S. Kwapien

# Sur l'intégrabilité de norme dans un espace de Banach

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1970-1971), exp. n° 25, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A25_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

# SUR L'INTEGRABILITE DE NORME DANS UN ESPACE DE BANACH

par S. KWAPIEN

Exposé N° 25

5 Mai 1971

Soient E un Banach, $\lambda$ une probabilité sur E, $\Phi : R^+ \to R^+$ une fonction croissante. Nous considérons le problème suivant : pour quels E, $\lambda$, $\Phi$

$$\forall\, X' \in E' \quad \int_E \Phi(|\langle x', e\rangle|)\, d\lambda(e) < \infty \;\Rightarrow\; \int_E \Phi(\|e\|)\, d\lambda(e) < \infty$$

Soient E, F deux Banach, $u : E \to F$ un opérateur, $\Phi : R^+ \to R^+$ une fonction continue, croissante et telle que $\Phi(0) = 0$.

<u>Définition 1</u> : Soit $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$.
u est $\Phi$-sommant ( noté $u \in \pi_\Phi(E,F)$ ) si et seulement s'il existe $\rho > 0$ tel que pour chaque probabilité $\mu$ sur E :

$$\sup_{x'\in E',\, \|x'\|\le 1} \int_E \Phi(|\langle x', e\rangle|)\, d\mu(e) \le 1 \;\Rightarrow\; \int_E \Phi\left(\frac{\|u(e)\|}{\rho}\right) d\mu(e) \le 1$$

<u>Définition 2</u> : Soit $\vartheta(t) = \min(1,t)$ pour $t \in R^+$.
u est $\vartheta$-sommant ( noté $u \in \pi_\vartheta(E,F)$ ) si et seulement si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, pour chaque probabilité $\mu$ sur E

$$\sup_{x'\in E',\, \|x'\|\le 1} \int_E \Phi(|\langle x', e\rangle|)\, d\mu(e) \le \delta \;\Rightarrow\; \int_E \vartheta(\|u(e)\|)\, d\mu(e) \le \varepsilon$$

<u>Proposition</u> : Soient E un Banach, $\lambda$ une probabilité sur E, $\Phi : R^+ \to R^+$ convexe telle que $\Phi(0) = 0$.

Supposons que :

1°) Pour tout Banach F

$$u \in \pi_\vartheta(E',F) \;\Rightarrow\; u^t \in \pi_\Phi(F',E''),$$

2°) Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_E \vartheta(|\langle x', e\rangle|)\, d\lambda(e) < \delta \;\Rightarrow\; \int_E \Phi(|\langle x', e\rangle|)\, d\lambda(e) \le 1$$

Alors $\int_E \Phi\left(\frac{\|e\|}{a}\right) d\lambda(e) < \infty$ pour un $a > 0$.

<u>Démonstration</u> : Soit $L_\Phi(E,\lambda)$ est l'espace d'Orlicz des fonctions $f : E \to R$ telle qu'il existe $a > 0$ avec

$$\int_E \Phi\left(\frac{|f(e)|}{a}\right) d\lambda(e) < \infty$$

Muni de la norme $\|f\|_\Phi = \inf\{a | \int_E \Phi\left(\frac{|f(e)|}{a}\right) d\lambda(e) \leq 1\}$, c'est un Banach.

Soit $i : E \to L_\Phi(E,\lambda)$ un opérateur défini par $i(x)(e) = \langle x', e\rangle$ ; i est bien défini, à cause de 2°).

Soit $F = \overline{i(E)}$ dans $L_\Phi(E,\lambda)$. L'injection de F dans $L_\Phi(E,\lambda)$ et dans $L_0(E,\lambda)$ définit une probabilité cylindrique $\mu$ sur $\sigma(F',F)$. Par la condition 2°), $\mu$ est $\Phi$-typique et 0-cotypique. Comme $\lambda = i^t(\mu)$ nous obtenons par le théorème de dualité de L. Schwartz que $i : E \to F$ est $\mathcal{O}$-sommante.

Par 1°), $i^t : F \to E$ est $\Phi$-sommante et alors $\lambda = i^t(\mu)$ est d'ordre $\Phi$, c'est-à-dire $\int_E \Phi\left(\frac{\|e\|}{a}\right) d\lambda(e)$ pour un $a > 0$.

c q f d

La condition 1°) de la proposition est vérifiée si $E = L_p$, $1 \leq p \leq 2$. Dans le cas $E = L_p$, $2 \leq p < \infty$ elle est vérifiée pour chaque $\Phi$ tel que $\Phi(t^{1/p})$ soit convexe.

La condition 2°) est vérifiée pour toute probabilité $\lambda$ sur E telle que tous les $x' \in E'$ possèdent des lois de probabilité équivalentes, c'est-à-dire, si $x', y' \in E'$, il existe t, s tels que $\lambda\{e | \langle x', e\rangle < \rho\} = \lambda\{e | \langle sy', e\rangle < \rho\}$ pour chaque $\rho$.

<u>Exemple</u> : Soient $E = L_p$, $1 \leq p < \infty$, $\Phi = e^{t^2}$, $\gamma$ probabilité gaussienne sur E (tous les x possèdent des lois gaussiennes) alors

$$\int_E \Phi\left(\frac{\|e\|}{a}\right) d\lambda(e) < \infty \quad \text{pour un } a > 0 .$$