Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

André Unterberger

Espaces de Sobolev d'ordre variable et applications (fin)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 6, p. 0-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRE VARIABLE ET APPLICATIONS (fin)

par André UNTERBERGER

Exposé N° 6 4 Novembre 1970

§ 1. OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS SUR $\mathbb{R}^2$.

On pose $D_1 = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}$; $D_2 = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}$,

$$\partial = D_1 - i\, D_2 \quad \text{et} \quad \bar{\partial} = D_1 + i\, D_2 \ .$$

Les symboles de ces quatre opérateurs sont respectivement ξ_1 , ξ_2 , $\bar{\zeta}$ et ζ, en posant $\zeta = \xi_1 + i\,\xi_2$; D_1 et D_2 sont autoadjoints ; ∂ et $\bar{\partial}$ sont les adjoints l'un de l'autre.

.../...

Soit $P(\partial,\bar{\partial})$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^2$ à coefficients constants arbitraire, d'ordre m. On peut toujours supposer, moyennant un changement linéaire de coordonnées, que le coefficient de ∂^m dans $P(\partial,\bar{\partial})$ est non nul, et même égal à 1.

Le symbole principal de l'opérateur s'écrit alors

$$P_m(\bar{\zeta},\zeta) = \prod_{k=1}^{m} (\bar{\zeta} - \alpha_k \zeta)$$

où les α sont des coefficients complexes.

L'opérateur $\partial^m P(\partial,\bar{\partial})$ (de degré 2m), peut s'écrire $Q(\partial,\partial\bar{\partial})$, où $Q(\bar{\zeta},\tau)$ est un certain polynôme de degré 2m, possédant un terme $\bar{\zeta}^{2m}$ et dont tous les termes ont un "poids" au plus égal à 2m, en attribuant à $\bar{\zeta}$ le poids 1 et à τ le poids 2. Notons que le symbole de $\partial\bar{\partial}$, soit $|\zeta|^2$, est réel positif pour toute valeur de $\xi = (\xi_1,\xi_2)$: $\partial\bar{\partial}$ n'est autre que l'opérateur $-\frac{\Delta}{4\pi^2}$, Δ étant le laplacien ordinaire.

En utilisant un développement de Puiseux, on peut écrire, pour τ assez grand :

$$Q(\bar{\zeta},\tau) = \prod_{j=1}^{2m} (\bar{\zeta} - \sum_{n=-s}^{+\infty} b_n^j (\tau^{-\frac{1}{p}})^n),$$

où p est un certain entier positif.
L'entier s est choisi le même pour tous les facteurs, de façon que l'un au moins des coefficients b_{-s}^j soit non nul. On a nécessairement $\frac{s}{p} \leq \frac{1}{2}$: en effet, s'il en était autrement, en prenant dans chacun des facteurs de $Q(\bar{\zeta},\tau)$ le terme non nul de poids maximum, on obtiendrait un terme non nul de poids strictement supérieur à 2m.

On peut écrire

$$Q(\bar{\zeta},\tau) = \prod_{j=1}^{2m} (\bar{\zeta} - \beta_j \sqrt{\tau} + g_j(\tau)) \quad ,$$

où, pour tout j, $g_j(\tau)$ est une fonction analytique de $\tau^{-\frac{1}{p}}$ pour τ assez grand, satisfaisant l'inégalité $|g_j(\tau)| \leq C\,\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ pour une constante C bien choisie.

En collectant les termes de poids 2m exactement, on obtient l'identité

$$\bar{\zeta}^m P_m(\bar{\zeta},\zeta) = \prod_{j=1}^{2m}(\bar{\zeta}-\beta_j\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}) , \quad \text{soit} \quad \prod_{k=1}^{m}(\bar{\zeta}^2-\alpha_k\zeta\bar{\zeta}) = \prod_{j=1}^{2m}(\bar{\zeta}-\beta_j\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}).$$

En introduisant l'indertéminée $\eta = |\zeta|$, on obtient l'identité

$$\prod_{k=1}^{m}(\bar{\zeta}^2-\alpha_k\eta^2) = \prod_{j=1}^{2m}(\bar{\zeta}-\beta_j\eta)$$

entre deux polynômes en $(\bar{\zeta},\eta)$, d'où il résulte qu'à chaque facteur $\bar{\zeta}-\alpha_k\zeta$ de $P_m(\bar{\zeta},\zeta)$ correspondent, dans $Q(\bar{\zeta},\tau)$, deux facteurs commençant par $\bar{\zeta}-\sqrt{\alpha_k}\eta$ et $\bar{\zeta}+\sqrt{\alpha_k}\eta$ respectivement, en désignant par $\sqrt{\alpha_k}$ l'une quelconque des racines carrées de α_k.

Finalement on peut écrire, pour $|\zeta|$ assez grand :

$$\bar{\zeta}^m P(\bar{\zeta},\zeta) = \prod_{k=1}^{m}(\bar{\zeta}-\sqrt{\alpha_k}\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}+g_k(\zeta\bar{\zeta}))(\bar{\zeta}+\sqrt{\alpha_k}\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}+h_k(\zeta\bar{\zeta}))$$

avec

$$|g_k(\zeta\bar{\zeta})| \le C\,|\zeta|^{1-\frac{2}{p}} \quad \text{et} \quad |h_k(\zeta\bar{\zeta})| \le C\,|\zeta|^{1-\frac{2}{p}}$$

D'où $P(\bar{\zeta},\zeta) = \prod_{k=1}^{m}(\bar{\zeta}-\alpha_k\zeta+f_k(\bar{\zeta},\zeta))$, où $f_k(\bar{\zeta},\zeta)$ est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel de convolution R^k, d'ordre au plus $1-\frac{2}{p}$.

On a alors $P(\partial,\bar{\partial}) = \prod_{k=1}^{m}(\partial-\alpha_k\bar{\partial}+R^k)$ à un opérateur régularisant près.

Chaque fois que $|\alpha_k| \neq 1$, l'opérateur $\partial-\alpha_k\bar{\partial}+R^k$ est elliptique d'ordre 1. Lorsque $\alpha_k = \cos\theta + i\sin\theta$, $\partial-\alpha_k\bar{\partial}$ s'écrit aussi

$$2(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2})(\sin\frac{\theta}{2}D_1+\cos\frac{\theta}{2}D_2)$$

et $P(\partial,\bar{\partial})$ admet la direction caractéristique $\sin\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Pour les facteurs non elliptiques de $P(\partial,\bar\partial)$, on a le lemme :

Lemme 4.1 : Soit M l'opérateur $M=\partial-\alpha\bar\partial+R_r$, avec $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$, R_r étant un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre $r<1$, et soit ρ une fonction C^∞ à valeurs réelles dans un ouvert Ω de R^2, satisfaisant l'inégalité

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}>0$$

(autrement dit la dérivée seconde de ρ dans la direction caractéristique $\sin\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ est strictement positive en tout point de Ω) : Alors pour toute distribution u à support compact dans Ω satisfaisant $Mu\in H^{\rho,s}_{comp}(\Omega)$ (s étant nombre réel), on a $u\in H^{\rho,s+\frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$.

Comme M est un opérateur de convolution, il suffit d'obtenir une inégalité $\|Mu\|_{\rho,s}\geq C\,\|u\|_{\rho,s+\frac{1}{2}}$ pour toute fonction $u\in\mathcal{D}(\Omega)$ à support dans un ouvert Ω' relativement compact dans Ω, avec une constante positive C ne dépendant que de Ω'.

On écrit alors $A^{\rho,s}M=L\,A^{\rho,s}$ à un opérateur régularisant près, où $L=\partial-\alpha\bar\partial+R_r-\frac{1}{2}(\partial\rho-\alpha\bar\partial\rho)B+S_o$, S_o étant un opérateur pseudo-différentiel (à coefficients variables) d'ordre 0 : on a posé ici $B=[1+\mathrm{Log}(1+|\xi|^2)]$, et $A^{\rho,s}=\mathrm{Op}[(1+|\xi|^2)^{\rho(x)/2}[1+\mathrm{Log}(1+|\xi|^2)]^s]$.

Il s'agit donc d'obtenir, pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω, l'inégalité $\|Lv\|_o^2\geq C\,\|v\|^2_{o,\frac{1}{2}}$ pour toute fonction $v\in\mathcal{D}(\Omega')$. A cet effet, on écrit

$$L^*=\bar\partial-\bar\alpha\partial+R_r^*-\frac{1}{2}B(-\bar\partial\rho+\bar\alpha\partial\rho)+S_o^*\ ,$$

étant donné que B est autoadjoint, et

$$\|Lv\|^2\geq\|Lv\|^2-\|L^*v\|^2\geq-\mathrm{Re}(\partial v-\alpha\bar\partial v+R_rv,\ (\partial\rho-\alpha\bar\partial\rho)Bv)+$$
$$+\mathrm{Re}(\bar\partial v-\bar\alpha\partial v+R_r^*v\ ,\ B(-\bar\partial\rho+\bar\alpha\partial\rho)v)-C\,\|v\|_o^2\ ,$$

en remarquant que S_o commute avec tout opérateur d'ordre au plus 1 modulo un opérateur d'ordre négatif, et que B commute avec tout opérateur d'ordre 0 modulo un opérateur d'ordre négatif. En appliquant la même remarque à R_r, on obtient

$$\|Lv\|^2 \geq -\operatorname{Re}(\partial v, -\alpha\bar\partial v, (\partial\rho - \alpha\bar\partial\rho)Bv) + \operatorname{Re}(\bar\partial v - \bar\alpha\partial v, B(-\bar\partial\rho + \bar\alpha\partial\rho)v) - C\|v\|_o^2 ,$$

soit

$$\|Lv\|^2 \geq -\operatorname{Re}(v, (\partial\bar\partial\rho - \bar{\bar\alpha}\bar\partial\bar\partial\rho))\,Bv) + \operatorname{Re}(\alpha v, (\partial\partial\rho - \alpha\partial\bar\partial\rho)\,Bv) - C\|v\|_o^2 ,$$

ou encore

$$\|Lv\|^2 \geq -C\|v\|^2 + \operatorname{Re}(B^{\frac{1}{2}}v, (\bar\alpha\,\partial\partial\rho - \alpha\bar\alpha\,\partial\bar\partial\rho)B^{\frac{1}{2}}v) - \operatorname{Re}(B^{\frac{1}{2}}v, (\partial\bar\partial\rho - \alpha\partial\bar\partial\rho)B^{\frac{1}{2}}v) .$$

Tout cela domine $C_1\|v\|^2_{o,\frac{1}{2}}$ pourvu que $\bar\alpha\partial\partial\rho + \alpha\overline{\partial\partial\rho} + (-1 - |\alpha|^2)\partial\bar\partial\rho$ soit positif, soit :

$$(-1 + \cos\theta)(D_1^2\,\rho) - 2\sin\theta(D_1D_2\rho) - (1 + \cos\theta)(D_2^2\,\rho) > 0 ,$$

ou enfin

$$(1 - \cos\theta)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} - 2\sin\theta\,\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2} + (1 + \cos\theta)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} > 0,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Théorème 4 .1 : Soit P(D) un opérateur différentiel sur R^2 à coefficients constants, d'ordre m ; soit μ le nombre de facteurs elliptiques de la partie principale de P(D), comptés avec leur multiplicité. Soit ρ une fonction C^∞ à valeurs réelles dans un ouvert Ω de R^2, admettant des dérivées secondes strictement positives dans toutes les directions caractéristiques réelles de P(D).

Alors pour toute distribution u à support compact dans Ω satisfaisant $P(D)u \in H^\rho(\Omega)$ on a $u \in H^{\rho+\mu,\frac{1}{2}(m-\mu)}(\Omega)$.

Si de plus Ω est ${}^tP(D)$-convexe, l'équation ${}^tP(D)f = g$ admet une solution $f \in H^{-\rho}_{loc}(\Omega)$ chaque fois que $g \in H^{-\rho-\mu,-\frac{1}{2}(m-\mu)}_{loc}(\Omega)$.

La deuxième partie du théorème résulte de la première par des argrments de dualité.

La première partie s'obtient par applications successives du lemme : bien entendu, en appliquant à une distribution à support compact un produit partiel des facteurs de la décomposition de P(D), on n'obtient pas nécessairement une distribution à support compact, mais il est aisé d'y remédier grâce au caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels.

On peut obtenir aussi par ces méthodes le fait, démontré également par Hörmander, qu'en deux variables tout ouvert P-convexe est fortement P-convexe. On se ramène en effet au problème suivant : soit M l'opérateur $M = \partial - \alpha\bar{\partial} + R$, où R est un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre <1 ; soit K un compact de R^2 convexe dans la direction caractéristique de l'opérateur $\partial - \alpha\bar{\partial}$ (i.e. les parallèles à cette direction, si elle est réelle, coupent K suivant des segments ; si cet opérateur est elliptique, aucune condition n'est imposée) ; soit enfin u une distribution à support compact dans R^2, telle que le support singulier de Mu soit contenu dans K : prouver que le support singulier de u est contenu dans K.

Il suffit alors, en utilisant le lemme, de prouver qu'étant donné un compact K convexe dans la direction caractéristique de l'opérateur $\partial - \alpha\bar{\partial}$, un point x de R^2 n'appartenant pas à K, et deux nombres réels s et t, il existe une fonction ρ convexe dans la direction envisagée, supérieure à t dans un voisinage de x et inférieure à s sur K : pour démontrer ce point, on peut se ramener au cas où la direction envisagée est la direction $\frac{\partial}{\partial x_1}$, et où le point x est l'origine des coordonnées : d'après la $\frac{\partial}{\partial x_1}$- convexité de K, l'une des demi-droites issues de 0 parallèles à l'axe des x_1 (disons la direction positive) ne rencontre pas K ; soit $A > 0$ tel que tout point de K ait une abscisse supérieure à -A : il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que le cône d'axe $0x_1$, de sommet $(-A,0)$ et de demi-angle au sommet ε ne rencontre K qu'en des points d'abscisse négative :

la fonction $Q(x) = (x_1 + A)^2 \sin^2\varepsilon - x_2^2 \cos^2\varepsilon$ est alors égale à A^2 à l'origine, est strictement inférieure à A^2 sur K, et est convexe dans la direction $\frac{\partial}{\partial x_1}$; en la composant avec une fonction linéaire convenable, on obtient la fonction ρ souhaitée.