Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

R. Beals
R. Coifman

Scattering, transformations spectrales et équations d'évolution non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. nº 22, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A24_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 0 - 1 9 8 1

SCATTERING, TRANSFORMATIONS SPECTRALES ET EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRES.

R. BEALS ET R. COIFMAN

Exposé N°XXII

26 Mai 1981

Nous nous proposons de décrire une extension de la méthode du "scattering inverse" valable pour les systèmes d'ordre supérieur à 2.

Commençons par considérer l'exemple de l'équation nonlinéaire de Schrödinger, traitée en 1971 par Zaharov et Sabat [3] c.à.d :

$$(1) \qquad i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,|u|^2\,u$$

$$u_{|t=o} = u_o \ .$$

Pour résoudre l'équation, on associe à u une transformée spectrale (analogue à la transformée de Fourier). Le problème devient linéaire du côté de la transformée, et on revient par une transformée inverse à la solution.

Plus explicitement on associe à u

un "potentiel" $Q = \begin{pmatrix} o & i\bar{u} \\ u & o \end{pmatrix}$ et on considère le "problème spectral"

$$(2) \qquad \frac{d\psi}{dx} = (\xi J + Q)\psi \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} -i/2 & o \\ o & i/2 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \ .$$

Il est clair que si Q est intégrable à support borné, alors une solution de (2) prend la forme :

$$\psi = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 e^{-ix\xi/2} \\ a_2 e^{ix\xi/2} \end{pmatrix} & \text{pour } x \ll 0 \\ \\ \begin{pmatrix} b_1 e^{-ix\xi/2} \\ b_2 e^{ix\xi/2} \end{pmatrix} & \text{pour } x \gg 0 \ . \end{cases}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont liés par la matrice dite de "scattering" définie par

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = S(\xi)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ .$$

Si u évolue d'après l'équation (1) $S(\xi,t)$ évolue (par miracle) selon

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\xi,t) = \frac{1}{2}t^2[J,S(\xi,t)]$$

d'où $S(\xi,t) = e^{+\frac{1}{2}t^2J\xi}\, S(\xi,o)\, e^{-\frac{1}{2}t^2J\xi}$.

Ainsi pour trouver $u(x,t)$ il s'agit de pouvoir reconstruire le potentiel à partir de sa matrice de scattering. Ceci peut se réaliser moyennant une information supplémentaire concernant les états liés du potentiel Q. Voir [1][3].

Il est naturel de vouloir décrire les équations nonlinéaires qui se laissent traiter par cette méthode. Ces équations ont été obtenues formellement par divers auteurs [1][2].

Malheureusement la matrice de scattering perd son sens dans la majorité des exemples d'ordre supérieur à 2, ce qui met en question la validité de la méthode formelle. Nous sommes conduits à définir une autre notion de "transformée spectrale" permettant la réalisation du programme.

On commence par considérer le problème spectral

$$(3) \qquad \frac{d\psi}{dx} = \xi J\Psi + Q\Psi \quad \text{où} \quad \xi \in \mathbb{C} \quad J \text{ est diagonale}$$

à valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,..\lambda_n$ distinctes, $Q(x) = (Q_{ij}(x))$ avec $Q_{ii} \equiv 0$ une matrice de potentiels, et ψ est une matrice solution fondamentale du problème vectoriel qui est supposée inversible.

On remarque que lorsque $Q \equiv 0$ la solution de (3) est de la forme $e^{x\xi J}A(\xi)$ qui n'est pas bornée en général comme fonction de x.
On est donc conduit à considérer $m = \psi e^{-x\xi J}$ où m vérifie l'équation.

$$(4) \qquad \frac{d}{dx}m = \xi[J,m] + Qm \quad .$$

Soit $\Sigma = \Sigma_j = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\xi(\lambda_i-\lambda_k) = 0 \text{ pour une paire } i \neq k\}$ et soit Q intégrable, c.à.d $\int\Sigma|Q_{ij}(x)|dx = ||Q||_1 < \infty$.

Nous obtenons le théorème de base suivant :

Théorème 1 : Il existe une fonction unique

$$m\,(x,\xi) \,:\, \mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \Sigma) \rightarrow M_n \cup \{\infty\}$$

telle que

a) $\forall\, x$, $m(x,\xi)$ est méromorphe en $\xi \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ ayant un nombre fini de pôles dont la position ne dépend pas de x.

b) $\forall\, \xi$ régulier dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, $m(x,\xi)$ est une solution bornée de l'équation (4)

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x,\xi) = I = \lim\limits_{|\xi| \to \infty} m(x,\xi)$.

Esquissons la démonstration du théorème. On suppose pour commencer que $\|Q\|_1 < 1$. Alors dans chaque secteur de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ on peut convertir (4) en une équation intégrale

$$m_{jk}(x,\xi) = \delta_{jk} + \int_{\varepsilon_{jk}\infty}^{x} \left(e^{(x-y)\,\mathrm{ad}J}(Q/y)\;\; m(y,\xi))\right)_{jk} dy$$

ou $\varepsilon_{jk} = \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}\;\xi(\lambda_j - \lambda_k))$.

Une itération conduit à la solution m (qui n'a pas de pôles). Si $\|Q\|_1 < 2$ nous pouvons translater Q de manière à obtenir

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad \text{avec} \qquad Q_1 = \begin{cases} Q & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

et $\|Q_j\| < 1$, $j = 1,2$.

Nous leur associons les fonctions propres m_j, j=1,2.
Il découle de (4) que la fonction m cherchée doit avoir la forme

$$m = \begin{cases} m_1(x,\xi)\;\, W_1^{x}(\xi) \text{ pour } x \leqslant 0 \\ m_2(x,\xi)\;\, W_2^{x}(\xi) \text{ pour } x \geqslant 0 \end{cases}$$

où $W^{x}(\xi) = e^{x\xi\,\mathrm{ad}\,J}\, W(\xi)$.

La continuité de m en 0 est assurée si $(m_1^{-1} m_2) w_2 = w_1$; d'autre part m est bornée si W_1^x est bornée pour $x \to -\infty$ et W_2^x pour $x \to +\infty$, $(W_1)_{ii} = 1$; il est donc nécessaire qu'après une permutation (dépendant de ξ) de la base de $\mathbb{C}^n$, w_1 soit représentée par une matrice surdiagonale et W_2 par une matrice sous diagonale.

Ce problème de factorisation de la matrice $m_1(0,\xi)^{-1} m_2(0,\xi)$ a une solution unique méromorphe en chaque secteur. On répète la construction pour arriver à de plus grandes normes de Q.

Nous appellerons un potentiel Q générique, si $m(x,\xi)$ s'étend continuement au bord de chaque secteur de $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ et si ses pôles sont simples. La construction ci-dessus montre que les potentiels génériques forment une partie ouverte dense de L^1. Dorénavant nous n'allons considérer que des potentiels génériques.

Avant de définir la transformée spectrale de Q , remarquons que formellement $\frac{\partial m}{\partial \bar{\xi}}$ vérifie aussi l'équation (4); on peut donc écrire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} m = m W^x \qquad (5)$$

Si m est la solution du théorème 1, alors $\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} m$ a un support dans $\Sigma \cup \{\text{pôles}\}$.

On peut inverser l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}$ et on obtient

$$m(x,\xi) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \frac{m W^x}{\eta - \xi} d\eta + \sum_{\text{pôles}} \frac{m(x,\xi_\nu) W^x(\xi_\nu)}{\xi_\nu - \xi} \qquad (6)$$

(On peut donner un sens précis aux termes discrets).

Cette formule permet de résoudre m en termes de W et d'obtenir

$$Q = \frac{I}{2\pi i} \operatorname{ad} J \left\{ \int_\Sigma m(x,\eta) W^x(\eta) d\eta + \sum_{\text{pôles}} m(x,\xi_\nu) W^x(\xi_\nu) \right\} . \qquad (7)$$

On obtient aussi le théorème :

<u>Théorème</u> : L'application $Q \to W$ est injective sur l'ensemble des potentiels génériques.

La démonstration du théorème s'obtient en justifiant le calcul formel qui suit.

Supposons que : $Q_1 \to W$, $Q_2 \to W$

donc
$$m_1^{-1} \frac{\partial m_1}{\partial \bar{\xi}} = m_2^{-1} \frac{\partial m_2}{\partial \bar{\xi}}$$

d'où
$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} (m_1 m_2^{-1}) = 0 \quad \text{et} \quad m_1 m_2^{-1} \to I \text{ quand } |\xi| \to \infty .$$

Par le théorème de Liouville, il vient $m_1 = m_2$ et, en vertu de (7), $Q_1 = Q_2$.

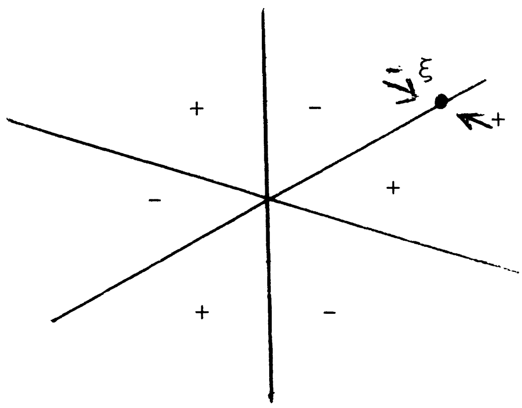
Remarquons que la transformée spectrale de Q est liée à la matrice de Scattering si $J + J^* = 0$.

Dans ce cas Σ_J se réduit à $\mathbb{R}$ et l'on peut calculer W de la manière suivante :
On trouve deux matrices
$$V_+(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad V_-(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$$

telles que $S(\xi)\, V_+(\xi)$ est sousdiagonale et $S V_-$ est surdiagonale.

W est donnée par
$$W|_\Sigma = I - V_+^{-1} V_- .$$

Il est important de noter que l'équation (5) (ou (6)) équivaut au problème de Riemann de factorisation de la matrice $I - W(\xi)^x$. Plus précisément partageons $\mathbb{C}/\Sigma$ en régions + - (voir figure) alternées



et si $m_\pm(x,\xi)$ est la limite de $m(x,\zeta)$ lorsque $\zeta \to \xi$ dans la région $\pm$ et $\xi \in \Sigma$, on peut exprimer (5) de la manière suivante

$$m_+ - m_- = m_+ W^x \quad \text{(en fait ceci définit W)}$$

ou encore

$$m_+(I - W^x) = m_- \quad .$$

Notons que ceci correspond au point de vue exprimé par Taharov et Sabat dans leurs dérivations formelles d'équations d'évolution.

Esquissons maintenant la liaison entre l'évolution linéaire de la transformée spectrale et l'évolution nonlinéaire du potentiel.

Nous supposerons pour simplifier que m n'a pas de pôles et que $W(\xi)$ est une fonction de la classe de Schwartz.

De la formule (6) on obtient un développement asymptotique à l'infini pour m

$$m\,(x,\xi) = \Sigma\, m_k(x)\,\xi^{-k-1}$$

et les relations

$$\left(\frac{d}{dx} - Q\right) m_k = \operatorname{ad} J\, m_{k+1} \qquad m_{-1} = I$$

d'où

$$Q = -\lim_{|\xi| \to \infty} \xi \operatorname{ad} J\, m(x,\xi)$$

et

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -\lim_{|\xi| \to \infty} \xi \operatorname{ad} J\, \dot{m} = -\lim \xi \operatorname{ad} J\, \dot{m}\, m^{-1} \;.$$

D'autre part $$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}\, \dot{m}\, m^{-1} = m\, \dot{W}^x m^{-1}$$

c.à.d. $$\dot{m}\, m^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \frac{m\, \dot{W}^x m^{-1}}{\eta - \xi}\, d\eta$$

d'où

$$\dot{Q} = \operatorname{ad} J\, \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma m\, \dot{W}^x m^{-1}\, d\eta \;. \tag{8}$$

Si l'on suppose que

$$\dot{W}(\xi,t) = \xi^k[\mu, W(\xi,t)], \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix},$$

alors (8) s'écrit

$$(9) \qquad \dot{Q} = \operatorname{ad} J \; \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma m \; [\mu, W^{x}] \; m^{-1} \; \xi^k d\xi$$

qui s'interprète comme un terme du développement asymptotique de $m \mu m^{-1}$ (car $\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \; m \mu m^{-1} = - m[\mu, W^{x}] m^{-1}$).

Ainsi on peut écrire

$$m \mu m^{-1} \approx \sum_{-1}^{\infty} \lambda_{j,\mu,Q}(x) \xi^{-j-1}$$

et l'équation (9) s'écrit $\dot{Q} = \operatorname{ad} J \lambda_{k,\mu,Q}(x)$.

On peut calculer les λ_k explicitement à partir de l'équation

$$(D - \xi \operatorname{ad} J - \operatorname{ad} Q) \; m \mu m^{-1} = 0$$

d'où $\lambda_{-1} = \mu$ et $\operatorname{ad} J \lambda_{k+1} = (D - \operatorname{ad} Q) \lambda_k$.

Si on prend $\mu = J$ et on définit l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L}_Q F = D_x (\operatorname{ad} J)^{-1} F + [\operatorname{ad} J^{-1} F, Q]_1 + [Q, \int^x [\operatorname{ad} J^{-1} F, Q]_o \, dy$$

où F est une fonction matricielle qui s'annule sur la diagonale et A_o = diagonale de A et $A_1 = A - A_o$ pour une matrice A .

On peut exprimer les évolutions comme

$$(10) \qquad \dot{Q} = \mathcal{L}_Q^k([J,Q]) \; .$$

Ainsi pour $k = 1$ l'équation d'évolution est linéaire

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial x} \; .$$

Pour $k = 2$ nous obtenons

$$\dot{Q} = \mathrm{ad}\, J^{-1} Q_{xx} + [\mathrm{ad}\, J^{-1} Q_x, Q]_1 + [Q, (\mathrm{ad}\, J^{-1} Q.Q)_o] .$$

Remarquons que les évolutions qui correspondent à(10)se lisent du côté de la transformée spectrale comme

$$W(\xi,t) = e^{t\,\xi^k J}\, W(\xi,0)\, e^{-t\,\xi^k J} \qquad \xi \in \Sigma .$$

Pour pouvoir les résoudre en inversant, il est nécessaire de supposer que $W(\xi,t)$ est bornée en ξ pour $t \in \mathbb{R}$ (ou $t > 0$ resp. $t < 0$), or ceci impose une structure très rigide sur la nature de W, Σ ou k. Si $\Sigma = i\mathbb{R}$ il n'y a pas de restrictions.

Si J a des valeurs propres correspondant aux racines $n^{\text{ième}}$ de 1, il faut avoir $k = 1 \bmod n$. Ce dernier cas se présente naturellement dans l'étude des équations scalaires.

Pour terminer nous donnons quelques indications concernant le cas scalaire.

On considère le problème spectral

$$(D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n)\psi_1 = \xi^n \psi_1 \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} r_i = 0 ,$$

que l'on convertit au système

$$D\psi = R\psi + \xi\Pi\psi \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}, \ \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \ldots \\ \cdot & 0 & 1 & \\ \cdot & & & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

(c.à.d. $(D-r_1)\psi_1 = \xi\psi_2$, $(D-r_2)\psi_2 = \xi\psi_3$,....., $(D-r_n)\psi_n = \xi\psi_1$) .

Ce système se transforme en (2) en conjuguant par la matrice $\Omega = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \ldots & 1 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & & \\ \vdots & & & \\ \alpha^{n-1} & & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}$

car $\Omega^{-1}\Pi\,\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ & 0 & \ddots\ 1 \end{pmatrix} = J$ où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de 1.

On obtient

$$\frac{d}{dx}\tilde{\psi} = Q\tilde{\psi} + \xi J\tilde{\psi} \quad , \text{ avec } \quad Q = \Omega^{-1} R\Omega \, , \ \tilde{\psi} = \Omega^{-1} \Psi\Omega \ .$$

L'évolution de Q correspond à une évolution de r. Le cas le plus simple correspond à $n=2$, $r=r_1 = -r_2$, $k = 3$ (c.à.d.1 mod 2) ; c'est l'équation modifiée de KdV.

$$\frac{\partial r}{\partial t} + 6r^2 \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} r = 0 \ .$$

(Cette équation est liée à l'équation de KdV par l'intermédiaire de l'équation de Riccati $u = r^2 + r'$ voir [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur : The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems. Studies in Appl. Math. 53(1974), 249-315.

[2] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov : Nonlinear equations of KdV type,finite-zone linear operators, and Abelian varieties. Russian Math. Surveys. (1976) 59-146.

[3] V.E. Zakharov and A.B.Shabat : Soviet Physics J.E.T.P. 34 (1972) 62-69.

*
* *
*