Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Geymonat

Transposition des problèmes aux limites elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 26, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A26_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

TRANSPOSITION DES PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par G. GEYMONAT

Exposé N° 26 12 Mai 1971

§0. INTRODUCTION

Dans cet exposé sont résumés les résultats obtenus par Baouendi-Geymonat [1],[2] dans le cas différentiable.

Pour simplifier l'exposé on se limite essentiellement au cas du problème de Dirichlet pour le laplacien, les résultats, restent valables pour des problèmes aux limites plus généraux.

Notations : Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞ dont le bord est Γ.

Pour une fonction $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ on note $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ et $\gamma_k u = \left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma$ où ν est la normale à Γ.

$H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, désigne l'espace de Sobolev des classes de fonctions de carré sommable ainsi que leurs dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m.

$H_0^m(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

$H^{-m}(\Omega)$ est le dual fort de $H_0^m(\Omega)$.

De manière analogue (voir par ex. Lions-Magenes [4]), on définit ces espaces pour m réel.

§1. PRELIMINAIRES SUR LE PROBLEME DE CAUCHY.

1.1 : La résolution du problème de Dirichlet pour le laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ peut s'énoncer de la façon suivante.

(1.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $u \to (\Delta u, \gamma_0 u)$ est un isomorphisme de $H^{k+2}(\Omega)$ sur $H^k(\Omega) \times H^{k+3/2}(\Gamma)$.

Par ailleurs il est bien connu que le problème de Cauchy pour le laplacien

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \Delta u = f \\ \gamma_0 u = g_0 \\ \gamma_1 u = g_1 \end{cases}$$

n'admet pas de solution $u \in H^{k+2}(\Omega)$ si $f \in H^k(\Omega)$, $g_0 \in H^{k+3/2}(\Gamma)$ et $g_1 \in H^{k+1/2}(\Gamma)$ sont données d'une façon arbitraire. Il faut (et il suffit) que les données f, g_0, g_1 vérifient certaines conditions de compatibilité. Des théorèmes de trace bien connus il résulte.

(1.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'application $u \to (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ est linéaire continue et surjective de $H^{k+2}(\Omega)$ sur $H^{k+3/2}(\Gamma) \times H^{k+1/2}(\Gamma)$. Remarquons que l'on peut construire un relèvement linéaire et continu $\mathcal{R}$ de l'application (1.3) de $H^{k+3/2}(\Gamma) \times H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k+2}(\Omega)$ si $k \geq -2$ et dans $H_0^{k+2}(\Omega)$ si $k \leq -2$. Pour le voir il suffit de le vérifier localement et d'utiliser le relèvement classique

$$(g_0(x'), g_1(x')) \to v_0(x', x_n) + v_1(x', x_n)$$

où pour $(x', x_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ on a posé :

$$v_0(x', x_n) = (2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i x' \xi'} \hat{g}_0(\xi')\, \theta_0(x_n(1 + |\xi'|^2)^{1/2})\, d\xi'$$

(1.4)

$$v_1(x', x_n) = x_n\, (2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i x' \xi'} \hat{g}_1(\xi')\, \theta_0(x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2})\, d\xi'$$

avec $\theta_0(t) \in C^\infty([o, +\infty[)$, $\theta_0(t) = 1$ per $o \leq t \leq 1$, $\theta_0(t) = 0$ pour $t \geq 2$, $o \leq \theta_0(t) \leq 1$. En effet alors v_0, v_1 $\in L^2(\mathbb{R}_+ ; H^{k+2}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$ et, si $k \geq -2$, aussi v_0, v_1 $\in H^{k+2}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$.

Désignons par K l'opérateur linéaire et continu

$$(1.5)\quad \begin{cases} \varphi \to K\,\varphi = \Delta\, \mathcal{R}(o,\varphi) \\ H^{k+1/2}(\Gamma) \to H^{k}(\Omega) \end{cases}$$

On peut alors démontrer le théorème suivant.

<u>Théorème 1.1</u> : <u>Pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$ <u>l'application</u>

$$(1.6)\quad \begin{cases} (u,\varphi) \to (\Delta u + K\,\varphi,\ \gamma_0 u,\ \gamma_1 u) \\ H^{k+2}(\Omega) \times H^{k+1/2}(\Gamma) \to H^{k}(\Omega) \times H^{k+3/2}(\Gamma) \times H^{k+1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique</u>.

<u>Démonstration</u> : i) <u>Injectivité</u>. Si

$$\begin{cases} \Delta u + K\,\varphi = 0 \\ \gamma_0 u = 0 \\ \gamma_1 u = 0 \end{cases}$$

alors $w = u + \mathcal{R}(o,\varphi) \in H^{k+2}(\Omega)$ et vérifie

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ \gamma_0 w = 0 \end{cases}$$

Donc $w = o$ d'où $\gamma_1 w = \varphi = o$ et $u = o$.

ii) <u>Surjectivité</u> : Soient $f \in H^{k}(\Omega)$, $g_0 \in H^{k+3/2}(\Gamma)$ et $g_1 \in H^{k+1/2}(\Gamma)$ donnés. Soit $w \in H^{k+2}(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta w = f \\ \gamma_0 w = g_0 \end{cases}$$

il suffit de poser $\varphi = \gamma_1 w - g_1 \in H^{k+1/2}(\Gamma)$ et $u = w - \mathcal{R}(o,\varphi) \in H^{k+2}(\Omega)$.

<u>Remarque</u> : L'opérateur (1.6) entre dans le cadre des opérateurs considérés par Vishik-Eskin [5].[6]...., et Boutet de Montvel [3],..... On peut vérifier qu'il vérifie les hypothèses de Lopatinski-Shapiro généralisées données par ces auteurs ; l'opérateur K est appelé par Vishik-Eskin <u>potentiel supplémentaire</u> et par Boutet de Montvel <u>opérateur de Poisson</u>.

1.2 : En suivant les idées de Lions-Magenes (voir par ex. [4]. tome I, chapitre 2) on est intéréssé à transposer l'isomorphisme (1.6). Pour obtenir par transposition des espaces de distributions sur Ω il serait commode de transposer l'isomorphisme

$$(1.7)\qquad \begin{cases} (u,\varphi) \to \Delta u + K\,\varphi \\ H_0^{k+2}(\Omega) \times H^{k+1/2}(\delta) \to H_0^k(\Omega) \end{cases}$$

Mais de l'isomorphisme (1.6) on déduit l'isomorphisme (1.7) seulement dans le cas k = o : en effet en général

$$(u,\varphi) \to \Delta u+K\varphi \text{ est un isomorphisme de}$$

$$Y = \{(u,\varphi) ; u \in H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \varphi \in H^{k+1/2}(\Gamma) \text{ et } \Delta u+K\varphi \in H_0^k(\Omega)\} \text{ sur } H_0^k(\Omega).$$

On peut améliorer la situation en choisissant un opérateur K convenable : pour cela on remarque que des théorèmes de traces bien connus il résulte

(1.8) <u>Pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$ <u>l'application</u> $u \to (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \gamma_0\Delta u, \dots, \gamma_{k-1}\Delta u)$ <u>est linéaire continue et surjective de</u> $H^{k+2}(\Omega)$ sur $\prod_{j=o}^{k+1} H^{k-j+3/2}(\Gamma)$ <u>dont le noyau</u> est $H_0^{k+2}(\Omega)$.

Désignons alors par $\mathcal{R}_k$ un relèvement linéaire et continu de l'application (1.8) de $\prod_{j=o}^{k+1} H^{l-j+3/2}(\Gamma)$ dans $H^{l+2}(\Omega)$ pour tout l réel ≥ -2 et dans $H_0^{l+2}(\Omega)$ pour l réel ≤ -2.

Soit K_k l'application

$$(1.9)\qquad \begin{cases} \varphi \to K_k\varphi = \Delta\, R_k(o,\varphi,o,\ldots,o) \\ H^{k+1/2}(\Gamma) \to H_o^k(\Omega) \end{cases}$$

on démontre alors d'une façon analogue au th. 1.1 le

Théorème 1.2 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $o \leq s \leq k$ l'application

$$(1.10)\qquad \begin{cases} (u,\varphi) \to \Delta u + K_k\varphi \\ H_o^{s+2}(\Omega) \times H^{s+1/2}(\Gamma) \to H_o^s(\Omega) \end{cases}$$

est un isomorphisme algébrique et topologique.

Remarque : Plus loin on démontrera que le théorème 1.2 reste aussi valable pour tout $s < o$

Par transposition nous obtenons le corollaire suivant

(1.11) Pour $s \in \mathbb{R}$. $o \leq s \leq k$, l'application

$$\begin{cases} u \to (\Delta u, K_k^* u) \\ H^{-s}(\Omega) \to H^{-s-2}(\Omega) \times H^{-s-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

est un isomorphisme algébrique et topologique.

§2. FORMULE DE GREEN ET THEOREME DE TRACE.

2.1 : Soient $k \in \mathbb{N}$ fixé et F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, vérifiant :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} L^2(\Omega) \hookrightarrow F \hookrightarrow H^{-k-2}(\Omega) & \text{avec injections continues} \\ L^2(\Omega) \text{ dense dans } F \end{cases}$$

Si F' désigne le dual fort de F la condition (2.1) entraine

$$(2.2)\qquad H_0^{k+2}(\Omega) \hookrightarrow F' \hookrightarrow L^2(\Omega) \qquad \text{avec injections continues}$$

Soit $X = \{u \in H^{-k}(\Omega)\ ;\ \Delta u \in F\}$ muni de la topologie du graphe ; on démontre, en utilisant (2.2), que

(2.3) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>est dense dans X</u>

Soit $\mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega) = \{u \in H^{k+2}(\Omega)\ ;\ \Delta u \in H_0^k(\Omega)\}$ et désignons par $[\mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega)]'$ son dual fort.

Introduisons maintenant deux conditions portant sur l'espace F :

(α) <u>L'injection canonique et continue de</u> $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>dans</u> $[\mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega)]'$, <u>définie pour</u> $f \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>par</u>

$$v \to \int_\Omega f\,\overline{v}\,dx \qquad \text{pour tout } v \in \mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega),$$

<u>se prolonge dans une application linéaire et continue</u>

$$G : F \to [\mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega)]'.$$

(β) <u>L'application</u> $u \to (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ <u>définie dans</u> $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>se prolonge en une application linéaire et continue de</u> X <u>dans</u> $H^{-k-1/2}(\Gamma) \times H^{-k-3/2}(\Gamma)$ <u>encore notée</u> $u \to (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$.

Il est clair que $L^2(\Omega)$ vérifie la condition (α) et que l'on peut remplacer $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par $L^2(\Omega)$ dans cette condition.

Proposition 2.1 : Supposons les conditions (2.1), (α) et (β) vérifiées.

On a alors la formule de Green suivante pour tout $u \in X$ et $v \in \mathcal{K}_{\Delta}^{k+2}(\Omega)$:

$$(2.4) \quad < G(\Delta u), v > - < u, \Delta v > = < \gamma_1 u, \gamma_o v > - < \gamma_o u, \gamma_1 v >$$

Les dualités étant évidentes.

La formule est vraie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et on la prolonge par densité en utilisant les hypothèses.

Théorème 2.1 : Supposons la condition (2.1) vérifiée. Alors les conditions (α) et (β) sont équivalentes.

Pour la démonstration de ce théorème voir Baouendi-Geymonat [1],[2].

2.2 : Si l'on suppose que F est réflexif alors (2.1) est équivalent à

(2.5) $H_o^{k+2}(\Omega) \subsetneq F' \subsetneq L^2(\Omega)$ avec injections continues et images denses.

Dans ce cas la condition (α) est équivalente à la condition suivante

(α') L'espace F' contient algébriquement et topologiquement $\mathcal{K}_{\Delta}^{k+2}(\Omega)$.

La donnée d'un espace F réflexif vérifiant (2.1) et la condition (α) est donc équivalente à la donnée d'un espace normal de distribution, réflexif, contenu dans $L^2(\Omega)$ et contenant $\mathcal{K}_{\Delta}^{k+2}(\Omega)$.

2.3 : On peut s'intéresser au prolongement par continuité à X de l'application $u \to \gamma_o u$ définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$; on peut alors introduire une condition ($\alpha_{\gamma o}$) semblable à (α) et on a un analogue du théorème 2.1.

Dans le cas F réflexif la condition ($\alpha'_{\gamma o}$) analogue à (α') est identique à la condition introduite dans Lions-Magenes [4] chap.2, section 6.8.

2.4 : Il est possible de construire de nombreux exemples d'espaces F ; citons en particulier l'espace $\Xi^{-k-2}(\Omega)$ introduit par Lions-Magenes [4]. L'espace $H^{-k-2}(\Omega)$ ne vérifie pas la condition (α'), mais tout élément de $H^{-k-2}(\Omega)$ appartient au moins à un espace F vérifiant (α).

§3. TRANSPOSITION ET APPLICATIONS.

3.1 : Nous allons maintenant interpréter l'opérateur K_k^* lorsque Δu appartient à F vérifiant (2.1) et (α).

De la proposition 2.1 et du théorème 2.1 résulte immédiatement pour tout $u \in X$:

$$K_k^* u = R_k^*(G(\Delta u)) + \gamma_0 u \tag{3.1}$$

où $R_k \varphi = \mathcal{R}_k(o.\varphi.o,\dots,o) \in \mathcal{L}(H^{k+1/2}(\Gamma), \mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega))$ et donc

$$R_k^* : [\mathcal{K}_\Delta^{k+2}(\Omega)]' \to H^{-k-1/2}(\Gamma).$$

On déduit le résultat suivant (pour la démonstration voir Baouendi-Geymonat [2]).

Théorème 3.1 : *Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. L'application*

$$\left\{\begin{array}{l} u \to (\Delta u, K_k^* u) \\ H^\sigma(\Omega) \to H^{\sigma-2}(\Omega) \times H^{\sigma-1/2}(\Gamma) \end{array}\right. \tag{3.2}$$

est un isomorphisme algébrique et topologique pour tout σ réel $\geq -k$.

En transposant le théorème 3.1 on peut étendre le théorème 1.2 au cas $s < o$.

3.2 : On déduit aussi du théorème 3.1 le résultat suivant

Théorème 3.2 : Soient $k \in \mathbb{N}$ et F un espace vérifiant (2.1) et $(\alpha_{\gamma o})$. On a l'isomorphisme algébrique et topologique suivant :

$$(3.3) \quad \begin{cases} u \to (\Delta u, \gamma_o u) \\ X \to F \times H^{-k-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

Le probleme (3.3) admet la régularité suivante :

Si F vérifie les conditions (2.1) et $(\alpha_{\gamma o})$ en remplaçant k par l avec $o \leq l \leq k$ alors la solution u du problème

$$\Delta u = f$$

$$\gamma_o u = g$$

avec $f \in F$ et $g \in H^{-l-1/2}(\Gamma)$ est dans $H^{-l}(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S.Baouendi. G.Geymonat. Résultats de dualité dans les problèmes aux limites linéaires elliptiques C.R.A.S Paris.Sér.A 270(1970) pp. 370-372, et art. à paraitre au journal of differential equations.

[2] Transposition des problèmes aux limites elliptiques, à paraitre dans Symposia Mathematica. Volume IX

[3] L.Boutet de Montvel. Boundary problems for pseudo differential operators. Acta Math. 126(1971) pp. 11-51.

[4] J.L.Lions-E.Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Tome I.II.III. Dunod 1968-1969.

[5] M.I.Vishik-G.I.Eskin. Convolution equations in a bounded region in spaces with weighted normes Mat. Sb. 69(111) 1966 pp. 65-110.

[6] Normally solvable problemes for elliptic systems of equations in convolutions Mat. Sb. 74(116) 1967 pp. 326-356.