Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

S. Alinhac

Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 16, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

NON-UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

par S. ALINHAC

Exposé n° XVI

17 Mars 1981

INTRODUCTION.

Nous présentons dans cet exposé deux théorèmes sur les supports de solutions d'équations aux dérivées partielles de type principal (réel ou complexe), en présence d'un zéro réel du symbole principal (homogène ou quasi-homogène) de l'opérateur.

I. GENERALITES.

Dans toute la suite, $P(x,D_x)$ désigne un opérateur différentiel d'ordre m ($x \in \mathbb{R}^n$), dont les coefficients sont C^∞ au voisinage de l'origine.

Pour toute $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, réelle, $d_\varphi(0) \neq 0$, on va considérer le problème de Cauchy local (en 0), avec données sur la surface $\varphi(x) = \varphi(0)$.

Nous adopterons, pour abréger, la terminologie suivante : nous dirons que l'opérateur P n'a pas la propriété d'unicité du problème de Cauchy (par rapport à la surface orientée $\varphi(x) = \varphi(0)$) si :

$\exists\, a \in C^\infty$, $\exists\, u \in C^\infty$, supp $a \subset \{\varphi(x) \geq \varphi(0)\}$, supp $u = \{\varphi(x) \geq \varphi(0)\}$ (localement), et $Pu + au = 0$.

<u>Remarques</u> : - Pour nier l'unicité du problème de Cauchy, il suffirait d'avoir $0 \in \mathrm{Supp}\, u$ dans la définition. Nos théorèmes sont donc en fait des théorèmes plus forts, indiquant des formes possibles de supports des solutions.

- La nécessité de perturber l'opérateur P est technique. On remarquera néanmoins que tous les théorèmes d'unicité connus (hormis les cas d'opérateurs à coefficients analytiques) assurent l'unicité de Cauchy simultanément pour P et toutes ses perturbations d'ordre zéro.

Dans certains cas, il apparaît qu'une notion de quasi-homogénéité, liée à un choix particulier de coordonnées, doit être introduite. On note alors $x = (t,y)$ ($t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$) ; on prend $\varphi \equiv t$, et l'on suppose que le symbole total $P(y,t,\eta,\tau)$ de P (d'ordre m) possède la décomposition quasi-homogène

$$P(y,t,\sigma^q_\eta,\sigma\tau) = \sigma^m\ p(y,t,\eta,\tau) + \sigma^{m-k}\ p_{m-k}(y,t,\eta,\tau) + \dots \quad .$$

Ici $q \geq 1$, $k > 0$: on appellera p "symbole principal" de P. Si $q = 1$ $(k = 1)$, p est le symbole principal de P au sens usuel, et p ne dépend pas d'un jeu spécial de coordonnées.

II. CAS D'UN SYMBOLE p COMPLEXE.

Le théorème 1 (resp. théorème 1') réfère au cas homogène $q = 1$ (resp. quasi-homogène $q > 1$).

Théorème 1 : Soit P un opérateur de symbole principal p, et soit $\xi^o \in \mathbb{R}^n|0$ tel que

$$p(0,\xi^o) = 0 \ , \quad \{p,\varphi\}(0,\xi^o) \neq 0 \ , \quad p(0,d\varphi) \neq 0 \quad .$$

Supposons de plus, en notant $p = p_1 + ip_2$:

i) la variété caractéristique $\Sigma = \{p_1 = p_2 = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^n$ est de codimension 2, transverse aux fibres verticales (i.e. πH_{p_1} et πH_{p_2} sont indépendants, π étant la projection $T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_x$) .

ii) $\{p_1,p_2\}(0,\xi^o) < 0$.

Alors P n'a pas la propriété d'unicité du problème de Cauchy (par rapport à $\varphi(x) = \varphi(0)$).

Exemple : Soit $P = D_t + iq(t,y,D_y) + b$, où q est un champ réel non nul en (0,0). Il existe alors toujours (si $n \geq 3$) $\eta^o \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$ où $q(0,0,\eta^o) = 0$, en sorte que $\xi^o = (\eta^o,0)$ satisfait i). Si de plus $q'_t(0,0,\eta^o) \neq 0$, ii) est satisfaite (quitte à changer η^o en $-\eta^o$), et P n'a pas l'unicité par rapport à $\{t = 0\}$.

Cet énoncé appelle les commentaires suivants :

a) L'hypothèse i) de "transversalité aux fibres" signifie que Σ est "aussi étalée que possible" au-dessus de la base $\mathbb{R}^n_x$, et plus précisément qu'il existe un zéro réel de p au-dessus de chaque x (voisin de 0).

L'exemple $P = D_t + itD_y$ (où $\xi^o = (-1,0)$ satisfait ii)), qui possède l'unicité de Cauchy par rapport à $\{t=0\}$, montre la nécessité de i).

b) Dans le cadre des opérateurs différentiels où nous nous sommes placés, $\{p_1,p_2\}(0,-\xi^o) = -\{p_1,p_2\}(0,\xi^o)$, en sorte que l'on peut remplacer ii) par $\{p_1,p_2\}(0,\xi^o) \neq 0$.

L'hypothèse $\{p_1,p_2\} = 0$ sur Σ conduit à la définition des opérateurs "principalement normaux", et au théorème d'unicité de Cauchy correspondant, dû à Hörmander (cf. [3], th. 8.9.1).

En réalité, si l'on considère des opérateurs pseudo-différentiels (ou si l'on regarde les choses "microlocalement", comme le fait Nirenberg [6]) il apparaît que l'on a l'unicité de Cauchy sous la condition $\{p_1,p_2\}(0,\xi^o) > 0$. Plus généralement, Strauss et Trèves [8] ont montré que les opérateurs du premier ordre localement résolubles possèdent l'unicité de Cauchy.

c) Prenons pour P l'opérateur de Lewy [5]

$$P = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + x_2)\, D_3$$

(ou tout autre champ complexe de $\mathbb{R}^3$ qui "provient" de l'opérateur $\bar{\partial}_b$ sur une hypersurface réelle convenable de $\mathbb{C}^2$).

On sait qu'il existe des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ telles que l'équation $(P+a)u = 0$ n'a que la solution triviale $u = 0$.
D'après le théorème 1, on sait que pour certaines $a \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, l'équation $(P+a)u = 0$ possède des solutions (localement) supportées par un demi-espace. Cela montre :

i) que certaines perturbations d'opérateurs $\bar{\partial}_b$ ne sont pas des opérateurs de même type (à changement de fonction près);

ii) que le choix de la perturbation est crucial pour les propriétés de P.

On ne sait pas actuellement caractériser les différents types de perturbations selon leurs propriétés.

<u>Théorème 1'</u> : L'énoncé est identique à celui du théorème 1, si l'on comprend le crochet $\{p,q\}$ au sens quasi-homogène, c'est-à-dire

$$\{p,q\} = p'_\tau\, q'_t - p'_t\, q'_\tau$$

(t étant la variable de plus petit poids). On suppose en outre $K > 1/2$.

<u>Exemple</u> : Reprenons le cas étudié en détails dans Alinhac et Zuily [2] :

$$P = D_t^2 + p_1(t,y,D_y) + ip_2(t,y,D_y) + b \quad ,$$

où p_1 et p_2 sont des champs réels (p_2 non nul à l'origine).
On choisit ici $q = 2$, et $p = \tau^2 + p_1 + ip_2$ ($K = 2$). Le théorème 1' montre alors que si, pour $\eta^o \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$,

i) $p_1(0,0,\eta^o) < 0$

ii) $p_2(0,0,\eta^o) = 0$

iii) $p'_{2_t}(0,0,\eta^o) \neq 0$, alors P n'a pas l'unicité de Cauchy (c'est essentiellement le contenu du théorème 1.3 de [2]).

Les cas où il n'est pas possible d'appliquer le théorème 1' correspondent à une disposition "non générale" des surfaces $\{p_1 = 0\}$, $\{p_2 = 0\}$, $\{p'_{2_t} = 0\}$. Ce sont essentiellement :

- $p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$: c'est le cas du théorème 1.2 de [2].
- $p_2 = 0 \Rightarrow p'_{2_t} = 0$: c'est le cas du théorème 1.4 de [2].

III. CAS D'UN SYMBOLE p REEL.

Le cas où le symbole p, complexe, possède un zéro réel "double" (au sens où $\{p,\varphi\} = 0$) satisfaisant les hypothèses i) et ii) du théorème 1, est exceptionnel. En effet, sauf si les caractéristiques réelles sont nécessairement doubles ($p = 0 \Rightarrow \{p,\varphi\} = 0$), on peut toujours "bouger un peu" le zéro donné de p pour obtenir un zéro réel simple et appliquer le théorème 1.

Nous ne considérons le cas d'un zéro double que pour p réel. Le théorème 2 (resp. théorème 2') réfère au cas homogène $q = 1$ (resp. quasi-homogène $q > 1$).

Théorème 2 : Soit P un opérateur de symbole principal p réel, et soit $\xi^o \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que

$$p(0,\xi^o) = 0 \ , \ \{p,\varphi\}(0,\xi^o) = 0 \ , \ \{\{p,\varphi\},\varphi\}(0,\xi^o) \neq 0 \ , \ p(0,d\varphi) \neq 0 \quad .$$

Supposons de plus :

i) la variété caractéristique $\Sigma = \{p = 0\}$ est de codimension 1, transverse aux fibres verticales (i.e. $\pi H_p \neq 0$).

ii) La dérivée seconde $\ddot{\varphi}$ de φ le long de la bicaractéristique de p issue de $(0,\xi^o)$, est positive.

Alors p n'a pas l'unicité de Cauchy.

<u>Exemple</u> : Soit $P = \Box$ (opérateur des ondes) à l'extérieur d'un cylindre convexe, ou, si l'on préfère,

$$P = D_t^2 + \varepsilon t D_1^2 + D_1 D_2 \quad \text{(opérateur de Friedlander)} \quad ,$$

avec $\varphi = t$ (le point ξ^o est $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, $\tau = 0$).
Les équations de la bicaractéristique sont

$$\dot{t} = 2\tau \;,\; \dot{y}_1 = 2\varepsilon t \eta_1 + \eta_2 \;,\; \dot{y}_2 = \eta_1 \;,\; \dot{\tau} = -\varepsilon \eta_1^2 \;,\; \dot{\eta}_1 = 0 \;,\; \dot{\eta}_2 = 0 \quad .$$

D'où $\ddot{t} = 2\dot{\tau} = -2\varepsilon$: pour $\varepsilon = -1$, P n'a pas l'unicité de Cauchy.

Quelques remarques au sujet du théorème 2 :

a) L'exemple de l'opérateur $P = D_t^2 - t D_y^2$ (Tricomi) pour lequel $\pi H_p = 0$ ($\tau = 0$, $\eta = 1$) montre que l'hypothèse i) de transversalité est nécessaire (car P a l'unicité de Cauchy).

b) Le théorème 8.8.1 de Hörmander [3] indique que si $\ddot{\varphi}$ est négatif le long de toutes les bicaractéristiques de P tangentes à la surface $\{\varphi(x) = \varphi(0)\}$, alors il y a propagation de la régularité C^∞ à partir de la région $\varphi(x) < \varphi(0)$.

Curieusement, le théorème 2 donne un résultat plus fort que la réciproque du théorème 8.8.1.

c) La condition forte de convexité $\ddot{\varphi} > 0$ requise peut sans doute être affaiblie. Le cas-limite où la bicaractéristique considérée reste dans la surface de niveau de φ (par exemple $P = \Box$, $\varphi = y_1$) n'est pas complètement clair, sauf si l'on suppose que p admet une phase réelle Ψ, telle que

$$p(x, \nabla \Psi) = 0 \quad , \quad p'_\xi(x, \nabla \Psi) \circ \nabla \varphi = 0 \quad ,$$

(voir Hörmander [3] et Alinhac-Baouendi [1]).

<u>Théorème 2'</u> : L'énoncé est identique à celui du théorème 2, si l'on comprend la bicaractéristique au sens quasi-homogène, c'est-à-dire ici :

ii) $p''_{\tau\tau}\ p'_t < 0$. On suppose en outre $K > 2/3$.

<u>Exemple</u> : Reprenons celui du théorème 1', lorsque $p_2 = 0$. Si le champ p_1 est non nul, et s'il existe $\eta^o \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$, $p_1(0,0,\eta^o) = 0$,

$p'_{1_t}(0,0,\eta^o) \neq 0$, alors P n'a pas l'unicité de Cauchy.

IV. QUELQUES BREVES INDICATIONS SUR LES PREUVES DES THEOREMES.

Ces preuves utilisent des techniques asymptotiques introduites par Pliš [7], qui ont été clarifiées et rattachées aux constructions de l'optique géométrique par Hörmander [4].

Indiquons les étapes principales (pour le théorème 1, par exemple) :

a) on choisit des coordonnées (t,y), $\varphi \equiv t$, $\xi^o = (\eta^o, \tau^o)$. Grâce à i), il est aisé de construire des fonctions C^∞ réelles $\xi(\delta,y)$, $\tau(\delta,y)$ ($\delta \geq 0$, y voisin de 0) telles que

$$p(y,\delta,\nabla_y \xi(\delta,y),\tau(\delta,y)) = 0$$

$$(\nabla_y \xi(0,0),\ \tau(0,0) = (\eta^o,\tau^o) \quad .$$

b) on fait le changement d'échelle $t = \delta + \frac{s}{\lambda}$ ($\lambda = \delta^{-\theta}$, $\theta > 1$ à choisir) au voisinage de $t = \delta$; puis l'on détermine une phase $\varphi(\delta,s,y)$, une "normalisation de la taille $\gamma(\delta,y) > 0$" et une amplitude $w(\delta,s,y) \neq 0$ en sorte que la fonction

$$u_\delta(y,t) = e^{-\gamma(\delta,y)}\ e^{i\sigma\xi(\delta,y)}\ e^{\nu\varphi(\delta,s,y)}\ w(\delta,s,y)$$

(où $\sigma = \lambda\nu$, $\nu = \nu(\delta)$ à choisir, $\nu \to +\infty$ lorsque $\delta \to 0$)

vérifie $\dfrac{Pu_\delta}{u_\delta} = 0(\delta^\infty)$, pour s petit.

c) l'équation de phase sera

$$p(y,\delta + \Delta\delta^\theta, \nabla_y \xi(\delta,y) + \frac{1}{\lambda}\frac{\nabla_y \varphi}{i}, \frac{\varphi'_s}{i}) = 0 \quad .$$

En choisissant $\varphi_{|s=0} = 0$, on a $\frac{\varphi'_s}{i}\Big|_{s=0} = \tau(\delta,y)$, et la condition ii) se traduit pas Re $\varphi''_{ss}\Big|_{s=0} = \dfrac{-C}{\lambda}$, où $C > 0$. La propriété ii) est donc bien une propriété de convexité, le profil de $|u_\delta|$ au voisinage de $t = \delta$ ($s = 0$) présentant une "bosse" en $t = \delta$.

d) on choisit une suite $\delta_k \to 0$, et on note $u_k(t,y) = u_{\delta_k}(t,y)$. La fonction γ est choisie en sorte que les fonctions u_k et u_{k+1}

échangent leurs taille respectives sensiblement au milieu de $[\delta_{k+1}, \delta_k]$ (i.e. $\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right|$ est très petit près de δ_{k+1}, très grand près de δ_k). En notant alors $\tilde{u}_k$ la fonction u_k convenablement tronquée en 0 près de δ_{k+1} et δ_{k-1}, on prend

$$u = \sum_{k \geq k_o} \tilde{u}_k \quad , \quad \text{et} \quad -a = \frac{Pu}{u} \quad .$$

Naturellement, u s'annule vers le milieu de $[\delta_{k+1}, \delta_k]$ et l'on doit modifier la construction légèrement pour rendre Pu plat en ces points, et donc $a \in C^\infty$ localement.

e) Enfin, il faut équilibrer l'ensemble des paramètres θ, δ_k, ν pour rendre possibles les étapes précédentes de la construction, et pour que u et a soient plates sur $t = 0$.

***
*

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac, M.S. Baouendi : Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé No XXII, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[2] S. Alinhac, C. Zuily : Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, à paraître dans Comm. in P.D.E. (1981).

[3] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer Verlag, 1963.

[4] L. Hörmander : Non-uniqueness for the Cauchy problem, Lecture Notes in Math., Springer Verlag No 459 (1975) 36-72.

[5] H. Lewy : An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math. **66**, 2 (1957) 155-158.

[6] L. Nirenberg : Lectures on partial differential equations, Conference Board Math. Sc. A.M.S. 17.

[7] A. Pliš : A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 599-617.

[18] M. Strauss, F. Trèves : First order linear p.d.e. and uniqueness in the Cauchy problem, J. of Differential Eq. 15 (1974) p. 195.