

$$|Q_1(\xi)| \leq C|Q_2(\xi)| \qquad \forall\, \xi \in B$$

B est dense. Donc cette inégalité est valable pour $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ceci termine la démonstration du théorème 2 et de la conjecture d'Hörmander.

§ 3. AUTRES CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES

Théorème : Soit $P = \sum_{k=o}^{m} P_k$ où $P_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \xi^\alpha$ un polynome dont la partie principale P_m est hyperbolique par rapport à N. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $P \in \mathrm{Hyp}\ N$:

(I) P est plus faible que P_m

(II) P_{m-k} est plus faible que $<\partial, N>^{k-1} P_m$ $\quad 1 \leq k \leq m$

(III) Condition de Gårding [9]

Les racines σ de l'équation $P(\sigma(\tau N + i\xi)) = 0$ tendent vers 0, uniformément en $\xi \in \mathbb{R}^n$ quand $\tau \to +\infty$

Des conditions équivalentes aux précédentes ont aussi été données par Mc Carthy et Pederson [10]

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Svensson : Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part, Akiv för Math., Sept. 1968.

[2] Hörmander : Lin ar partial differential operators, Springer Verlag.

[3] A. Lax : On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure. Appl. Math. 135-169 (1956).

[4] J. Chaillou : Sur une conjecture de L. Garding and L. Hormander. Comm. du 84e congrès de l'Assoc. Franc. pour l'avancement des Sciences, Tours, Juillet 1965.

[5] J. Chaillou : Thèse (déposée Février 1968, Fac. Sc. Paris), à paraître au Mémorial des Sciences Math. (Gauthier-Villars).

[6] J. Chaillou : C. R. Acad. Sc., Paris, T. 268 (Février 1969).

[7] S. Lefschetz : Algebraic Geometry, Princeton.

[8] Weiss : Algebraic Number Theory, Series in Pure and Appl. Math.

[9] Garding : Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta. Math., 1-62 (1950).

[10] Mc Carthy and Pederson : Many sufficient conditions for a polynomial to be hyperbolic, Research Report 1966, Carnegie Inst. of Tech. Pittsburg