M. Balabane

Comportement asymptotique des solutions des équations de type Schrödinger dans $L^P(\mathbb{R}^n)$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 8, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 0 - 1 9 8 1

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE TYPE SCHRÖDINGER DANS $L^p(\mathbb{R}^n)$

par M. BALABANE

Exposé n° VIII

16 Décembre 1980

§ 1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des propriétés des équations de la forme :

$$(\star) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = i\, P(D)U \quad ; \quad U(o,x) = U_o(x).$$

lorsque $U_o(x) \in L^P(\mathbb{R}^n)$.

(Ici $D = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$ et P est un polynôme vérifiant $\operatorname{Im} P(\xi) \geq 0$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n$).

Il est bien connu que pour $p = 2$, le problème de Cauchy $(\star)$ est bien posé, i.e. : pour tout $U_o \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une solution $U(t,x)$ du problème $(\star)$ qui vérifie :

(i) $U(t,x) \xrightarrow{L^2} U_o(x)$ lorsque $t \longrightarrow o$

(ii) $||U(t,.)||_{L^2} \leq ||U_o||_{L^2}$

Il est aussi bien connu que pour $p \neq 2$, le problème de Cauchy $(\star)$ est mal posé, et qu'une inégalité du type (ii) est alors fausse (il suffit de prendre $P(D) = \Delta$)

Néanmoins, dans le cas $P(D) = \Delta$, les deux propriétés suivantes fournissent, pour $p \neq 2$, un moyen d'analyser le problème $(\star)$:

a) Un résultat de S. Sjöstrand [7], sur les moyennes de Riesz s'énonce, en posant $e^{it\Delta}U_o$ la solution de $(\star)$ lorsque $P(D) = \Delta$, et pour $U_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\left| \frac{1}{t^k} \int_o^t (t-s)^k e^{is\Delta} U_o \, ds \right|\right|_{L^P} \leq ||U_o||_{L^P} \qquad \text{pour } k > n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|$$

Ceci induit que certaines moyennes en la variable t de la solution de l'équation de Schrödinger vérifient des inégalités de type (ii). Ce qui permet d'espérer, dans le cas $\operatorname{Im} P(\xi) \geq 0$, montrer que $(\star)$ est bien posé dans le cadre des semigroupes distributions, et d'en déduire des estimations de la résolvante de

$iP(D)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

b) L'inégalité classique :

$$||e^{it\Delta}U_o||_{L^{p'}} \leq \frac{1}{t^\alpha} ||U_o||_{L^p}$$

(où $1 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = n|1/p - 1/2|$)
induit à prouver de telles inégalités dans le cas $\operatorname{Im} P(\xi) = 0$, et d'examiner l'existence d'un poids $M(t)$ qui interviendrait dans une telle inégalité :

$$||e^{itP(D)}U_o||_{L^{p'}} \leq M(t) \; ||U_o||_{L^p}$$

c) En fait, les deux problèmes (a) et (b) sont liés, et leur conjonction nous permettra d'examiner le problème "avec potentiel" :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = iP(D)U + V(x)U \qquad , \qquad U(o,x) = U_o(x) \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

La première partie de ce travail (Problème (a)) a été faite en collaboration avec H.A. Emami Rad, et a fait l'objet de [1], [2] et [3]. Les preuves des résultats de la seconde partie (Problème (b)) ont fait l'objet de [4] et [5].

§ 2. SEMI GROUPES DISTRIBUTION DE CLASSE σ, D'ORDRE k : (en abrégé SGD $\sigma(k)$)

Définition 1 : Nous notons T_k le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ pour la norme

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ ; \ p_k(\varphi) = \sum_{\ell=o}^{\ell=k} ||(t\frac{d}{dt})^\ell \varphi||_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$

La proposition suivante fournit les propriétés utiles de T_k :

Proposition 1 : T_k est une algèbre de Banach pour la convolution additive sur $\mathbb{R}_+$; cette algèbre contient les fonctions $Y(t)e^{-\lambda t}$ pour $\operatorname{Im}\lambda > 0$; de plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, la famille de fonctions $(\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon}))_{\varepsilon > 0}$ est équibornée dans T_k.

Nous donnons maintenant l'équivalent abstrait des solutions des équations du type (★) :

Définition 2 : Soit X un espace de Banach. Un semi groupe distribution de classe σ et d'ordre k est une représentation continue $\mathcal{G}$ de l'algèbre T_k dans l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ vérifiant la régularité à l'origine suivante : il existe un sous espace D dense dans X tel que pour tout x appartenant à D, la distribution à valeur dans X : $\mathcal{G} \otimes x$, est une distribution fonction continue sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, nulle pour $t < o$, et valant x à l'origine.

Remarque : Cette définition précise la notion de semi groupe distribution régulier introduite par Lions [6] , de manière adaptée aux équations (★) dans $L^P(\mathbb{R}^n)$.

De même que dans Lions [6] , nous définissons le générateur infinitésimal d'un SGDσ(k) $\mathcal{G}$, comme étant la fermeture de l'opérateur (non borné) dans X : $\mathcal{G}(-\delta')$, et le théorème suivant en fournit les propriétés spectrales :

Théorème 1 : Soit $\mathcal{G}$ un SGDσ(k) sur un espace de Banach X. Soit A son générateur. A est fermé, de domaine dense, et son ensemble résolvant contient les nombres complexes de partie réelle strictement positive. De plus, on a la majoration :

$$\forall \lambda,\quad \mathrm{Re}\lambda > 0 \; ; \; \forall \mu,\ \mathrm{Re}\ \mu > 0, \quad \|(\lambda-A)^{-\mu}\| \leqslant C|\mu|^k \; \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\ \mu)}{|\Gamma(\mu)|} \; \frac{|\lambda|^k}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{k+\mathrm{Re}\ \mu}}$$

Le théorème suivant est un théorème inverse, de type Hille Yosida, avec perte de deux unités.

Théorème 1bis : Soit A un opérateur fermé, de domaine dense, dans un espace de Banach X. S'il vérifie la majoration :

$$\forall \lambda,\ \mathrm{Re}\ \lambda > 0, \quad \|(\lambda-A)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^k\ (\mathrm{Re}\ \lambda)^{-k-1}$$

alors A engendre un SGDσ(k+2).

La démonstration du théorème 1 repose sur le fait que les fonctions $Y(t)e^{-\lambda t}$ appartiennent à T_k pour Re $\lambda > 0$. En effet, on démontre que $(\lambda-A)^{-1} = \mathcal{G}(Y(t)e^{-\lambda t})$. L'inégalité découle de la continuité de $\mathcal{G}$ sur T_k.

La démonstration du théorème 1bis se fait par une construction de $\mathcal{G}$ par une intégrale de Dunford.

§ 3. PROBLEME DE CAUCHY (★) DANS $L^P(R^n)$: $(1 < p < \infty)$

Le théorème suivant montre que le problème (a) énoncé dans l'introduction admet une réponse positive, au sens des distributions en la variable t, à valeur dans $L^P(\mathbb{R}^n)$ pour les variables x. Il précise l'ordre de cette distribution.

Théorème 2 : Si Im $P(\xi) \geqslant 0$, alors $iP(D)$, regardé comme opérateur (non borné) fermé dans $L^P(\mathbb{R}^n)$ engendre un SGD$\sigma(k)$ dans $L^P(\mathbb{R}^n)$, pour tout entier $k > n/2$.

La démonstration de ce théorème se fait par analyse de Fourier, en utilisant un théorème sur les multiplicateurs de Fourier dans $L^P(\mathbb{R}^n)$ fourni par Stein [8] p. 96.

Le théorème 1, et l'interpolation entre $L^{1+\varepsilon}$ et L^2, où $iP(D)$ engendre trivialement un semi groupe fortement continu permet alors de montrer :

Théorème 2bis : Si Im $P(\xi) \geqslant 0$, alors tout λ appartenant à C, de partie réelle strictement positive, appartient à l'ensemble résolvant de $iP(D)$, opérateur fermé dans $L^P(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout μ de partie réelle strictement positive, et tout ε réel strictement positif, on a la majoration :

$$||(\lambda-iP(D))^{-\mu}||_{\mathcal{L}(L^P(R^n))} \leqslant C_\varepsilon \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\ \mu)}{|\Gamma(\mu)|} |\mu|^k \frac{|\lambda|^k}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{k+\mathrm{Re}\ \mu}}$$

avec $k = (n+2)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \varepsilon$

Remarque : si P est homogène, alors p peut prendre les valeurs 1 et ∞, et on peut faire $\varepsilon = 0$ dans le théorème 2bis.

§ 4. INEGALITES $(L^p, L^{p'})$ POUR LE PROBLEME $(\star)$: $(1 \leqslant p \leqslant 2\ ;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$

Le problème (b), énoncé dans l'introduction, est le problème de l'existence d'une fonction $M(t)$ telle que toute solution $U(t,x)$ du problème $(\star)$, avec donnée initiale $U_o \in S(\mathbb{R}^n)$, satisfasse l'inégalité :

$$||U(t,x)||_{L^{p'}} \leqslant M(t)\ ||U_o||_{L^p}$$

Ce problème est équivalent, pour $p=1$, et par analyse de Fourier, à l'appartenance de $\bar{\mathcal{F}}(e^{it\,P(\xi)})$ à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, la fonction $M(t)$ étant la norme de cette fonction dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

L'analyse de $\bar{\mathcal{F}}(e^{it\,P(\xi)})$ se fait par un feuilletage de l'extérieur d'un compact de $\mathbb{R}^n$ pour les surfaces $P(\xi) = \text{cte}$, et l'estimation de l'intégrale définissant $\bar{\mathcal{F}}(e^{it\,P(\xi)})$ par la méthode de la phase stationnaire.

Le point essentiel est alors de montrer que sous les hypothèses :

(H1) $P(\xi) = ||\xi||^{2m} + Q(\xi)$ où Q est un polynôme réel de degré supérieur ou égal à $2m-1$.

(H2) $2m > n + 1$ (H3) $n > 1$,

il existe un difféomorphisme de l'extérieur d'un compact de $\mathbb{R}^n$ sur $S^{n-1}\times]a,\infty[$ donné par :

$$\omega = ||\xi||^{-1}\xi \qquad s = P(\xi)$$

où, en posant $||\xi|| = \rho$, on a

$$s(\rho,\omega) = s^{1/2m} + \sigma(\omega,\rho)$$

σ appartenant à la classe de symboles de Hörmander $S^0_{1,0}(S^{n-1}\times\mathbb{R})$. L'estimation de $(e^{it\,P(\xi)})$ se ramène alors à l'étude d'une intégrale oscillante sur S^{n-1}, dont la phase n'a que deux points stationnaires, tous les deux non dégénérés, uniformément en les paramètres. On a alors :

<u>Théorème 3</u> : Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on a, pour toute $U_o \in S(\mathbb{R}^n)$ et en notant $U(t,x)$ la solution du problème $(\star)$,

$$\forall\ t \neq 0,\quad ||U(t,x)||_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \max\left(1,\ |t|^{-2\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|}\right) ||U_o||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Utilisant le fait que la transformée de Laplace en la variable t de U(t,x) fournit la résolvante de iP(D), nous déduisons du théorème 3 :

Corollaire : Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), et pour $1 < p \leq 2$, on a l'inégalité

$$\forall \lambda, \mathrm{Re}\ \lambda > 0, \quad \|(\lambda - iP(D))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p, L^{p'})} \leq C\ (\mathrm{Re}\ \lambda)^{2|1/p-1/2|-1}$$

§ 5. PROBLEME (★) AVEC POTENTIEL

Nous nous proposons de démontrer que le problème de Cauchy

$$(\star\star) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = iP(D)U + V(x)U \qquad U(o,x) = U_o(x)$$

est bien posé au sens des distributions en la variable t à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. (Ici V(x) est l'opérateur de multiplication par une fonction V(x) appartenant à un espace $L^r(\mathbb{R}^n)$ à préciser).

Pour cela, nous estimons la résolvante

$$\|\ (\lambda - (iP(D) + V))^{-1}\ \|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))}$$

par une méthode de perturbation, et en utilisant le corollaire du théorème 3; puis nous utilisons le théorème 1bis pour conclure.

Théorème 4 : Pour $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) sur P, et pour $V \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $r^{-1} = |p^{-1} - p'^{-1}|$, (iP(D) + V) engendre un SGDσ, à croissance exponentielle, d'ordre k supérieur à $(n+2)\ |\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| + 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Balabane et H.A. Emami Rad : Smooth distribution group and Schrödinger equation in $L^p(\mathbb{R}^n)$. J. Math. Anal. Appl. vol 70 n° 1 (1971) pp 61-71.

[2] M. Balabane et H.A. Emami Rad : Systèmes Pseudo Différentiels dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Note aux C.R.A.S. (à paraître).

[3] M. Balabane et H.A. Emami Rad : Pseudo Differential Systems in $L^p(\mathbb{R}^n)$. (à paraître).

[4] M. Balabane : Décroissance des solutions d'équations du type de Schrödinger. Application à leur régularité dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Note aux C.R.A.S. (à paraître).

[5] M. Balabane : Uniform Behaviour of solutions of parabolic equations. Application to $iP(D) + V$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. (à paraître).

[6] J.L. Lions : Les Semi Groupes Distributions. Portugalae Math. 19. (1960) pp 141-164.

[7] S. Sjöstrand : On the Riesz means of solutions to Schrödinger equation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 24 (1970) pp 331-348.

[8] E. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press (1970).