M. DERRIDJ
C. ZUILY

Régularité C^∞ au bord d'une classe d'opérateurs dégénérés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

REGULARITE C^{∞} AU BORD D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DEGENERES

par M. DERRIDJ et C. ZUILY

Exposé N° 2 7 Octobre 1970

§ I INTRODUCTION

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) > 0\}$ $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = 0\}$ $d\varphi \neq 0$ sur Γ, et $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ une famille de champs de vecteurs dans $\bar{\Omega}$ à coefficients réguliers.

Nous étudions dans ce travail la régularité à la frontière de l'opérateur $A = \sum_{j=1}^{r} X_j^*(\varphi X_j) + c\varphi$ sous des hypothèses convenables sur les X_j. Il résulte de cette étude et d'un théorème de Hörmander que les solutions de l'équation $Au = f$ sont dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si f est dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

La classe des opérateurs A pour lesquels ces résultats de régularité sont obtenus contient essentiellement celle étudiée dans [2] par M.M. M.S. Baouendi et C. Goulaouic, qui ont cependant des résultats plus précis que les nôtres.

§ II. NOTATIONS ET HYPOTHESES :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ variété de classe C^∞ et de dimension $n-1$, Ω étant situé localement d'un même côté de Γ. Soit φ la fonction définie dans le paragraphe I.

Nous nous donnons r champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ dans $\bar{\Omega}$ i.e des opérateurs différentiels homogènes du 1er ordre, sur lesquels nous faisons les hypothèses suivantes :

(H.1) Les coefficients des X_j $j = 1, \ldots, r$ sont de classe C^∞ dans $\bar{\Omega}$

(H.2) L'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ est de rang n en tout point de $\bar{\Omega}$ (voir [4])

(H.3) En tout point x de Γ il existe i_x $1 \leq i_x \leq r$ tel que X_{i_x} soit transversal à Γ au point x.

Soit $(\mathcal{O}, \theta)$ une carte locale d'un point de Γ. Nous notons $\tilde{X}_j$ le transformé de X_j dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{(x, y)\ x \in \mathbb{R}^{n-1}, y > 0\}$,

$B = \theta(\mathcal{O} \cap \Omega)$ $\gamma = \theta(\mathcal{O} \cap \Gamma)$

(H.4) $\qquad \tilde{X}_j = a_j D_y + y^{k_j} T_j \quad j = 1..r \quad k_j \in \mathbb{N} \quad T_j = \sum_{k=1}^{n-1} c_{j,k}(x,y) D_{x_k}$

(H.5) L'algèbre de Lie engendrée par $T_1,..,T_r$ est de rang n-1 en tout point de $B \cup \gamma$.

Remarques II.1 : Il résulte des hypothèses faites ci-dessus que dans chaque carte locale d'un point de la frontière, il existe j tel que : $\tilde{X}_j = \alpha D_y$ $\alpha \neq o$ dans $B \cup \gamma$. D'autre part l'algèbre de Lie engendrée par $(\tilde{X}_1, .., \tilde{X}_r)$ est de rang n en tout point de $B \cup \gamma$.

§ III. LEMME DE DENSITE

Nous allons maintenant donner quelques résultats de densité des fonctions régulières, qui nous seront utiles dans la suite. Nous nous plaçons dans le cadre général suivant : Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ (borné ou non). $P_1, P_2, ..., P_k$ (resp. $Q_1, .., Q_l$) des opérateurs différentiels homogènes du premier ordre à coefficients de classe C^∞ dans $\bar{\mathbb{R}}^n_+ = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^{n-1} \; y \geqq o\}$ (resp. dans $\bar{\Omega}$). On pose :

$$\mathfrak{A}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \; / \; P_i u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \quad i = 1,..,k\}$$

$$\mathfrak{A}_o(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \sqrt{y} \;\; P_i u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \quad i = 1...k\}$$

$$\mathfrak{B}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \; / \; Q_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1,...,l\}$$

$$\mathfrak{B}_o(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \; / \; \sqrt{\varphi} \;\; Q_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1,...,l\}$$

où φ est définie au § I. que l'on munit des structures hilbertiennes évidentes.

On a alors les :

Lemme III.1 : $\mathfrak{D}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ (resp. $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$) est dense dans $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. dans $\mathfrak{B}(\Omega)$)

Lemme III.2 : Si de plus nous supposons que $P_1 = D_y$ (resp. En tout point X de $\dot{\Gamma}$ un des Q_i est transversal à $\Gamma^{(\bullet)}$) alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $\mathfrak{U}_o(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathfrak{B}_o(\Omega)$).

Démonstration du lemme III.1 : Il est facile de voir que les fonctions de $\mathfrak{U}(\mathbb{R}^n_+)$ à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ sont dense dans $\mathfrak{U}(\mathbb{R}^n_+)$. Ensuite si $u \in \mathfrak{U}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ posons $\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ si } \in \overline{\mathbb{R}}^n_+ \\ o \text{ ailleurs} \end{cases}$

Soit ρ_ε une suite régularisante avec supp $\rho_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n_-$. La fonction $u_\varepsilon = \tilde{u} * \rho_\varepsilon{}_{|\mathbb{R}^n_+}$ est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ qui, on va le voir, converge vers u dans $\mathfrak{U}(\mathbb{R}^n_+)$. Pour cela il suffit de démontrer que si P est un champ de vecteur, Pu_ε converge vers Pu dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Or

$$Pu_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} [(\tilde{u} * \rho_\varepsilon)_{|\mathbb{R}^n_+}] = [\sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{u} * \rho_\varepsilon)]_{|\mathbb{R}^n_+} =$$

$$[(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} * \rho_\varepsilon)]_{|\mathbb{R}^n_+} + R_\varepsilon = [\sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} * \rho_\varepsilon]_{|\mathbb{R}^n_+} + [\mu * \rho_\varepsilon]_{|\mathbb{R}^n_+} + R_\varepsilon$$

où μ est une mesure portée par l'hyperplan $x_n = o$ donc $(\mu * \rho_\varepsilon)_{|\mathbb{R}^n_+} = o$.

On a donc $Pu_\varepsilon = \widetilde{Pu} * \rho_\varepsilon{}_{|\mathbb{R}^n_+} + R_\varepsilon$ et il suffit donc de montrer que R_ε tend vers zéro dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ ce qui résulte d'un lemme de Friedrichs (voir [5] chap I.). Pour montrer que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense $\mathfrak{U}(\Omega)$ on localise et on se ramène à $\mathbb{R}^n_+$.

(•) Ecrivons $Q_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}(x) D_{x_k}$. La transversalité de Q_i à Γ veut dire que le vecteur $\alpha_i(x) = (\alpha_{i,1}(x),\ldots,\alpha_{i,n}(x))$ est non nul et non tangent à Γ pour $x \in \Gamma$.

<u>Demonstration du lemme III.2</u> : Elle est semblable à celle donnée dans [2] en utilisant le lemme III.1.

<u>Remarque III.3</u> : Le lemme III.2 est aussi vrai pour les espaces

$$\{u \in L^2(\Omega) \;/\; y^{p-2} Q_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1,\dots,l\} \text{ où } p \in \mathbb{N}^*.$$

§ IV. RESULTATS PRELIMINAIRES :

Considérons l'espace

$$V(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \;/\; \sqrt{y}\; D_y u \in L^2(\mathbb{R}^n_+),\; \sqrt{y}\; y^{k_j} T_j u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)\; j = 2,\dots,r\}$$

que l'on munit de la structure évidente d'espace de Hilbert. On a alors la:

<u>Proposition IV.1</u> : Il existe $\varepsilon > o$ tel que :

$V(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(B \cup \gamma) \subset L^2(\mathbb{R}_+ : H^\varepsilon(\mathbb{R}^{n-1})) = L^2(H^\varepsilon)$ avec injection continue.

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants.

<u>Lemme IV.2</u> : $\forall\, \alpha, \beta > o \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ on a

(IV.1) $$\|u\|_{L^2(H^{\beta/2})} \leq c\,(\|\sqrt{y}\; D_y u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|\sqrt{y}\; u\|_{L^2(H^\beta)})$$

(IV.2) $$\|\sqrt{y}\; y^{2^p - 1} u\|_{L^2(H^{2^p \alpha})} \leq c_p(\|\sqrt{y}\; D_y u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|\sqrt{y}\; y^{2^{p+1}-1} u\|_{L^2(H^{2^{p+1}\alpha})})$$

<u>Lemme IV.3</u> : Il existe $\varepsilon > o$ tel que pour tout u de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(B \cup \gamma)$

(IV.3) $$\|u\|_{L^2(H^\delta)} \leq M(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=2}^{r} \|T_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)})$$

<u>Démonstration de la proposition IV.1</u> : Soit $k = \max_j k_j \cdot p_o$ le plus petit entier tel que $2^{p_o} \geq k_o + 1$ et $\varepsilon = \frac{\delta}{2^{p_o+1}}$. On applique alors (IV.3) à $\sqrt{y}\; y^k u$ en remarquant que les T_j sont tangentiels et on utilise (IV.1) et (IV.2). Il vient alors :

(IV.4) $$\|u\|_{L^2(H^\delta)} \leq c\,|u|_{V(\mathbb{R}^n_+)} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(B \cup \gamma)$$

Le résultat découle alors de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $V(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Démonstration du lemme IV.2</u> : Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ notons $\hat{u}(\xi, y)$ la transformée de Fourier partielle par rapport à x.

(IV.5) $$|\hat{u}(\xi,y)|^2 = -\int_y^{+\infty} D_t\, |\hat{u}(\xi,t)|^2 dt \leq 2\int_y^{+\infty} |\hat{u}(\xi,t)|\; |D_t\hat{u}(\xi,t)|\; dt$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + |\xi|^2)^\beta |\hat{u}(\xi,y)|^2\, dy\, d\xi \leq 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \Big(\int_0^t dy \Big) (1+|\xi|^2)^\beta |\hat{u}(\xi,t)|\,|D_t\hat{u}(\xi,t)|\, dt$$

En utilisant Cauchy-Schwartz et en écrivant $y = \sqrt{y}\,.\,\sqrt{y}$ on obtient (IV.1). Pour démontrer (IV.2) on part de (IV.5) que l'on multiplie par $(\sqrt{y}\;\; y^{2^p-1})^2$ i.e $y^{2^{p+1}-1}$ puis par $(1+|\xi|^2)^{2^p\alpha}$. Il vient alors :

$$\|\sqrt{y}\;\; y^{2^p-1}\, u\|_{L^2(H^{2^p\alpha})} \leq c\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^t y^{2^{p+1}-1} dy\Big)\, (1+|\xi|^2)^{2^p\alpha}\, |\hat{u}(\xi,t)|\,.$$

$|D_t\hat{u}(\xi,t)|\,dt$. En écrivant $t^{2^{p+1}} = \sqrt{t}\;\; t^{2^{p+1}-1/2}$ il vient

$$\|\sqrt{y}\;\; y^{2^p-1}\, u\|_{L^2(H^{2^p\alpha})} \leq c_p \int_{\mathbb{R}^n_+} |\sqrt{t}\; D_t\, \hat{u}(\xi,t)|\,(1+|\xi|^2)^{2^p\alpha}\; t^{2^{p+1}-1/2}\, |\hat{u}(\xi,t)|\, dt$$

et (IV.2) résulte de Cauchy-Schwartz.

<u>Démonstration du lemme IV.3</u> : Nous utilisons dans ce qui suit une idée développée par Kohn dans [6]. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$ Λ^γ désigne l'opérateur de $s(\mathbb{R}^n)$ défini par $\Lambda^\gamma u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi [(1+|\xi|2)^{\gamma/2} \hat{u}(\xi,y)]$.

D'autre part :

$$\|u\|_{L^2(H^\delta)} \sim \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(H^{\delta-1})} + \|u\|_{L^2}.$$

L'hypothèse (H.5) entraîne que l'on a pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(B \cup \gamma)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k_i=1}^{l_i} a_{i,k_i} F_{q_{k_i}} u$$

ou $F_{q_{k_i}}$ désigne un crochet des T_j de longueur q_{k_i}. Il vient donc

$$\text{(IV.6)} \quad \|u\|_{L^2(H^\delta)} \leqq c \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k_i=1}^{l_i} \| F_{q_{k_i}} u \|_{L^2(H^{\delta-1})} + \|u\|_{L^2} \right)$$

Considérons un terme :

$$\|F_q u\|^2_{L^2(H^{\delta-1})} = (\Lambda^{\delta-1} F_q u, \Lambda^{\delta-1} F_q u) = (F_q^* \Lambda^{2\delta-2} F_q u, u)$$

Posons $F_q^* \Lambda^{2\delta-2} = P^{2\delta-1}$ qui est d'ordre $2\delta-1$, et écrivons $F_q = [F_{q-1}, T]$

$$\|F_q u\|^2_{L^2(H^{\delta-1})} \leqq |(P^{2\delta-1} F_{q-1} Tu, u)| + |(P^{2\delta-1} T F_{q-1} u, u)| = Ⓐ + Ⓑ$$

Ⓐ $\leqq |([P^{2\delta-1}, F_{q-1}]\, Tu, u)| + |(F_{q-1} P^{2\delta-1} Tu, u)|$

Le premier terme se majore par $c(\|Tu\|^2_{L^2(H^{2\delta-1})} + \|u\|^2_{L^2})$

Le deuxième s'écrit $|(Tu, P^{2\delta-1}(b_q - F_{q-1})u)|$ où $b_q \in C^\infty$, puisque F_{q-1} est un opérateur homogène du premier ordre. Ce terme se majore par $c(\|Tu\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{L^2(H^{2\delta-1})} + \|F_{q-1} u\|^2_{L^2(H^{2\delta-1})}$. De la même manière

Ⓑ $\leqq c\,(\|Tu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} + \|F_{q-1}u\|_{L^2(H^{2\delta-1})})$.

En prenant $\delta \leqq \frac{1}{2}$ il vient :

$$\|F_q u\|_{L^2(H^{\delta-1})} \leqq c\,(\|Tu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} + \|F_{q-1}u\|_{L^2(H^{2\delta-1})})$$

En réitérant le procédé on obtient l'inégalité

$$\text{(IV.7)} \qquad \|F_q u\|_{L^2(H^{\delta-1})} \leqq c\,(\Sigma \|T_j u\|_{L^2(H^{2^q\delta-1})} + \|u\|_{L^2})$$

Il suffit alors de prendre $\delta \leqq \dfrac{1}{2^q}$ dans (IV.7) et d'utiliser (IV.6) pour obtenir :

$$\|u\|_{L^2(H^\delta)} \leqq c\,(\sum_{j=2}^{r} \|T_j u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$$

<u>Remarque IV.4</u> : Les démonstrations des lemmes IV.2 et IV.3 montrent que l'on peut prendre ε de la forme $\dfrac{1}{2^l}$ dans la proposition IV.1.

§ 5. REGULARITE

On se donne une forme integro-differentielle définie par :

(V.1) $$a(u,v) = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Omega} \varphi(x)\, X_j u . X_j v \, dx$$

On pose :

$$W(\Omega) = \{\sqrt{\varphi}\, u \in L^2(\Omega) \; ; \; \sqrt{\varphi}\, X_j\, u \in L^2(\Omega) \quad j = 1,..,2\}$$

Le lemme de Lax-Milgram montre alors que pour toute f dans $[W(\Omega)]'$ il existe u unique dans $W(\Omega)$ tel que :

(V.2) $$a(u,v) = (f,v) \quad \forall\, v \in W(\Omega)$$

Nous utiliserons dans ce paragraphe la technique de régularisation elliptique pour laquelle nous renvoyons à [1].

Soient $(\mathcal{O},\theta)$ une carte locale voisinage d'un point de Γ et $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$. Nous noterons u_j la solution du problème régularisé avec $f_j \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Alors u_j est dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega)$.

Enfin Λ^t désigne l'opérateur : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$u \to \Lambda^t u = \mathcal{F}_\xi[(1+|\xi|^2)^{t/2}\, u(\xi,y)]$$

Lemme V.1 : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\xi f_0\, \theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}_+ \, ; \, H^{k\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}))$ alors les quantités : $\sqrt{\varepsilon_j}\, \|\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi u_j\|_{H^1_0}$ et $|\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi u_j|_V$ reste bornées lorsque j varie.

Démonstration : Nous raisonnons par récurrence sur k. Pour k = 0 posons :

$$A_j = a_j(\Lambda^\varepsilon \xi u_j,\, \Lambda^\varepsilon \xi u_j)$$

$$B_j = a_j\,(u_j,\, \xi\, \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon \xi u_j) = (\xi f_j,\, \Lambda_\varepsilon \Lambda_\varepsilon \xi u_j)$$

$$|A_j| \geq \varepsilon_j\, \|\Lambda^\varepsilon \xi u_j\|^2_{H^1_0} + |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|^2_V$$

$|B_j| \leq \|\xi f_j\|_{L^2} . \|\Lambda^\varepsilon \xi u_j\|_{L^2(H^\varepsilon)} \leq C^{te}\, |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$ d'apres la proposition II.2

Il suffit pour conclure de montrer que l'on a :

(V.3) $$|A_j - B_j| \leq c(\|\sqrt{\varepsilon}\,\Lambda^\varepsilon \xi u_j\|_{H_o^1} + |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V)$$

On a à majorer des termes du type :

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n_+} y|X\Lambda^\varepsilon \xi u_j|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} y\, X u_j\, X\, \xi\, \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon\, \xi u_j\, dx\Big| = |① - ②|$$

où X est l'un des champs de vecteurs $\tilde{X}_k$ $k = 1,..,r$

$$② = \int_{\mathbb{R}^n_+} y\, X\, u_j [X,\xi]\, \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon\, \xi u_j + \int y\, X\, u_j\, \xi\, X\, \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon\, \xi u_j$$

Le premier terme de 2 se majore par

$$(\|\sqrt{y}\, D_y\, u_j\|_{L^2} + \sum_{q=2}^{r} \|y^{k_q}\sqrt{y}\, \Gamma_q\, u_j\|_{L^2})\|\Lambda^\varepsilon\, \xi u_j\|_{L^2(H^\varepsilon)}$$

i.e. par $c.|\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$ car $|u_j|_V$ est borné.

Compte tenu du fait que X s'écrive a $D_y + \Sigma Y_k$ où les Y_k sont des opérateurs tangentiels, le deuxième terme de ② s'écrit :

$$\int y\, Xu_j . \xi . \Lambda^\varepsilon X \Lambda^\varepsilon\, \xi u_j + \int y X u_j\, \xi\, [\Lambda^\varepsilon, a] D_y\, \Lambda^\varepsilon \xi u_j + \Sigma \int y X u_j\, \xi [\Lambda^\varepsilon, Y_k]\, \Lambda^\varepsilon \xi u_j$$

Les deux derniers termes se majorent par $c.|\Lambda^\varepsilon\, \xi u_j|_V$.

En utilisant Parseval en la variable x on voit que le premier terme vaut :

$$\int y\, \Lambda^\varepsilon\, \xi\, Xu_j . X\, \Lambda^\varepsilon\, \xi u_j$$

On commute alors ξ et X, le commutant se majorant par $c.|\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$, et l'on obtient un terme qui s'élimine avec Ⓐ .

Un calcul analogue permet de majorer les termes provenant de $\varepsilon_j(u,v)_{H_o^1}$.
On admet donc le lemme à l'ordre k et il s'agit de le demontrer à l'ordre k+1. Posons de meme ;

$$A_j = a_j(\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j, \Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j)$$

$$B_j = a_j(u_j, \xi\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j) = (\Lambda^{k\varepsilon}\xi f_j, \Lambda^{\varepsilon}\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j)$$

On a de même :

$$|A_j| \geq \varepsilon_j \|\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j\|^2_{H^1_o} + |\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j|^2_V$$

$$|B_j| \leq c|\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j|_V \quad \text{d'après la proposition IV.1.}$$

Tout revient alors à démontrer l'inégalité, analogue à (V.3), suivante :

$$\text{(V.4)} \quad |A_j - B_j| \leq c\,(\sqrt{\varepsilon_j}\,\|\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j\|_{H^1_o} + \|\Lambda^{(k+1)\varepsilon}\xi u_j\|_V)$$

Cela se fait par les mêmes techniques que précédemment, et en utilisant l'hypothèse de récurrence i.e. $|\Lambda^{k\varepsilon}\xi u_j|_V$ et $\sqrt{\varepsilon_j}\|\Lambda^{k\varepsilon}\xi u_j\|_{H^1_o}$ bornées lorsque j varie.

<u>Corollaire III.2</u> : Si $\xi f \in L^2(\mathbb{R}_+ ; H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}))$ alors $D_{x_i}\xi u \in V(\mathbb{R}^n_+)$ $i=1,n-1$

<u>Démonstration</u> : On prend dans le lemme V.1 k tel que $(k+1)\varepsilon = 1$, ce qui est possible d'après la remarque IV.4, et on passe à la limite en j (quitte à extraire des sous-suites).

Dans une carte locale l'opérateur $A = \sum_{j=1}^{r} X_j^*(\varphi X_j)$ associé à la forme sesquilinéaire définie en (V.1) s'écrit

$$\text{(V.4)} \quad \sum_{j=1}^{r}(1+a_j^2)\,D_y(yD_y) + \Sigma\, b_j\, yD_y + \sum_{j=1}^{r}\sum_{q=1}^{N_j} c_i\, y.y^{k_q}T_q + \sum_{j=1}^{r}\sum_{q=1}^{N_j} d_j\, y^{k_q}T_q$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{q=1}^{N_j} d_j\, y^{k_q}T_q D_y + \sum_{j=1}^{r}\sum_{p,q=1}^{N_j} y^{k_q+k_p}T_q T_p$$

Si $\xi f \in L^2(\mathbb{R}_+ ; H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}))$ il résulte du corollaire V.2 et de l'expression de A que :

$$\text{(V.5)} \qquad D_y(yD_y\,\xi u) \in L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

Nous allons montrer, en suivant Baouendi-Goulaouic [2], que (V.5) entraine

(V.6)
$$D_y\, \xi u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$
$$y\, D_{yy} \xi u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

En effet, posons $w = y\, D_y\, \xi u$. Comme $\sqrt{y}\, D_y\, \xi u \in L^2$ on a $W(0) = 0$, d'où

$$D_y \xi u = \frac{1}{y} \int_0^y D_t\, (t\, D_t\, \xi u) dt$$

L'inégalité 330 de Hardy assure alors que $D_y \xi u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ d'où (V.6).
Soit E l'espace des fonctions u telles que :

1) $u \in H^{\varepsilon}_{loc}(\Omega)$

2) $\forall\ (\mathcal{O}, \theta)$ carte locale voisinage d'un point de Γ et $\forall\ \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$

$\xi u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, $\sqrt{y}\ D_y D_{x_i} \xi u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ $y D_{yy} \xi u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ $\sqrt{y}\ y^{k_q}\ T_q D_{x_i} \xi u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$

On a alors le :

<u>Théorème V.3</u> : Si f est telle que $\xi f.\theta^{-1} \in L^2(H^{1-\varepsilon})$ et $f \in L^2(\Omega)$ la solution u du problème (V.2) est dans E.

<u>Régularité d'ordre supérieur</u> : On définit d'abord un nouvel espace des fonctions : pour $k \in \mathbb{N}$ on pose :

$$E_k = \{u \in H^{k+\varepsilon}_{loc}\ (\Omega) \ :\ \xi u \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n_+),\ \sqrt{y}\ D_y D_{x_i} \xi u \in H^k\ (\mathbb{R}^n_+)$$
$$y D_{yy}\ \xi u \in H^k(\mathbb{R}^n_+)\ \ \sqrt{y}\ y^{k_q}\ T_q\ D_{x_i}\ \xi u \in H^k(\mathbb{R}^n_+)$$

On a alors le

<u>Théorème V.4</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\xi f \in H^k(\mathbb{R}^n_+) \cap L^2\ (\mathbb{R}_+\ ;\ H^{k+1-\varepsilon})$ et $f \in H^k(\Omega)$ alors la solution u du problème (V.2) est dans E_k.

<u>Corollaire V.5</u> : Si $f \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ la solution u du problème (V.2) est dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

<u>Démonstration du théorème V.4</u> : Nous raisonnons par récurrence sur k. Pour k = 0 cela résulte du théorème III.3. Supposons le vrai pour k_o et démontrons le pour $k_o + 1$. Nous commençons par démontrer k :

<u>Lemme V.6</u> : Soit $p \in [0, \frac{1}{\varepsilon}] \cap \mathbb{N}$. Supposons que $\xi f \in L^2 (H^{k_o+1+(p-1)\varepsilon})$ alors $\Lambda^{p\varepsilon} \xi u \in E_{k_o}$.

<u>Démonstration</u> : Pour p = 0 cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Supposons la démontré pour p et démontrons la pour p + 1 :

$$A\,\Lambda^{\varepsilon}\xi u = \Lambda^{\varepsilon}\xi f + [A,\Lambda^{\varepsilon}\xi]\beta u \qquad \beta \in \mathcal{D}(\mathcal{O}\cap\overline{\Omega}) \qquad \beta = 1 \text{ sur supp. } \xi$$

Par hypothèse $\Lambda^{\varepsilon}\, \xi f \in L^2\, (H^{k_o+1+(p-1)\varepsilon})$. D'autre part, puisque $\Lambda^{p\varepsilon}\, \xi u \in E_{k_o}$ (hypothèse de récurrence) on a $[A,\Lambda^{\varepsilon}\xi]\beta u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{k_o+1+(p-1)\varepsilon})$. Enfin $\Lambda^{\varepsilon}\xi u \in$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $\Lambda^{p\varepsilon}\, \Lambda^{\varepsilon}\, \xi u \in E_{k_o}$.

c q f d

<u>Démonstration du théorème V.4</u> : En faisant $p = \frac{1}{\varepsilon}$ dans le lemme III.6, on obtient :

(V.7) $$D_{x_i}\, \xi u \in E_{k_o}$$

Ensuite on utilise le fait que $A\xi u = \xi f + [A,\xi]Bu \in H^{k_o+1}\, (\mathbb{R}^n_+)$ puisque $\xi f \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\xi u \in E_{k_o}$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.
D'autre part il est facile de voir que d'après (V.7) et la récurrence, tous les termes de $A\xi u$, sauf le terme $D_y(yD_y\xi u)$, sont dans $H^{k_o+1}(\mathbb{R}^n_+)$ on en déduit que $D_y(yD_y\xi u) \in H^{k_o+1}(\mathbb{R}^n_+)$ et par un argument semblable a celui utilisé dans [6] Proposition 3.3, on obtient :

(V.8) $$D_y \xi u \in H^{k_o+1} \quad ; \quad yD_{yy}\xi u \in H^{k_o+1}$$

d'où $\xi u \in E_{k_o+1}$ (à l'intérieur de cela résulte de Hörmander [4])

<u>Remarque V.7</u> : Des résultats de régularité analogue à ceux de [7] peuvent être obtenus pour l'opérateur $A_p = \sum_{j=1}^{r} X_j^* \varphi^p X_j$ p entier ≥ 1. Plus précisément on peut démontrer que "A_p est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap H_o^{p-1}(\Omega)$"

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés", Bull. Soc. Math. Fr. 1967, pp. 45 À 87.

[2] M.S. Baouendi et C. Goulaouic : "Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs dégénérés", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 266 (1968), pp. 336-338.

[3] M. Derridi : "Sur un problème aux limites non elliptique", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 268 pp.1593-95 et t.269 pp.11-13.

[4] L. Hörmander : "Hypoelliptic second order differential equations", Acta Mathem. 1967, Vol. 119, pp. 147-171.

[5] L. Hörmander : "Linear partial differential operators", Springer Verlag.

[6] J.J. Kohn : "Pseudo differential operators and non elliptic problems", C.I.M.E., Stresa (1968).

[7] C. Zuily : "Etude de la régularité d'une classe d'operateurs elliptiques dégénérés", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie A, t. 268 p. 532-534 (1969).