Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

F. Treves

(Annexe n°1) Résolubilité locale des équations aux dérivées partielles linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A32_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

RESOLUBILITE LOCALE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES

par F. TREVES

Annexe N° 1

§ 1. DEFINITIONS ; NOTATIONS.

Soient Ω une variété réelle de dimension n et de classe C^∞.
et

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha \qquad \left(D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

l'expression en coordonnées locales d'un opérateur différentiel P à coefficients C^∞, d'ordre $m>0$, sur Ω. Les a_α sont donc des fonctions C^∞, à valeurs complexes. Notons

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

le symbole principal de P ; $p(x,\xi)$ est une fonction C^∞ sur le fibré cotangent (réel) $T^*(\Omega)$.

Définition : On dit que P est localement résoluble en $x_0 \in \Omega$ s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans Ω tel que

$$P\mathcal{D}'(U) \supset \mathcal{D}(U) \quad ,$$

i.e. $\forall\, f \in \mathcal{D}(V)$, $\exists\, u \in \mathcal{D}'(U)$, $Pu = f$.

Remarques : 1) Soit $\tilde{C}^\infty_0$ (resp. $\tilde{\mathcal{D}}'_0$) l'espace des germes de fonctions indéfiniment différentiables (resp. distributions) en x_0.
La propriété ci-dessus entraîne

$$P\tilde{\mathcal{D}}'_0 \supset \tilde{C}^\infty_0 \quad .$$

En effet un germe appartenant à $\tilde{C}^\infty_0$ peut être représenté par $f \in C^\infty(V)$, où V est un certain voisinage de x_0. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(U \cap V)$ telle que $\alpha = 1$ dans un voisinage de x_0 ; alors $\alpha f \in \mathcal{D}(U)$, donc il existe $u \in \mathcal{D}'(U)$ telle que $Pu = \alpha f$ dans U. Par suite $Pu = f$ dans $U \cap V$, d'où $P\tilde{\mathcal{D}}'_0 \supset \tilde{C}^\infty_0$.

2) La résolubilité locale en x_0 équivaut à la résolubilité locale en tout point d'un voisinage de x_0, d'après la définition même.

On sait depuis l'exemple de Hans Léwy [1] qu'il existe des opérateurs à coefficients analytiques qui ne sont localement résolubles en aucun point. Le problème de trouver une condition nécessaire et suffisante de résolubilité locale dans le cas général semble très difficile. Mais on a des résultats pour une classe particulière d'opérateurs :

<u>Définition</u> : <u>On dit que</u> P <u>est de type principal si la différentielle en</u> ξ, $d_\xi p(x,\xi)$, <u>ne s'annule pas, pour</u> $x \in \Omega$ <u>et</u> ξ <u>vecteur réel non nul cotangent en</u> x <u>à</u> Ω.

On appelle cône caractéristique de P en $x \in \Omega$ l'ensemble des $\xi \neq 0$ cotangents en x à Ω tels que

$$p(x,\xi) = 0 .$$

D'après l'identité d'Euler des fonctions homogènes :

$$<\xi, d_\xi p(x,\xi)> = m\, p(x,\xi) ,$$

la condition "P de type principal" signifie que tout vecteur caractéristique réel ξ est racine simple de l'équation caractéristique $p(x,\xi) = 0$, i.e. que P est à caractéristiques réelles simples (on rappelle que m est > 0).

Soit z un nombre complexe, et posons

$$a(x,\xi) = \mathrm{Re}(z\, p(x,\xi)) .$$

Considérons le système différentiel

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \operatorname{grad}_\xi a(x;\xi) \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = -\operatorname{grad}_x a(x,\xi) \end{cases},\qquad \begin{array}{l}\text{(équations de}\\ \text{Hamilton-Jacobi)}\end{array}$$

où t est une variable réelle, avec les conditions initiales $x = x_0$ et $\xi = \xi_0$ si $t = 0$. Supposons $d_\xi a(x_0,\xi_0) \neq 0$. Alors le système (1) a une solution unique au voisinage de $t = 0$; c'est une courbe dans $T^*(\Omega)$, appelée <u>bande bicaractéristique</u> de a par le point (x_0,ξ_0).
Il est clair que $a(x,\xi)$ reste constant le long d'une **bande bicaractéristique** ; on appelle <u>bande bicaractéristique nulle</u> de a une solution de (1) le long de laquelle $a(x,\xi) = 0$. Cette courbe de $T^*(\Omega)$ se projette sur une véritable courbe de la base, Ω ; cette dernière est appelée <u>courbe bicaractéristique</u>.

§ 2. CONDITION DE RESOLUBILITE.

Considérons la propriété (P) :

(P) <u>Pour tout</u> $(x_0,\xi_0) \in T^*(\Omega)$, $\xi_0 \neq 0$, <u>pour tout</u> $z \in \mathbb{C}$, <u>tels que</u> $p(x_0,\xi_0) = 0$ <u>et</u> $d_\xi \operatorname{Re}(z\,p)(x_0,\xi_0) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z\,p)(x,\xi)$ <u>ne change pas de signe en</u> (x_0,ξ_0) <u>le long de la bande bicaractéristique (nulle) de</u> $\operatorname{Re}(z\,p)$ <u>passant par</u> (x_0,ξ_0).

On conjecture, et on peut démontrer en partie, que pour un opérateur de type principal, (P) équivaut à la résolubilité locale de P en tout point x_0 de Ω. Comme la résolubilité locale de P équivaut à celle de zP $(z \neq 0)$, toute condition équivalente doit posséder la même propriété d'invariance, ce qui justifie l'introduction du nombre complexe z dans (P).

<u>Proposition 1</u> : <u>Soient</u> U <u>un ouvert de</u> $T^*(\Omega) \setminus \{0\}$ <u>et</u> $q(x,\xi)$ <u>une fonction complexe</u> C^∞ <u>dans</u> U. <u>Supposons que</u> q, $d_\xi \operatorname{Re} p$, $d_\xi \operatorname{Re}(p\,q)$ <u>ne s'annulent en aucun point de</u> U.

Alors si $\operatorname{Im} p$ ne change pas de signe le long de toute bande bicaractéristique nulle de $\operatorname{Re} p$ contenue dans U, il en est de même de $\operatorname{Im}(p\,q)$ le long de toute bande bicaractéristique nulle de $\operatorname{Re}(p\,q)$ contenue dans U.
(Voir Nirenberg et Trèves [2]).

Hörmander a obtenu en 1960 une condition nécessaire de résolubilité locale, d'où on déduit que :
Si P est un opérateur à coefficients C^∞ tel que $P\mathcal{D}'(U) \supset \mathcal{D}(U)$, alors pour tout $(x_0, \xi_0) \in T^*(U)$ tel que $p(x_0,\xi_0) = 0$ et $d_\xi \operatorname{Re} p(x_0,\xi_0) \neq 0$, $\operatorname{Im} p(x,\xi)$, le long de la bicaractéristique de $\operatorname{Re} p(x,\xi)$ passant par (x_0,ξ_0), a une dérivée nulle en (x_0,ξ_0).
(Hörmander [1], théorème 6.1.1).
La condition qui apparaît ici est évidemment plus faible que (P). Le théorème suivant, énoncé sous la forme "non-(P) entraîne non-résoluble", exprime la nécessité de (P) pour la résolubilité locale, avec cependant la restriction que le zéro de $\operatorname{Im} p$ (le long de la bande bicaractéristique nulle de $\operatorname{Re} p$) où cette fonction change de signe, soit d'ordre fini.

Théorème 1 (condition nécessaire de résolubilité) : Soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^∞ sur Ω, de type principal. Supposons qu'il existe $(x_0,\xi_0) \in T^*(\Omega)$ tel que $\xi_0 \neq 0$, $p(x_0,\xi_0) = 0$, $d_\xi \operatorname{Re} p(x_0,\xi_0) \neq 0$, et que $\operatorname{Im} p$ change de signe en (x_0,ξ_0) le long de la bande bicaractéristique nulle de $\operatorname{Re} p$ passant en ce point. Si de plus (x_0,ξ_0) est un zéro d'ordre fini (impair, nécessairement) de $\operatorname{Im} p$, alors l'opérateur P n'est pas localement résoluble en x_0.

Remarque : On aurait pu introduire le nombre z dans le théorème 1, (supposons qu'il existe (x_0,ξ_0) et z tels que ...), mais P et zP étant simultanément résolubles pour $z \neq 0$, l'énoncé obtenu aurait été équivalent.

Le théorème 1 est démontré dans Nirenberg et Trèves [2]. On l'obtient en raffinant la méthode du théorème de Hörmander ... Un théorème plus fort et plus précis se trouve dans Egorov [2].

La suffisance de la propriété (P), c'est-à-dire l'implication (P) $\Rightarrow$ l'opérateur P est localement résoluble en tout point de Ω a été démontrée jusqu'ici, pour un opérateur de type principal, dans les cas suivants (n = dimension de Ω, m = ordre de P) :

- $n = 1$ tout opérateur de type principal est elliptique.
- $n = 2$ (coefficients C^{∞}) voir Trèves [1]
- $n > 2$ et $m = 1$ (coefficients C^{∞}) voir Nirenberg et Trèves [1], et un résultat plus fort dans Trèves [2].

Notons que tout opérateur du premier ordre dont la partie principale ne s'annule en aucun point est nécessairement de type principal.

- $n > 2$ et $m > 1$, si Ω est une variété analytique réelle et si la partie principale $p(x,D)$ est à coefficients analytiques : la démonstration est donnée dans Nirenberg et Trèves [3], et sera décrite dans les paragraphes 4 à 8. L'énoncé détaillé est le suivant :

Théorème 2 (c. n. s. de résolubilité) : Soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^{∞} sur une variété analytique Ω. On suppose P de type principal, et les coefficients de la partie principale analytiques dans Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(P) (voir ci-dessus)

a) P est localement résoluble en tout point de Ω.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans Ω tel que pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\|u\|_{m-1} \leq \varepsilon \, \|{}^tP u\|_0$$

c) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 et une constante $C > 0$ tels que pour tout $u \in \mathcal{D}(V)$

$$\|u\|_{s+m+1} \leq C \, \|{}^tP u\|_s \quad .$$

Les normes sont celles des espaces de Sobolev et ${}^tP$ désigne le transposé formel de P.
c) implique que si le second membre f est régulier (disons d'ordre de Sobolev s), il existe une solution u d'ordre $s+m-1$.

L'essentiel de ces résultats s'étend à des systèmes déterminés d'équations aux dérivées partielles.

§ 3. HYPOELLIPTICITE.

Définition : On dit que P est hypoelliptique dans Ω si pour tout ouvert U de Ω, et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(U)$, $Pu \in C^\infty(U)$ entraîne $u \in C^\infty(U)$.

Considérons la propriété $(\widetilde{P})$:

$(\widetilde{P})$ Il existe un entier pair 2k tel que pour tout $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega)$, $\xi_0 \neq 0$, pour tout $z \in C$, tels que $p(x_0, \xi_0) = 0$ et $d_\xi \operatorname{Re}(z\,p)(x_0, \xi_0) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z\,p)$ a en (x_0, ξ_0) un zéro d'ordre pair $\leq 2k$, le long de la bande bicaractéristique nulle de $\operatorname{Re}(z\,p)$ passant en ce point.

Yu. V. Egorov ([1], [2]) a montré que $(\widetilde{P})$ est équivalente à des inégalités sous-elliptiques, précisément :

(SE) $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, \Omega' \subset\subset \Omega$, $\forall\, s, s' \in \mathbb{R}$, $\exists\, C > 0$, $\forall\, u \in \mathcal{D}(\Omega')$,

$$\|u\|_{s+m-1+\delta} \leq C(\|Pu\|_s + \|u\|_{s'}) .$$

Les normes sont prises dans les espaces de Sobolev, et on peut prendre $\delta = \dfrac{1}{2k+1}$. Les résultats de Yu. V. Egorov s'appliquent à une large classe d'opérateurs différentiels (incluant ceux de type principal) et même d'opérateurs pseudo-différentiels (pour ces derniers cependant il faut modifier l'énoncé de $(\widetilde{P})$).

Les inégalités (SE) entraînent l'hypoellipticité, comme on le voit facilement. Pour une démonstration du fait que $(\widetilde{P}) \Rightarrow (SE)$, voir Trèves [3]. Par suite :

<u>Théorème 3 (condition suffisante d'hypoellipticité)</u> : <u>Soit</u> P <u>un opérateur différentiel linéaire de type principal, à coefficients</u> C^∞ <u>sur</u> Ω. <u>La propriété</u> $(\widetilde{P})$ <u>entraîne que</u> P <u>est hypoelliptique dans</u> Ω.

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de

$$\frac{\partial}{\partial t} + i \exp\left(-\frac{1}{|t|}\right) \frac{\partial}{\partial x} \quad .$$

Cet opérateur est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$, mais sa partie imaginaire a un zéro d'ordre infini (en $t = 0$) le long de toute bande bicaractéristique de la partie réelle. Si l'on écarte le cas des zéros d'ordre infini, la réciproque est vraie :

<u>Théorème 4</u> : <u>Soit</u> P <u>un opérateur différentiel linéaire à coefficients</u> C^∞ <u>sur</u> Ω, <u>de type principal</u>.
<u>Supposons</u> P <u>hypoelliptique dans</u> Ω.
<u>Si de plus il existe un entier</u> k_1 <u>tel que pour tout</u> $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega)$, $\xi_0 \neq 0$, <u>pour tout</u> $z \in \mathbb{C}$ <u>tels que</u> $p(x_0, \xi_0) = 0$ <u>et</u> $d_\xi \operatorname{Re}(z\,p)(x_0, \xi_0) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z\,p)$ <u>ait en</u> (x_0, ξ_0) <u>un zéro d'ordre inférieur à</u> k_1 <u>le long de la bande bicaractéristique nulle de</u> $\operatorname{Re}(z\,p)$ <u>passant en ce point, alors</u> $(\widetilde{P})$ <u>est vérifiée, i.e. ce zéro est d'ordre pair</u>.

<u>Démonstration du théorème 4</u> : Supposons qu'il existe $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega)$, $\xi_0 \neq 0$, et $z \in \mathbb{C}$ tels que $p(x_0, \xi_0) = 0$, $d_\xi \operatorname{Re}(z\,p)(x_0, \xi_0) \neq 0$ et que $\operatorname{Im}(z\,p)$ ait en (x_0, ξ_0) un zéro d'ordre <u>impair</u> le long de la bande bicaractéristique nulle de $\operatorname{Re}(z\,p)$ passant en ce point. D'après le théorème 1, l'opérateur ${}^tP$, dont la partie principale est $(-1)^m p$, n'est pas localement résoluble en x_0. Or une conséquence facile du théorème du graphe fermé est que l'hypoellipticité de P entraîne la résolubilité locale de ${}^tP$ en tout point de Ω ; il y a donc contradiction.

Un résultat plus difficile est le suivant :

<u>Théorème 5</u> : <u>Soit</u> P <u>un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques sur une variété analytique</u> Ω, <u>de type principal. La propriété</u> $(\widetilde{P})$ <u>équivaut à l'hypoellipticité de</u> P <u>dans</u> Ω.
(voir Trèves [4]). Noter qu'on n'a pas seulement supposé la partie principale, mais l'opérateur entier, à coefficients analytiques.

<u>Remarque</u> : Malgré les apparences, $(\widetilde{P})$ n'est pas "sensiblement équivalent" à (P) : pour l'opérateur des ondes $D_1^2 - D_2^2$, on a $Re(z\,p)(x,\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)Re\, z$, $Im(z\,p)(x,\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)Im\, z$ donc $Im(z\,p)$ est identiquement nul sur toute bande bicaractéristique nulle de $Re(z\,p)$; (P) est trivialement vérifiée, $(\widetilde{P})$ est trivialement fausse. On sait bien par ailleurs que l'opérateur est, sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$, localement résoluble mais non hypoelliptique.

Si Ω est une variété analytique, et si P est à coefficients analytiques, une autre propriété importante est l'hypoe lipticité analytique.

<u>Définition</u> : <u>On dit que</u> P <u>est hypoelliptique-analytique dans</u> Ω <u>si</u> P <u>y est hypoelliptique et si de plus pour tout ouvert</u> U <u>de</u> Ω, <u>et toute distribution</u> $u \in \mathcal{D}'(U)$, $Pu \in \mathcal{a}(U)$ <u>entraîne</u> $u \in \mathcal{a}(U)$
($\mathcal{a}(U)$ = fonctions analytiques dans U).

On peut démontrer que tout opérateur hypoelliptique de type principal (à coefficients analytiques) est hypoelliptique-analytique (voir Trèves [5] ; ce résultat était déjà connu pour les opérateurs elliptiques, et aussi (Humio Suzuki, 1963) pour les opérateurs du premier ordre).

<u>Un exemple</u> : Considérons l'opérateur $D_t + i\, t^k D_x$ sur $\mathbb{R}^2$, où k est un entier naturel.

On a $p(x,t,\xi,\tau) = \tau + i\, t^k \xi$. Les bicaractéristiques de Re p, paramétrées par s, sont solution du système

$$\frac{dx}{ds} = 0 \qquad \frac{d\xi}{ds} = 0 \qquad \frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{d\tau}{ds} = 0 .$$

La bicaractéristique nulle passant par le point $x_o = 0$, $t_o = 0$, $\xi_o \neq 0$, $\tau_o = 0$ est donc définie par

$$x = 0 \ , \ \xi = \xi_o \ , \ \tau = 0.$$

Sur cette courbe

$$\operatorname{Im} p = \xi_o\, t^k .$$

Les conditions (P) et $(\widetilde{P})$ s'écrivent alors : k est pair. Comme on peut montrer directement que l'opérateur est hypoelliptique-analytique lorsque k est pair, on a ici équivalence entre les propriétés suivantes : parité de k, (P), $(\widetilde{P})$, résolubilité locale, hypoellipticité, hypoellipticité-analytique

<u>Un autre exemple</u> : L'opérateur

$$P = D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 + i(D_2 - e^{-(x^3)^2} D_3)^2 \qquad \left(D_j = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

est analytique-hypoelliptique dans $\mathbb{R}^3$ (entier) et cependant n'est elliptique en aucun point de $\mathbb{R}^3$ (on a appliqué les critères ci-dessus).

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

Nous admettons ici la partie nécessaire : a) entraîne (P), pour donner seulement un aperçu de la démonstration de (P) entraîne b).
Pour b) entraîne c), on remplace dans l'inégalité b) $u(x)$ par $\varphi(x)\,(1-\Delta)^{s/2}\,v(x)$, où $v\in\mathcal{D}(U)$, $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, et φ est égale à 1 au voisinage de x_0. On en déduit

$$(2) \qquad \|v\|_{s+m-1} \leq \varepsilon\,\|{}^tP\,v\|_s + C_\varepsilon\,\|v\|_{s+m-2} \quad .$$

Si on se limite au cas où $s+m-1 \geq -\frac{1}{2}n$, on a

$$C_\varepsilon\,\|v\|_{s+m-2} \leq \frac{1}{2}\,\|v\|_{s+m-1}$$

lorsque le support de v est assez petit. D'où l'inégalité c) sous la forme : pour tout $x_0\in\Omega$, pour tout $s \geq 1-m-\frac{n}{2}$, <u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que, pour $u\in\mathcal{D}(U)$,

$$\|u\|_{s+m-1} \leq \varepsilon\,\|{}^tP\,u\|_s \; .$$

Pour s réel quelconque, il faudra renoncer à l'ε, et on raisonne différemment. Si l'inégalité c) était fausse, il existerait une suite $u_j\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\|u_j\|_{s+m-1} = 1 \quad , \quad \|{}^tP\,u_j\|_s \to 0$$

et $\operatorname{supp} u_j \to \{0\}$ lorsque $j\to+\infty$. On peut extraire de (u_j) une sous-suite convergeant vers u dans H^{s+m-2}. Alors d'après (2) cette sous-suite converge vers u dans H^{s+m-1}, donc $\|u\|_{s+m-1}=1$. Or ${}^tP\,u=0$, et le support de u est réduit à $\{0\}$, ce qui n'est possible que pour $u=0$, comme on le voit en représentant u comme une combinaison linéaire de dérivées de la mesure de Dirac, d'où une contradiction. On en déduit c).

Enfin c), écrit avec $s = 1 - m$, donne

$$\|u\|_o \leq C \ \|{}^tP\,u\|_{1-m}$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$. Si $f \in L^2(V)$, la forme linéaire

$${}^tP\,u \to \int u\,f\,dx$$

est donc bien définie, et continue, sur ${}^tP\mathcal{D}(V)$ muni de la norme de $H_o^{1-m}(V)$. Par suite il existe $\varphi \in H^{m-1}(V)$ qui prolonge cette forme linéaire :

$$\langle\varphi,\ {}^tP\,u\rangle = \int u\,f\,dx \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}(V),$$

donc $P\varphi = f$ au sens des distributions sur V. Ainsi $P\,H^{m-1}(V) \supset L^2(V)$; d'où a fortiori la résolubilité locale a).

La démonstration de (P) entraîne b) s'effectue en trois étapes : réduction à un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre, transformation de cet opérateur, et démonstration de l'inégalité pour cet opérateur transformé.

§ 5. REDUCTION AU PREMIER ORDRE.

Dans la suite, il sera commode de noter $n + 1$ la dimension de la variété. Comme toutes les propriétés considérées sont de nature locale, nous supposons que Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$. Notons $y = (x,t)$ le point courant de Ω, $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$; de même $\eta = (\xi,\tau)$ la variable duale.

Il est clair, à cause du ε, que l'inégalité b) ne fait intervenir que la partie principale $p(y, - D)$ de l'opérateur ${}^tP$. Il suffit donc de démontrer l'inégalité

(b) $$\|u\|_{m-1} \leq \varepsilon \ \|p(y,D)\|_o \quad .$$

Soit $(y_0, \eta_0) \in T^*(\Omega)$ avec $|\eta_0| = 1$. Si $p(y_0, \eta_0) \neq 0$, on a $|p(y,\eta)| \geq C > 0$ pour y voisin de y_0 et η voisin de η_0 sur la sphère $|\eta| = 1$; par homogénéité

$$(3) \qquad |p(y,\eta)| \geq C\ |\eta|^m$$

pour y voisin de y_0 et η dans un cône de sommet 0 contenant η_0.
Si $p(y_0, \eta_0) = 0$, et comme P est de type principal, on peut supposer les coordonnées choisies de telle manière que $\frac{\partial p}{\partial \tau}(y_0, \eta_0) \neq 0$. Alors l'équation $p(y,\xi,\tau) = 0$ peut être résolue au voisinage de (y_0, η_0) par le théorème des fonctions implicites, suivant $\tau = \lambda(y,\xi)$, λ analytique (et homogène de degré 1 en ξ). On en déduit la factorisation

$$(4) \qquad p(y,\xi,\tau) = (\tau - \lambda(y,\xi))\ q(y,\xi,\tau)$$

au voisinage de (y_0, η_0) ; $q(y,\eta)$ désigne une fonction analytique de (y,η) au voisinage de (y_0, η_0), homogène en η de degré $m-1$, avec $q(y_0, \eta_0) \neq 0$, donc

$$(5) \qquad |q(y,\eta)| \geq C\ |\eta|^{m-1}$$

pour y voisin de y_0 et η dans un cône ouvert de sommet 0 contenant η_0.
Au voisinage de chaque η_0 tel que $|\eta_0| = 1$ on a donc soit (3), soit (4) et (5).
Introduisons une partition C^∞ de l'unité $1 = \Sigma\, f_i(\eta)$ sur la sphère $|\eta| = 1$, associée à un recouvrement de cette sphère par de tels voisinages, et écrivons $p(y,\eta) = \Sigma\, p(y,\eta)\, f_i(\eta)$.
Si on suppose avoir démontré l'inégalité

b') <u>Pour</u> $y_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, <u>il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> y_0 <u>tel que pour</u> $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\|u\|_0 \leq \varepsilon\ \|(D_t - \lambda(y,D_x))\, u\|_0$$

pour l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $(\tau - \lambda(y,\xi))$, on en déduira l'inégalité b) en utilisant, sur chaque ouvert de la partition, les inégalités elliptiques données par (3) ou par (5). La démonstration détaillée nécessite l'introduction d'opérateurs pseudo-différentiels associés aux $f_i(\eta)$, elle est assez fastidieuse et se trouve bien entendu dans Nirenberg et Trèves [3].

Il suffit donc de démontrer l'inégalité b'), pour un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre. On vérifie enfin que l'on peut, sans altérer vraiment l'inégalité b'), supposer que λ a été tronquée de manière à la rendre à support compact en y.

§ 6. TRANSFORMATION DE L'OPERATEUR $D_t - \lambda(y,D_x)$.

Nous allons voir dans ce paragraphe que, pour démontrer l'inégalité b'), on peut se ramener au cas où $\lambda(y,\xi)$ est imaginaire pur.

Soit $L = D_t - \lambda(y,D_x)$, avec $\lambda(y,\xi) = a(y,\xi) + i\, b(y,\xi)$, l'opérateur introduit au paragraphe précédent. On peut remplacer a et b par leurs parties <u>auto-adjointes</u> a_o et b_o : on ne fait ainsi qu'ajouter à L un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, ce qui ne modifie pas l'inégalité b'), à cause de ε.

Considérons, pour chaque t voisin de 0, un opérateur linéaire $U(t)$ de $L^2_x(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_x(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$(6) \qquad \begin{cases} D_t\, U(t) = a_o(x,t,D_x)\, U(t) \\ U(0) = \mathrm{Id}. \end{cases}$$

Il est bien connu que ce problème a une solution unique. Si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a, pour s réel :

$$\frac{d}{dt}\, \|U(t)\,u\|^2_s = 2\,\mathrm{Re}\,\big(i\, a_o(x,t,D_x)\, U(t)\; u(x),\; U(t)\, u(x)\big)_s$$

$((.))_s$ désigne le produit scalaire de $H^s_x(\mathbb{R}^n)$:

$$(v.w)_s = ((1-\Delta)^s v, w)_0 \quad ;$$

rappelons que $\frac{d}{dt} = i D_t$)

ou $$\frac{d}{dt}\|Uu\|_s^2 = ((1-\Delta)^s i a_0 Uu, Uu)_0 + ((1-\Delta)^s Uu, i a_0 Uu)_0$$

$$= ([(1-\Delta)^s, i a_0] Uu, Uu)_0$$

puisque a_0 est auto-adjoint pour le produit scalaire L^2. Si $s=0$, on en déduit que $\|U(t)u\|_0^2 = \|U(0)u\|_0^2 = \|u\|_0^2$. Donc $U(t)$ est une isométrie de L^2_x. Comme $U(0)$ est inversible, $U(t)$ est un <u>isomorphisme</u> de L^2_x pour t voisin de 0.

Pour s quelconque, le crochet $[(1-\Delta)^s, i a_0]$ est un opérateur pseudo-différentiel (en x) d'ordre $\leq 2s$, donc

$$\left|\frac{d}{dt}\|U(t)u\|_s^2\right| \leq C \|U(t)u\|_s^2 \quad ,$$

est $U(t)$ est continu de H^s_x dans H^s_x.

De plus on a, pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ (fonction de x et t)

$$L(Uu) = (D_t - a_0 - i b_0) Uu$$

$$= (D_t U - a_0 U)u + (U D_t - i b_0 U) u$$

$$= U(D_t - i U^{-1} b_0 U) u \quad ,$$

d'après l'équation (6). Donc

$$\|L(Uu)\|_0 = \|(D_t - i U^{-1} b_0 U) u\|_0$$

(normes dans $L^2_{x,t}$), et comme $\|Uu\|_0 = \|u\|_0$, on est ramené à démontrer b') pour l'opérateur $D_t - iU^{-1} b_0 U$. Précisément, nous démontrerons au § 8 l'inégalité.

b") <u>Il existe</u> $C > 0$ <u>tel que pour</u> $\varepsilon > 0$ <u>assez petit, et pour</u> $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, <u>à support dans la bande</u> $|t| < \varepsilon$,

$$\|v\|_0 \leq C\,\varepsilon\,\|(D_t - i\,U^{-1}\,b_0\,U)\,v\|_0 \ .$$

Cette inégalité peut être en effet prolongée par continuité aux fonctions v de la forme $U(t)^{-1}\,u(x,t)$, avec $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ à support petit, et b') en résulte.

Nous aurons besoin d'une construction explicite de $U(t)$, au moyen des opérateurs de Fourier intégraux, que nous développons à part dans le paragraphe suivant.

§ 7. APPROXIMATION DE U PAR DES OPERATEURS DE FOURIER INTEGRAUX.

L'approximation de $U(t)$ sera un opérateur $K(t)$ de la forme

$$K(t)\,u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\varphi(x,t,\xi)}\,k(x,t,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

(opérateur de Fourier intégral ; $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, fonction de x seul ; φ et k fonctions C^∞, φ à valeurs réelles).

Les conditions

$$(7) \qquad \varphi(x,0,\xi) = \langle x,\xi\rangle \qquad k(x,0,\xi) = 1$$

assurent que $K(0) = \mathrm{Id}$.

Nous allons essayer de déterminer φ et k tels que

$$(8) \qquad (D_t - a_0)(e^{i\varphi}\,k) \sim 0$$

où a_0 désigne la partie auto-adjointe de l'opérateur pseudo-différentiel $a(x,t,D_x)$:

$$a_0(x,t,\xi) = a(x,t,\xi) + i\,R(x,t,\xi)$$

avec R d'ordre 0, et où le signe $\sim$ signifie l'égalité modulo un opérateur régularisant. De façon précise, (8) s'écrit :
pour tous M, $N \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}$, et $|\alpha| + \beta \leq M$, et pour tous x, t, ξ

$$|D_x^\alpha D_t^\beta (D_t - a_o(x,t,D_x))\, e^{i\varphi(x,t,\xi)}\, k(x,t,\xi)| \leq C\,(1 + |\xi|)^{-N} \quad .$$

Pour résoudre (8) nous aurons besoin de la "formule de Leibniz" (voir Hörmander [2]) : posons

$$\varphi_x = d_x \varphi \quad ; \quad a_o^{(\alpha)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a_o \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}^{-n} \quad ;$$

$$\psi(x,x',t,\xi) = \varphi(x',t,\xi) - \varphi(x,t,\xi) - \langle \varphi_x(x,t,\xi) \, , \, x' - x \rangle \quad .$$

La formule s'écrit :

$$a_o(x,t,D_x)(e^{i\varphi}k) \sim e^{i\varphi} \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, a_o^{(\alpha)}(x,t,\varphi_x) \;\times$$

$$\times\; [D_{x'}^\alpha (e^{i\psi(x,x',t,\xi)} k(x',t,\xi))]_{x'=x} \quad .$$

En reportant dans (8), il vient :

$$(\varphi_t - a_o(x,t,\varphi_x))k(x,t,\xi) + D_t k \,-$$

$$- \sum_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha!}\, a_o^{(\alpha)}(x,t,\varphi_x)[D_{x'}^\alpha (e^{i\psi(x,x',t,\xi)}\, k(x',t,\xi))]_{x'=x} \sim 0 \quad .$$

Nous imposons à la "phase" φ la condition :

(9) $$\varphi_t = a(x,t,\varphi_x)$$

(avec $\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$), jointe à (7). Alors, compte tenu de l'égalité $a_o = a + iR$, l'équation devient :

$$D_t k \sim R(x,t,\varphi_x)k + \sum_{\alpha > 0} \quad \ldots$$

On la résout en cherchant k sous la forme $k \sim \sum_0^\infty k_j$, avec $k_j = k_j(x,t,\xi)$ homogène en ξ de degré $-j$. En séparant les termes par degrés d'homogénéité en ξ, on obtient pour déterminer les k_j les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} k_j = \langle d_\xi a(x,t,\varphi_x), d_x k_j \rangle + C_o k_j + \sum_{j'=0}^{j-1} Q_j^{j'} k_{j'}$$

où C_o est une fonction de x, t, ξ homogène en ξ de degré zéro dont nous donnerons bientôt l'expression explicite, et les $Q_j^{j'}$ des opérateurs différentiels par rapport à x, à coefficients réguliers en x, t, ξ. Si on leur adjoint les conditions initiales

$$k_o(x,0,\xi) = 1 \qquad k_j(x,0,\xi) = 0 \quad \text{si} \quad j > 0 \quad ,$$

ces équations déterminent les k_j par récurrence.
Nous nous intéresserons particulièrement au système qui définit k_o :

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} k_o = \langle d_\xi a(x,t,\varphi_x) , d_x k_o \rangle + C_o k_o \\[2ex] k_o(x,0,\xi) = 1 \quad . \end{cases}$$

Afin d'établir certaines relations, considérons les équations de Hamilton-Jacobi pour le symbole $\tau - a(x,t,\xi)$

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -d_\xi a(x,t,\xi) \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = d_x a(x,t,\xi) \end{cases} \qquad (x,\xi)_{t=o} = (x_o,\xi_o) \quad .$$

Soit $x = x(x_o,t,\xi_o)$ la solution x de (11). Compte tenu du système (9) (7) vérifié par φ, on voit sans peine que les fonctions

$$x = x(x_o,t,\xi_o)$$

et

$$\xi = \varphi_x(x(x_o,t,\xi_o) , t, \xi_o)$$

vérifient (11). Par unicité des solutions des équations différentielles, c'est la solution de (11).
De plus la fonction

$$\Phi(t) = \varphi(x(x_0, t, \xi_0), t, \xi_0)$$

vérifie $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, donc reste constante sur une courbe intégrale de (11).
Comme $\Phi(0) = \langle x_0 . \xi_0 \rangle$ d'après (7), on a :

$$(12) \qquad \varphi(x(x_0, t, \xi_0), t, \xi_0) = \langle x_0, \xi_0 \rangle \quad .$$

Par ailleurs, d'après l'expression que nous avons trouvée pour la solution ξ de (11), on voit que x est la solution de

$$(13) \qquad \frac{dx}{dt} = - d_\xi a(x, t, \varphi_x(x, t, \xi_0)) \qquad x(0) = x_0 \quad .$$

C'est une équation différentielle ordinaire (non linéaire) et l'application

$$x_0 \mapsto x(x_0, t, \xi_0) \quad ,$$

pour t et ξ_0 fixés, est un difféomorphisme dans un voisinage de 0. Soit

$$x \mapsto x_0(x, t, \xi_0)$$

le difféom phisme inverse. En dérivant la relation évidente $x_0(x(x_0, t, \xi_0), t, \xi_0) = x_0$ par rapport à t, on trouve une équation différentielle que vérifie aussi $d_\xi \varphi(x, t, \xi_0)$, d'après (9). Comme $d_\xi \varphi(x, 0, \xi_0) = x$ $= x_0(x, 0, \xi_0)$, on en déduit par unicité que

$$(14) \qquad x_0(x, t, \xi_0) = d_\xi \varphi(x, t, \xi_0) \quad .$$

Ceci va permettre de calculer le jacobien $\frac{dx_0}{dx}$ (t et ξ_0 fixés).

On a

$$(15) \qquad \frac{dx_o}{dx}(x,t,\xi_o) = k_o^2(x,t,\xi_o) \quad .$$

<u>Démonstration de cette étonnante formule</u> :

D'après (10), k_o^2 vérifie le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(k_o^2) = <(d_\xi a)(x,t,\varphi_x), d_x(k_o^2)> + 2\,C_o\,k_o^2 \\ k_o^2(x,0,\xi_o) = 1 \quad . \end{cases}$$

L'expression annoncée de C_o s'écrit :

$$2\,C_o(x,t,\xi_o) = \operatorname{tr} A''(x,t,\xi_o) \quad ,$$

où A" est la matrice d'éléments :

$$A''_{ij}(x,t,\xi_o) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial \xi_j}\right)(x,t,\varphi_x(x,t,\xi_o))\right]$$

$1 \leq i,j \leq n$. Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_{o,j}}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} \qquad \text{d'après (14)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] \quad . \end{aligned}$$

On évalue ce crochet en utilisant (9)

$$\begin{aligned} [\ldots] &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(a(x,t,\varphi_x(x,t,\xi))) \\ &= \sum_k \frac{\partial a}{\partial \xi_k}(x,t,\varphi_x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x,t,\xi)\right) \quad . \end{aligned}$$

Le deuxième facteur s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial x_k}(x_{o,j}(x,t,\xi))$ d'après (14). En effectuant $\frac{\partial}{\partial x_i}[\ldots]$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_{o,j}}{\partial x_i}\right) = <(d_\xi a)(x,t,\varphi_x), d_x\left(\frac{\partial x_{o,j}}{\partial x_i}\right)> + \sum_k A''_{ik}\frac{\partial x_{o,j}}{\partial x_k} \quad .$$

D'où par un petit calcul d'algèbre extérieure :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{dx_o}{dx}\right) = <(d_\xi a)(x,t,\varphi_x), d_x\left(\dfrac{dx_o}{dx}\right)> + \operatorname{tr} A''.\dfrac{dx_o}{dx} \\ \dfrac{dx_o}{dx}(x,0,\xi_o) = 1 \quad . \end{cases}$$

Par unicité, on en déduit (15).

D'après (7) (8) on a :

$$\begin{cases} D_t K(t) = a_o(x,t,D_x)K(t) + R_1(t) \\ K(0) = Id \quad , \end{cases}$$

où R_1 désigne un opérateur régularisant.
Par suite, d'après (6) :

$$\begin{cases} (D_t - a_o(x,t,D_x))(U(t)-K(t)) = R_1(t) \\ U(0)-K(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

De là résulte que

$$U(t) = K(t) + R_2(t) \quad ,$$

où $R_2(t)$ est un opérateur régularisant (en x). En ce sens K(t) constitue une approximation de U(t).

Nous parvenons enfin à l'expression de la partie principale de l'opérateur $U^{-1}b_o U$ qui figure dans l'inégalité à démontrer b") - c'était là le but de la construction explicite de U(t).

On a :

$$(17)\qquad \boxed{U^{-1}(t)\, b_0(x,t,D_x)\, U(t) \;=\; \beta(x,t,D_x) + S(x,t,D_x)}\ .$$

où β a pour symbole

$$\boxed{b(x_0,t,\xi_0) \;=\; b(x(x_0,t,\xi_0),t,\xi(x_0,t,\xi_0))}$$

(en introduisant à nouveau la solution x, ξ du système de Hamilton-Ja (11)), et S est un opérateur linéaire borné de L^2_x .
En effet $U^{-1}(t) = U^*(t)$; par un calcul immédiat, on a

$$(K^*(t)\, v(x))^{\wedge}(\xi) \;=\; \int e^{-i\varphi(x,t,\xi)}\, \bar{k}(x,t,\xi)\, v(x)\, dx \quad .$$

D'autre part

$$b_0 K(t)\, u(x) \;=\; (2\pi)^{-n} \int e^{i\varphi(x,t,\xi_0)}\, b_1(x,t,\xi_0)\, \hat{u}(\xi_0)\, d\xi_0 \quad .$$

où le symbole b_1 est, d'après la "formule de Leibniz", donné par

$$(18)\qquad b_1(x,t,\xi) \;=\; \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\, b_0^{(\alpha)}(x,t,\varphi_x)\ \times$$

$$\times\ \left[D^{\alpha}_{x'}\left(e^{i\Phi(x,x',t,\xi)}\, k(x',t,\xi)\right)\right]_{x'=x}$$

$$=\; b_0(x,t,\varphi_x(x,t,\xi))\, k(x,t,\xi) + \ldots$$

Par suite

$$(K^*(t)\, b_0\, K(t)\, u)^{\wedge}(\xi) \;=$$

$$=\; (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\varphi(x,t,\xi_0)-\varphi(x,t,\xi))}\, \bar{k}(x,t,\xi)\, b_1(x,t,\xi_0)\, \hat{u}(\xi_0)\, d\xi_0\, dx \quad .$$

ce que l'on peut écrire aussi

$$(1') \qquad K^*(t)\, b_0\, K(t)\, u(x_0) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{i\langle x_0,\xi_0\rangle}\, b_2(x_0,t,\xi_0)\, \hat{u}(\xi_0)\, d\xi_0$$

avec

$$b_2(x_0,t,\xi_0) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i[\langle x_0,\xi-\xi_0\rangle+\varphi(x,t,\xi_0)-\varphi(x,t,\xi)]} \cdot$$

$$\cdot\ \overline{k}(x,t,\xi)\, b_1(x,t,\xi_0)\, dx\, d\xi \ .$$

Soit $g(\theta)$ une fonction C^∞ de $\theta \geq 0$, telle que $0 \leq g \leq 1$, $g(\theta) = 1$ si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}$, et $g(\theta) = 0$ si $\theta \geq \frac{1}{2}$. Posons

$$g(\xi,\xi_0) = g(|\xi - \xi_0|/|\xi_0|) \ .$$

Nous considérons "l'approximation" suivante de b_2 :

$$b_3(x_0,t,\xi_0) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i[\langle x_0,\xi-\xi_0\rangle+\varphi(x,t,\xi_0)-\varphi(x,t,\xi)]} \cdot$$

$$\cdot\ g(\xi,\xi_0)\ \overline{k}(x,t,\xi)\ b_1(x,t,\xi_0)\, dx\, d\xi \ .$$

Nous allons effectuer un changement de variable dans l'intégration en x, en posant :

$$y = \int_0^1 (d_\xi\varphi)(x,t,s\,\xi + (1-s)\xi_0)\, ds \ .$$

On a $y = x$ lorsque $t = 0$, et même lorsque $|t|$ est petit pourvu que $|x|$ soit assez grand (cela vient de la compacité du support de $a(x,t,\xi)$ comme fonction de x). Soit J la matrice jacobienne de y par rapport à x. Comme $\varphi(x,t,\xi)$ est homogène en ξ de degré 1, et vaut $\langle x,\xi\rangle$ pour $t = 0$, on voit que la norme de la matrice $1 - J$ est $\leq$ Cste . $|t|$. Par suite, pour $|t|$ petit, l'application $x \mapsto y$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, qui est l'identité pour $|x|$ grand. On a bien sûr

$$<y, \xi - \xi_0> \quad = \quad \varphi(x,t,\xi) - \varphi(x,t,\xi_0)$$

d'où

$$b_3(x_0,t,\xi_0) \quad = \quad (2\pi)^{-n} \iint e^{i<x_0-y,\xi-\xi_0>} \, b_4(y,t,\xi.\xi_0) dy \, d\xi$$

avec

$$b_4(y,t,\xi,\xi_0) \quad = \quad g(\xi,\xi_0) \, \bar{k}(x,t,\xi) \, b_1(x,t,\xi_0) |\det J^{-1}| \quad .$$

(Dans cette dernière formule, x est exprimé en fonction de y, pour chaque t, ξ, ξ_0 fixés, au moyen du difféomorphisme inverse de $x \mapsto y$). L'intégrale donnant b_3 converge comme on le voit en intégrant d'abord en y.
Posons

$$b_4(y,t,\xi,\xi_0) \quad = \quad b_4(y,t,\xi_0,\xi_0) + R_4(y,t,\xi,\xi_0) \quad .$$

On a d'après l'expression de b_3 :

$$b_3(x_0,t,\xi_0) \quad = \quad b_4(x_0,t,\xi_0,\xi_0) + R_3(x_0,t,\xi_0)$$

avec

$$R_3(x_0,t,\xi_0) \quad = \quad (2\pi)^{-n} \iint e^{i<x_0-y,\xi-\xi_0>} \, R_4(y,t,\xi,\xi_0) \, dy \, d\xi \quad .$$

Or, pour $\xi = \xi_0$,

$$y \quad = \quad (d_\xi \varphi) \, (x,t,\xi_0) \quad ;$$

donc le changement de variable $x \mapsto y$ coïncide pour $\xi = \xi_0$ avec le changement de variable $x \mapsto x_0$, d'après (14). Alors la définition de b_4 donne

$$b_4(x_o,t,\xi_o,\xi_o) \quad = \quad \bar{k}(x,t,\xi_o)\ b_1(x,t\ \xi_o)\ \frac{dx}{dx_o}$$

avec cette fois $x = x(x_o,t,\xi_o)$. D'après (18), il vient

$$b_4(x_o,t,\xi_o,\xi_o) \quad = \quad |k(x,t,\xi_o)|^2 b_o(x,t,\varphi_x(x,t,\xi_o))\ \frac{dx}{dx_o} + R_5(x_o,t,\xi_o)$$

où R_5 est un symbole de degré zéro.
Si on se souvient de (15), il ne reste plus que

$$b_4(x_o,t,\xi_o,\xi_o) \quad = \quad b_o(x,t,\varphi_x(x,t,\xi_o)) + R_6(x_o,t,\xi_o) \quad .$$

Comme b et b_o ont même partie principale, il vient

$$b_4(x_o,t,\xi_o,\xi_o) \quad = \quad b(x(x_o,t,\xi_o),t,\xi(x_o,t,\xi_o)) + R_7(x_o,\ldots\xi_o)$$

en utilisant l'égalité

$$\xi(x_o,t,\xi_o) \quad = \quad \varphi_x(x(x_o,t,\xi_o),t,\xi_o) \quad .$$

Cette formule met en évidence la partie principale $\beta(x_o,t,\xi_o)$ annoncée dans (17). Nous avons finalement remplacé, en plusieurs étapes, le symbole $b_2(x_o,t,\xi_o)$ figurant dans (19) par $\beta(x_o,t,\xi_o)$. Il faut vérifier pour établir (17) que les restes successifs

$$\begin{aligned} & b_3 - b_2 && \text{(dû à la troncature par g)} \\ & b_4 - b_3 = -R_3 && \\ & \beta - b_4 = -R_7 && \end{aligned}$$

sont des symboles de degré zéro. Nous l'avons vu pour R_7 ; la démonstration pour les deux premiers n'est pas difficile et se trouve dans Nirenberg et Trèves [4].

§ 8. DEMONSTRATION DE L'INEGALITE b"

D'après (17), et à cause de ε, il nous suffit de démontrer l'inégalité

b^3) Il existe $C > 0$ tel que pour $\varepsilon > 0$ assez petit et pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, à support dans la bande $|t| < \varepsilon$,

$$\|v\|_0 \leq C\,\varepsilon\, \|(D_t - i\,\beta(x,t,D_x))v\|_0$$

(normes dans $L^2_{x,t}$).

Or l'hypothèse (P) (qu'il fallait bien utiliser un jour) donne : $b(x,t,\xi)$ ne change pas de signe le long d'une bande bicaractéristique nulle de $\tau - a(x,t,\xi)$ (on a tenu compte de la proposition 1 du paragraphe 2 et de la factorisation (4) de p ; $\lambda = a + ib$). C'est dire que $b(x(x_0,t,\xi_0),t,\xi(x_0,t,\xi_0))$ ne change pas de signe lorsque t varie, ou encore : pour x_0 et ξ_0 fixés, $\beta(x_0,t,\xi_0)$ ne change pas de signe lorsque t varie. Nos efforts des paragraphes 6 et 7 ont donc servi à "rectifier" les bicaractéristiques nulles de Re p , c'est-à-dire à se ramener au cas où ce sont les droites $x = x_0$, $\xi = \xi_0$, $\tau = 0$, t variant seul.

Lemme 1 : Soit $f(z,t)$ un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbb{R}^{N+1}$, à valeurs réelles, tel que le signe de $f(z,t)$ soit indépendant de t. Alors il existe deux germes à l'origine de fonctions analytiques à valeurs réelles, g et h, tels que

$$\begin{cases} f(z,t) = g(z)\,h(z,t) \\ h(z,t) \geq 0. \end{cases}$$

Nous donnons une esquisse de la démonstration (celle-ci est une légère simplification, due à D. Fujiwara, de la démonstration donnée dans Nirenberg et Trèves [3]). Tout d'abord on étend f aux valeurs complexes de z et de t.

disons dans un polydisque $|z_j| < 2\varepsilon$, $j = 1,\dots,n$, $|t| < 2\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ et on introduit

$$F(z) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z,t)\,dt$$

où l'intégration est effectuée sur l'intervalle réel $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Bien entendu, F est holomorphe dans le polydisque $|z_j| < 2\varepsilon$, $j = 1,\dots,n$. Noter que d'après notre hypothèse, $f(z,t)$ et $F(z)$ ont le même signe en chaque point z réel, et $F(z_0) = 0$ si et seulement si $f(z_0,t) = 0$ pour tout t, $|t| < \varepsilon$. Ceci dit on décompose F en ses facteurs irréductibles (on considère F et ces facteurs comme des germes de fonctions holomorphes à l'origine) et on obtient aussitôt une décomposition

$$F(z) = G_1(z)^{d_1} \dots G_r(z)^{d_r} H(z)$$

avec les propriétés suivantes : les G_j sont irréductibles, la restriction de chaque G_j à l'espace réel change de signe dans tout voisinage de zéro alors que c n'est pas le cas pour H (les G_j et H prennent des valeurs réelles lorsqu'ils sont restreints à l'espace réel). En outre, les puissances d_j sont impaires. La variété des zéros réels de chaque G_j doit avoir exactement la dimension $n-1$, donc aussi la variété des zéros complexes de chaque G_j. Or lorsque G_j s'annule , il en est évidemment de même pour F et donc pour $f(.,t)$ quel que soit t, $|t| < \varepsilon$, comme nous l'avons remarqué plus haut. Il en résulte facilement que $f(z,t)$ est divisible par chaque $G_j(z)^{d_j}$.

On pose $g(z) = G_1(z)^{d_1} \dots G_r(z)^{d_r}$, $h(z,t) = f(z,t)/g(z)$, ce qui implique que

$$H(z) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z,t)\,dt \ .$$

Comme le signe de la fonction (réelle) $h(z,t)$, lorsque z et t sont réels, ne dépend pas de t, cette fonction ne peut pas changer de signe au voisinage de l'origine car il serait de même de $H(z)$. C. Q. F. D.

Ce lemme 1 nous permet d'écrire :

$$\beta(x,t,\xi) = g(x,\xi)\, h(x,t,\xi)$$

avec $h(x,t,\xi) \geq 0$. Comme β est homogène de degré 1 en ξ, nous pouvons supposer g homogène de degré 1 en ξ, nous pouvons supposer g homogène de degré 1 en ξ, et h de degré 0.

<u>Remarque</u> : le lemme 1 est le <u>seul</u> point de la démonstration où il est utile de supposer les coefficients de $p(x,D)$ analytiques ; ce lemme est faux pour des germes de fonctions C^∞.

On a donc $\beta(x,t,D_x) = g(x,D_x)\, h(x,t,D_x)$, modulo un opérateur borné de L^2 dont on ne se soucie guère à cause de l'ε dans b^3). Soit $G = g(x,D_x)$ $H(t) = h(x,t,D_x)$. Moyennant des modifications négligeables, on peut supposer G auto-adjoint (non borné), et $H(t)$ hermitien positif borné, dans L^2_x. De plus les commutateurs $[H(t),G]$ et $[[H(t),G],G]$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro, donc des opérateurs bornés de L^2_x, de normes uniformément majorées pour $|t| \leq \varepsilon$. L'inégalité b^3) se déduit donc immédiatement de la proposition "abstraite" suivante :

<u>Proposition 2</u> : <u>Considérons l'équation différentielle ordinaire</u> :

$$\frac{dv}{dt}(t) - G\,H(t)\, v(t) = f(t), \qquad |t| \leq \varepsilon$$

<u>où</u> v <u>est</u> C^1 <u>en</u> t, <u>à valeurs dans un espace de Hilbert</u> $\mathcal{H}$, <u>où</u> G <u>est un opérateur auto-adjoint (non borné) de</u> $\mathcal{H}$, <u>où</u> $H(t)$ <u>est, pour chaque</u> t, <u>un opérateur hermitien positif borné de</u> $\mathcal{H}$, <u>où</u> f <u>est continue en</u> t <u>à valeurs dans</u> $\mathcal{H}$. <u>Supposons que pour chaque</u> t $H(t)\,v(t)$ <u>appartienne au domaine de</u> G, <u>et que les opérateurs</u>

$$H(t) \qquad [H(t),G] \qquad [[H(t),G],G]$$

<u>soient bornés, avec une norme inférieure à</u> C <u>pour</u> $|t| \leq \varepsilon$.

<u>Alors si</u> ε <u>est assez petit et si</u> $v(\varepsilon) = v(-\varepsilon) = 0$ <u>on a</u>

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|v(t)\|^2 \, dt \leq \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|f(t)\|^2 \, dt .$$

<u>Démonstration de la proposition 2</u> : Soient P_+ le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ correspondant à la partie positive du spectre de G, et $P_- = 1 - P_+$, i.e. $G_+ = P_+ G$ et $-P_- G = -G_-$ sont des opérateurs positifs de $\mathcal{H}$. Posons

$$v_+(t) = P_+ v(t) \qquad v_-(t) = P_- v(t) \ ;$$

on a

$$\|v(t)\|^2 = \|v_+(t)\|^2 + \|v_-(t)\|^2 \ .$$

Admettons pour un instant le lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : <u>Sous les hypothèses de la proposition 2, les opérateurs</u>

$$[H(t), G_+^{1/2}] \ \underline{\text{et}} \ [[H(t), G_+^{1/2}], G_+^{1/2}]$$

<u>sont bornés, avec une norme inférieure à</u> C', <u>pour</u> $|t| \leq \varepsilon$.

Considérons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_+, v_+) &= 2\,\mathrm{Re}\,(P_+ \frac{dv}{dt}, v) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\,(P_+(f + G H v), v) \\ &\geq -2\,\|f(t)\| . \|v(t)\| + 2\,\mathrm{Re}(G_+ H v, v) \end{aligned}$$

(les parenthèses dénotent le produit scalaire de $\mathcal{H}$). Or, pour chaque t,

$$2\,\mathrm{Re}\,(G_+ H v, v) = 2\,\mathrm{Re}\,(G_+^{1/2} H G_+^{1/2} v, v) + 2\,\mathrm{Re}\,(G_+^{1/2} [G_+^{1/2}, H] v, v) \ ;$$

ou, comme $[G_+^{1/2},H]$ est anti-auto-adjoint :

$$2\,\mathrm{Re}\,(G_+H)v(v) = 2(H\,G_+^{1/2}v, G_+^{1/2}v) + $$
$$+ \ ([G_+^{1/2},[G_+^{1/2},H]]v,v)$$
$$\geq -C'\,\|v\|^2$$

d'après le lemme 2 et la positivité de H.
Par suite :

$$\frac{d}{dt}(v_+,v_+) \geq -2\|f(t)\|\,.\,\|v(t)\| - C'\,\|v(t)\|^2 \quad .$$

En intégrant de t à ε, on en déduit :

$$\|v_+(t)\|^2 \leq 2\int_t^{\varepsilon} \|f(t)\|\,.\,\|v(t)\|\,dt + C'\int_t^{\varepsilon}\|v(t)\|^2\,dt \quad .$$

On a une inégalité analogue sur $[-\varepsilon,t]$ pour v_-, et en ajoutant on obtient

$$\|v(t)\|^2 \leq 2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|f(t)\|\,.\,\|v(t)\|\,dt + C'\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\|v(t)\|^2\,dt \quad .$$

En intégrant sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ on obtient aussitôt, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(1-2\varepsilon C')(\int\|v(t)\|^2\,dt)^{1/2} \leq 4\,\varepsilon(\int\|f(t)\|^2\,dt)^{1/2} \quad ,$$

d'où la proposition, avec ε assez petit.

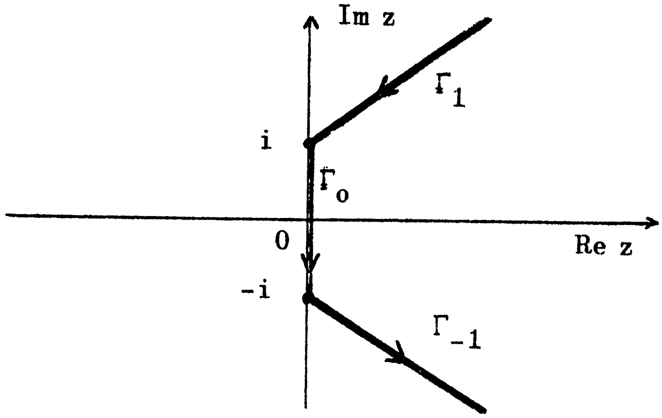
<u>Démonstration du lemme 2</u> : Soit $R(z) = (z\,1 - G)^{-1}$ la résolvante de G. C'est un opérateur borné pour $\mathrm{Im}\,z \neq 0$, et on a alors

$$\|R(z)\| \leq |\mathrm{Im}\,z|^{-1} \quad .$$

Soit $z^{1/2}$ la racine carrée de z qui est positive sur le demi-axe réel positif. On a

$$G_+^{1/2} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_\Gamma e^{-\alpha z} z^{1/2} R(z)\, dz$$

où Γ est le contour $\Gamma_1 \cup \Gamma_o \cup \Gamma_{-1}$ sur la figure, Γ_1 et Γ_{-1} sont des demi-droites de pentes +1 et -1.



On a aussi $[H,R(z)] = R(z)[G,H]R(z)$, donc

$$\|[H,R(z)]\| \leq |\mathrm{Im}\, z|^{-2} \|[G,H]\| ,$$

et

$$\|[H,G_+^{1/2}]\| \leq C \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_\Gamma e^{-\alpha \,\mathrm{Re}\, z} \frac{|z|^{1/2}}{|\mathrm{Im}\, z|^2} |dz| .$$

L'intégrale converge et on en déduit le résultat. La démonstration est analogue pour $[[H,G_+^{1/2}],G_+^{1/2}]$.

BIBLIOGRAPHIE

EGOROV Yu. V. :

[1] Conditions for the solvability of pseudodifferential equations, Soviet Math. Dokl., Vol. 10 (1969), N° 4, 1020-1022.

[2] On subelliptic pseudodifferential operators, Soviet Math. Dokl., Vol. 10 (1969), N° 5, 1056-1059.

HÖRMANDER Lars :

[1] Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1963.

[2] Pseudo-differential Operators, Comm. Pure Appl. Math., 1965.

LEWY Hans :

[1] An example of a smooth linear differential equation without solution, Ann. of Math., 1957.

NIRENBERG Louis et TREVES François :

[1] Solvability of a first order linear partial differential equation, Comm. Pure Appl. Math., 1963.

[2] On local solvability of linear partial differential equations, Part I : Necessary Conditions, Comm. Pure Appl. Math., 1970.

[3] On local solvability of linear partial differential equations, Part II : Sufficient Conditions, Comm. Pure Appl. Math., 1970.

[4] A correction to "Local Solvability, Part II", à paraître.

TREVES François :

[1] On the local solvability of linear partial differential equations in two independant variables, Amer. J. Math., à paraître.

[2] Local solvability in L^2 of first order linear partial differential equations, Amer. J. Math., à paraître.

[3] A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. Pure Appl. Math., à paraître.

[4] Hypoelliptic partial differential equations of principal type with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 1970.

[5] Analytic hypoelliptic partial differential equations of principal type, à paraître.