

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. KWAPIEN

## Sur l'intégrabilité de norme dans un espace de Banach

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1970-1971), exp. n° 25,  
p. 1-2

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1970-1971\\_\\_\\_\\_A25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A25_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V  
Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

SUR L'INTEGRABILITE DE NORME DANS UN ESPACE DE BANACH

-----

par S. KWAPIEN



Soient  $E$  un Banach,  $\lambda$  une probabilité sur  $E$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction croissante. Nous considérons le problème suivant : pour quels  $E$ ,  $\lambda$ ,  $\Phi$

$$\forall X' \in E' \quad \int_E \Phi(|\langle X', e \rangle|) d\lambda(e) < \infty \Rightarrow \int_E \Phi(\|e\|) d\lambda(e) < \infty$$

Soient  $E$ ,  $F$  deux Banach,  $u : E \rightarrow F$  un opérateur,  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue, croissante et telle que  $\Phi(0) = 0$ .

Définition 1 : Soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ .

$u$  est  $\Phi$ -sommant (noté  $u \in \pi_\Phi(E, F)$ ) si et seulement s'il existe  $\rho > 0$  tel que pour chaque probabilité  $\mu$  sur  $E$  :

$$\sup_{X' \in E', \|X'\| \leq 1} \int_E \Phi(|\langle X', e \rangle|) d\mu(e) \leq 1 \Rightarrow \int_E \Phi\left(\frac{\|u(e)\|}{\rho}\right) d\mu(e) \leq 1$$

Définition 2 : Soit  $\mathcal{O}(t) = \min(1, t)$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$ .

$u$  est  $\mathcal{O}$ -sommant (noté  $u \in \pi_{\mathcal{O}}(E, F)$ ) si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , pour chaque probabilité  $\mu$  sur  $E$

$$\sup_{X' \in E', \|X'\| \leq 1} \int_E \Phi(|\langle X', e \rangle|) d\mu(e) \leq \delta \Rightarrow \int_E \mathcal{O}(\|u(e)\|) d\mu(e) \leq \varepsilon$$

Proposition : Soient  $E$  un Banach,  $\lambda$  une probabilité sur  $E$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  convexe telle que  $\Phi(0) = 0$ .

Supposons que :

1°) Pour tout Banach  $F$

$$u \in \pi_{\mathcal{O}}(E', F) \Rightarrow u^t \in \pi_\Phi(F', E''),$$

2°) Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\int_E \mathcal{O}(|\langle X', e \rangle|) d\lambda(e) < \delta \Rightarrow \int_E \Phi(|\langle X', e \rangle|) d\lambda(e) \leq 1$$

Alors  $\int_E \Phi \left( \frac{\|e\|}{a} \right) d\lambda(e) < \infty$  pour un  $a > 0$ .

**Démonstration** : Soit  $L_\Phi(E, \lambda)$  est l'espace d'Orlicz des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe  $a > 0$  avec

$$\int_E \Phi \left( \frac{|f(e)|}{a} \right) d\lambda(e) < \infty$$

Muni de la norme  $\|f\|_\Phi = \inf \{ a \mid \int_E \Phi \left( \frac{|f(e)|}{a} \right) d\lambda(e) \leq 1 \}$ , c'est un Banach.

Soit  $i : E \rightarrow L_\Phi(E, \lambda)$  un opérateur défini par  $i(x)(e) = \langle x', e \rangle$  ;  $i$  est bien défini, à cause de 2°).

Soit  $F = \overline{i(E)}$  dans  $L_\Phi(E, \lambda)$ . L'injection de  $F$  dans  $L_\Phi(E, \lambda)$  et dans  $L_0(E, \lambda)$  définit une probabilité cylindrique  $\mu$  sur  $\sigma(F', F)$ . Par la condition 2°),  $\mu$  est  $\Phi$ -typique et 0-cotypique. Comme  $\lambda = i^t(\mu)$  nous obtenons par le théorème de dualité de L. Schwartz que  $i : E \rightarrow F$  est  $\mathcal{O}$ -sommante.

Par 1°),  $i^t : F \rightarrow E$  est  $\Phi$ -sommante et alors  $\lambda = i^t(\mu)$  est d'ordre  $\Phi$ , c'est-à-dire  $\int_E \Phi \left( \frac{\|e\|}{a} \right) d\lambda(e) < \infty$  pour un  $a > 0$ . c q f d

La condition 1°) de la proposition est vérifiée si  $E = L_p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . Dans le cas  $E = L_p$ ,  $2 \leq p < \infty$  elle est vérifiée pour chaque  $\Phi$  tel que  $\Phi(t^{1/p})$  soit convexe.

La condition 2°) est vérifiée pour toute probabilité  $\lambda$  sur  $E$  telle que tous les  $x' \in E'$  possèdent des lois de probabilité équivalentes, c'est-à-dire, si  $x', y' \in E'$ , il existe  $t, s$  tels que  $\lambda \{ e \mid \langle x', e \rangle < \rho \} = \lambda \{ e \mid \langle sy', e \rangle < \rho \}$  pour chaque  $\rho$ .

**Exemple** : Soient  $E = L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Phi = e^{t^2}$ ,  $\gamma$  probabilité gaussienne sur  $E$  (tous les  $x$  possèdent des lois gaussiennes) alors

$$\int_E \Phi \left( \frac{\|e\|}{a} \right) d\lambda(e) < \infty \quad \text{pour un } a > 0 .$$