Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Pierre

Problèmes semi-linéaires avec données mesures

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 13, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

PROBLEMES SEMI-LINEAIRES AVEC DONNEES MESURES

par M. PIERRE

Exposé n° XIII

22 Mars 1983

Les résultats que nous résumons ci-dessous ont été obtenus en collaboration avec Pierre Baras.

Ils concernent deux classes différentes de problèmes semi-linéaires et traitent de :

i) l'existence de solutions pour des données mesures,

ii) l'éliminabilité des singularités de certaines solutions.

Nous résolvons en particulier les quatre problèmes suivants :

Problème 1 : Soit $\gamma > 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière. Pour quelles mesures de Radon μ bornées sur Ω peut-on résoudre :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\ \Delta u + u|u|^{\gamma-1} = \mu \quad \text{sur} \quad \Omega\ . \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad ? \end{cases}$$

Problème 1' : Même question pour

$$(1)' \qquad \begin{cases} -\ \Delta u = u^{\gamma} + \mu \qquad \mu \geqslant 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad , \quad u \geqslant 0\ . \end{cases}$$

Problème 2 : Soit $\gamma > 1$, K un compact de $\mathbb{R}^N$, Ω voisinage ouvert de K. Considérons le problème :

$$(2) \qquad \begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega \setminus K) \\ -\ \Delta u + u|u|^{\gamma-1} = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega \setminus K)\ . \end{cases}$$

A quelle condition sur K peut-on affirmer que toute solution de (2) vérifie :

$$(3) \qquad u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$$

$$(4) \qquad -\ \Delta u + u|u|^{\gamma-1} = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \qquad ?$$

Problème 2' : Même question pour :

$$(2)' \qquad \begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega \setminus K)\ ,\ u \geqslant 0 \\ \Delta u + u^{\gamma} = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

et

$$(3)' \qquad u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$$

$$(4)' \qquad \Delta u + u^{\gamma} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Remarque : Les problèmes (1) et (1)' sont de nature différente. Par exemple, il est classique que (1) a une solution (unique) si $\mu \in L^1(\Omega)$. Ceci est bien sûr faux en général pour (1)'. Même si $\mu \in L^{\infty}(\Omega)$, il est nécessaire que $\|\mu\|_{L^{\infty}}$ soit suffisamment petit pour que (1)' ait une solution. Il s'agit en fait d'un problème de "valeurs propres non linéaires". Nous les présentons cependant simultanément, car ils sont utilisés pour résoudre les problèmes 2 et 2' qui eux offrent des similarités surprenantes. Nous commençons par un résultat mettant ceci en évidence.

On rappelle les définitions : si m entier et $1 \leq p \leq \infty$:

$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) \ ; \ D^{\alpha}u \in L^p(\mathbb{R}^N), \ \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

La capacité $C_{m,p}$ associée à cette norme est définie par

$$(5) \qquad C_{m,p}(K) = \inf\{\|v\|^p_{m,p} \ ; \ v \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}^N) \ , \ v \geq 1 \ \text{ sur } K\}$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$. On l'étend de manière classique à un ensemble quelconque.

On rappelle qu'un point est de $C_{m,p}$- capacité nulle si et seulement si

$$mp \leq N .$$

Une variété de dimension d est de $C_{m,p}$- capacité nulle si et seulement si : $d \leq N - mp$. Cette propriété admet d'ailleurs une version plus générale en termes de mesures de Hausdorff (voir [11] pour un exposé systématique sur ces capacités et [1] pour le lien entre la définition (5) est celle donnée dans [11]).
Signalons aussi que, si B_r est une boule de rayon r, il existe une constante k telle que :

$$\forall\, 0 < r < 1/2 \ , \ C_{m,p}(B_r) \leq \begin{cases} k r^{N-mp} & \text{si } N > mp \\ k(\mathrm{Log}\,\frac{1}{r})^{1-p} & \text{si } N = mp. \end{cases}$$

Soit maintenant L_m défini sur Ω par

$$L_m u = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} D^{\alpha}(a_{\alpha} u)$$

où

(6) $$a_{\alpha} \in L^{\infty}(\Omega).$$

Théorème 1 : Soit F un ensemble relativement fermé dans l'ouvert Ω tel que $C_{m,\gamma'}(F) = 0$ où $1|\gamma + 1|\gamma' = 1$. Alors toute solution de :

(7) $$\begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega \setminus F), \quad u \geqslant 0 \\ L_m u + u^{\gamma} \leqslant 0 \quad (\text{resp.} = 0) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus F) \end{cases}$$

est aussi solution de

(8) $$\begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega) \quad , u \geqslant 0 \\ L_m u + u^{\gamma} \leqslant 0 \quad (\text{resp.} = 0) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Remarques : Une démonstration d'une version plus générale de ce théorème peut être trouvée dans [3] .

Vu les propriétés rappelées ci-dessus on voit que :

. si $F = \{1 \text{ point}\}$, "(7) $\Rightarrow$ (8)" dès que $N > m$ et $\gamma \geqslant N|(N-m)$.

. si F est une variété de dimension d, "(7) $\Rightarrow$ (8)" si $d \leqslant N - m\gamma'$.

Dans le cas où $L_m = -\Delta$, des résultats de ce type avaient été obtenus dans [8] et [13] avec une méthode très différente ; voir aussi [7], [10] pour le cas $L_m = \Delta$.

Aucune hypothèse d'ellipticité n'étant faite sur L_m, le théorème ci-dessus s'applique donc aux problèmes 2 et 2'. Pour (2), on se ramène au cas de solutions positives en utilisant que, si u est solution de (2), alors :

$$-\Delta|u| + |u|^{\gamma} \leqslant 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K).$$

Reste à déterminer dans quelle mesure ce résultat est optimal : en particulier, la condition $C_{2,\gamma'}(K) = 0$ est-elle nécessaire pour que (2) $\Rightarrow$ (3) et (4) (ou (2)' $\Rightarrow$ (3)' et (4)') ?

Si $C_{2,\gamma'}(K) > 0$, il existe une mesure μ positive non nulle à support dans K (compact) et telle que $\mu_K \in W^{-2,\gamma}(\mathbb{R}^N)$. (voir [11]). L'idée naturelle pour répondre à la question ci-dessus est donc d'essayer de résoudre les équations :

(9) $$-\Delta u + u^\gamma = \mu_K .$$

(9)' $$-\Delta u = u^\gamma + \mu_K .$$

De tels u vérifient (2) (resp. (2)') sans vérifier (4) (resp. (4)').

L'équation (9) est résolue à l'aide du théorème suivant qui fournit une résponse complète au théorème (I). Pour plus de généralité, étant donné Ω un ouvert borné de frontière régulière, on considère l'opérateur différentiel L défini par

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + c\, u$$

où

(10) $$a_{ij},\ b_i \in C^1(\bar\Omega),\quad \forall i,j = 1,\dots,N\ ,\ a \in L^\infty(\Omega).$$

(11) $$\sum_{i,j} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \alpha\ \left(\sum_i \xi_i^2\right),\quad \alpha > 0,\quad \forall\ (\xi_1,\dots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N$$

(10) $$a \geqslant 0\ ,\quad a + \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geqslant 0 \quad \text{p.p.}$$

<u>Définition</u> : Etant donné une mesure de Radon μ sur Ω , on dit que μ ne charge pas les ensembles de $C_{m,\gamma'}$-capacité nulle si

$$C_{m,\gamma'}(E) = 0 \Longrightarrow |\mu|(E) = 0 .$$

<u>Théorème 2</u> : Soit μ une mesure de Radon bornée sur Ω . Le problème

(12) $$\begin{cases} u \in L^\gamma(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu + u|u|^{\gamma-1} = \mu \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

a une solution si et seulement si μ ne charge pas les ensembles de $C_{2,\gamma'}$ -capacité nulle. Quand elle existe la solution est unique. De plus $\mu \mapsto u$ est une application croissante.

Remarque : Ceci est prouvé dans [2]. Signalons que des résultats avaient été obtenus dans [6] pour des masses ponctuelles et des non-linéarités plus générales. Voir aussi une autre approche récente dans [9]. Nous sommes maintenant en mesure de compléter la réponse au problème 2.

Théorème 3 : Soit $K \subset \Omega$ compact.

i) Si $c_{2,\gamma'}(K) = 0$, toute solution de

$$(13) \qquad \begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega \setminus K) \\ Lu + u|u|^{\gamma-1} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

est solution de :

$$(14) \qquad \begin{cases} u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \quad \forall\, 1 \leqslant p < \infty \\ Lu + u|u|^{\gamma-1} = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \end{cases} .$$

ii) Si $c_{2,\gamma'}(K) > 0$

α) il existe $\mu \geqslant 0$ à support dans K et u solution de

$$(15) \qquad \begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega) \\ Lu + u^{\gamma} = \mu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

β) il existe u solution de

$$(16) \qquad \begin{cases} u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega \setminus K) \\ Lu + u^{\gamma} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K) \\ u \notin L^{\gamma}_{loc}(\Omega). \end{cases}$$

Remarques : Si μ est une mesure de Radon à support compact dans Ω vérifiant

$$\mu \in W^{-2,\gamma}(\mathbb{R}^N) \quad ,$$

on sait que μ ne charge pas les ensembles de $c_{2,\gamma'}$- capacité nulle.

D'après le théorème 2, il est donc possible de résoudre l'équation (7) ce qui donne (15) .

Pour le point $\beta)$, on résout

$$\begin{cases} u_n \in L^\gamma(\Omega) \cap W_o^{1,1}(\Omega) \\ Lu_n + u_n^\gamma = n\,\mu_K \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

On utilise alors l'estimation locale suivante (voir [3] , [12])

$$\forall\, \psi \in C_o^\infty(\Omega) \quad \text{avec } 0 \leqslant \psi \leqslant 1$$

$$\int u_n^\gamma\, \psi^{2\gamma'} \leqslant n \int \psi^{2\gamma'}\, d\mu_K + C\, \|\psi\|^{\gamma'}_{W^{2,\gamma'}}$$

où C ne dépend ni de ψ, ni de n. Comme $n \mapsto u_n$ est croissante, choisissant $\psi \in C_o^\infty(\Omega \setminus K)$, on en déduit que u_n croît p.p. vers $u \in L^\gamma_{loc}(\Omega \setminus K)$. La limite satisfait $Lu + u^\gamma = 0$ dans $\Omega \setminus K$ et on vérifie aisément que u ne peut pas être prolongée en une fonction de $L^\gamma_{loc}(\Omega)$.

Revenons maintenant au problème 1'. Soit G la fonction de Green associée à l'ouvert Ω et à $-\Delta$. Par solution de (1)' on entend une fonction u vérifiant

$$(17) \qquad \begin{cases} u \in L^1_{loc}(\Omega),\ u \geqslant 0 \\ \text{p.p. } x \quad G(x,.)u^\gamma \in L^1(\Omega) \\ u(x) = \displaystyle\int_\Omega G(x,y)\, u^\gamma(y)dy + f(x) \qquad \text{p.p. } x \in \Omega \end{cases}$$

où $f(x) = \displaystyle\int_\Omega G(x,y)d\mu(y)$.

<u>Théorème 4</u> : Soit μ une mesure de Radon sur Ω telle que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $f \geqslant 0$ p.p. Alors (17) a une solution <u>si et seulement si</u>

$$(18) \qquad \int_\Omega \varphi\, d\mu \leqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\gamma'}} \int_\Omega \frac{(-\Delta\varphi)^{\gamma'}}{\varphi^{\gamma' - 1}}$$

pour tout $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_o(\Omega)$ avec $-\Delta\varphi \geqslant 0$ et à support compact.

Remarque : Ceci est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général démontré dans [5] (Voir aussi [2]). Il s'étend à des non-linéarité $j(u)$ où j est convexe, positive, croissante et à des noyaux positifs $N(x,y)$ très généraux au lieu de G. La condition (18) devient alors

$$(19) \qquad \int_\Omega h\, f \leq \int_\Omega j^*\left(\frac{h}{\bar{N}h}\right)\bar{N}h \quad , \quad \forall h \geq 0 \text{ bornée à support compact}$$

où $\bar{N}h(x) = \int_\Omega N(y,x)\, h(y)dy$ et $j^*(r) = \max\limits_{\alpha} \alpha r - j(\alpha)$.
En particulier, on peut remplacer $-\Delta$ par un opérateur elliptique du type L défini plus haut. Les fonctions de Green étant comparables, on en déduit que, dans le cas $j(r) = r^\gamma$, la condition (19) est du même type pour $-\Delta$ et les opérateurs L. Donc la classe des mesures μ pour lesquelles on peut résoudre

$$Lu = u^\gamma + \lambda\mu \quad \text{pour } \lambda \text{ petit}$$

ne dépend pas de L.

Notons que dans le théorème 4, la condition nécessaire est triviale (ce qui rend la condition suffisante d'autant plus surprenante). En effet, soit $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_o(\Omega)$ avec $-\Delta\varphi \geq 0$, à support compact et $h = -\Delta\varphi$, soit $\varphi(x) = \int_\Omega G(x,y)h(y)dy$. Multipliant (17) par h, on obtient

$$\int_\Omega h(x)u(x)dx = \iint_{\Omega\times\Omega} G(x,y)u^\gamma(y)h(x)dx + \int_\Omega f(x)h(x)dx.$$

Soit encore

$$\int_\Omega \varphi d\mu + \int_\Omega \varphi u^\gamma = \int_\Omega hu = \int_\Omega \varphi^{1/\gamma} u \frac{h}{\varphi^{1/\gamma}} \leq \int_\Omega \varphi u^\gamma + \frac{\gamma-1}{\gamma^{\gamma'}} \int_\Omega \frac{h^{\gamma'}}{\varphi^{\gamma'/\gamma}}$$

On en déduit (18).

Il nous reste à voir en quoi la condition $C_{2,\gamma'}(K) = 0$ est optimale pour que "(2)' $\Longrightarrow$ (3)' et (4)' ". Pour prouver qu'en fait cette condition est nécessaire, nous avons vu qu'il suffisait de résoudre (9)' lorsque $C_{2,\gamma'}(K) > 0$. Le théorème suivant montre que, tout au moins pour λ assez petit, on peut résoudre

$$-\Delta u = u^\gamma + \lambda\mu_k \quad , \; u \geq 0$$

ce qui suffit aussi.

Pour cela, rappelons que d'après [11] , si K est un compact de $\mathbb{R}^N$ tel que $C_{2,\gamma'}(K) > 0$, il existe une mesure de Radon positive μ_K à support dans K, non nulle et telle que :

$$I * \mu_K \in L^\gamma(\mathbb{R}^N)\ ,\ I * (I * \mu_K)^{\gamma - 1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

où I est le noyau de Green sur $\mathbb{R}^N$, soit $I(x) = C_N |\,|x|^{N-2}$ $(N \geqslant 3)$ et C_N constante ne dépendant que de N.

<u>Théorème 5</u> : Soit $K \subset \Omega$ compact avec $C_{2,\gamma'}(K) > 0$ et μ_K la mesure définie ci-dessus. Il existe $C = C(N,\gamma)$ telle que

$$\forall\ \varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_o(\Omega) \text{ avec } -\Delta\varphi \geqslant 0 \text{ et à support compact}$$

$$\int_\Omega \varphi\, d\,\mu_K \leqslant C\, a^{\gamma'-1} \int_\Omega \frac{(-\Delta\varphi)^{\gamma'}}{\varphi^{\gamma'-1}}$$

où $a = \| I * (I * \mu_k)^{\gamma - 1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_o(\Omega)$ avec $-\Delta\,\varphi \geqslant 0$ à support compact dans Ω . On considère $\Psi = I * (-\Delta\varphi)$. D'après le principe du maximum $\varphi \leqslant \Psi$ sur Ω . Il nous suffit donc de montrer

$$\int \psi\, d\,\mu_K \leqslant C\, a^{\gamma' - 1} \int \frac{(-\Delta\,\psi)^{\gamma'}}{\psi^{\gamma'-1}}$$

où $\int = \int_{\mathbb{R}^N}$.

Notons $f = -\Delta\psi$, soit $\psi = I * f$ et $H = I * \mu_K$. On a

$$\int \psi\, d\mu_K = \int H\, f \leqslant \varepsilon \int H^\gamma \psi + \frac{C(\gamma)}{\varepsilon^{\gamma'-1}} \int \frac{f^{\gamma'}}{\psi^{\gamma'-1}} . \tag{21}$$

$$\int H^\gamma \psi = \int H^{\gamma-1} (I * \mu_K)(I * f) = C(N) \iiint \frac{H^{\gamma-1}(x)\ f(y)\ d\,\mu_K(z)\ dx\ dy}{|x-y|^{N-2}\ |x-z|^{N-2}} . \tag{22}$$

Mais

$$(23)\qquad \iiint_{2|x-z|\geqslant|y-z|} \frac{H^{\gamma-1}(x)\, f(y)\, d\mu_K(z)\,dx\, dy}{|x-y|^{N-2}\, |x-z|^{n-2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{N-2} \int f(y)\, dy \int \frac{d\mu_K(z)}{|y-z|^{N-2}} \int \frac{H^{\gamma-1}(x)\,dx}{|x-y|^{N-2}}$$

$$\leqslant C(N)\; a \int f(y)\; H(y)\; dy.$$

Si $2|x-z|\leqslant|y-z|$, on a $|y-z|\leqslant|y-x| + |x-z|\leqslant|y-x| + \frac{1}{2}|y-z|$

$$\Rightarrow |y-z| \leqslant 2|x-y|$$

Donc

$$\iiint_{2|x-z|\leqslant|y-z|} \frac{H^{\gamma-1}(x) f(y) d\mu_K(z) dx\, dy}{|x-y|^{N-2}\, |x-z|^{N-2}}$$

$$\leqslant 2^{N-2} \int f(y)\,dy. \int \frac{d\mu_K(z)}{|y-z|^{N-2}} \int \frac{H^{\gamma-1}(x)}{|x-z|^{N-2}}$$

$$\leqslant C(N) a \int f(y)\; H(y)\; dy .$$

De (21), (22), (23), (24) on déduit

$$\int \psi\; d\,\mu_K = \int H\, f \;\leqslant \varepsilon\; C(N) a \int Hf + \frac{C(\gamma)}{\varepsilon^{\gamma'-1}} \int \frac{f^{\gamma'}}{\psi^{\gamma'-1}} \quad .$$

Choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{2C(N)a}$, on obtient

$$\psi\; d\mu_K \leqslant C(\gamma,N)\; a^{\gamma'-1} \int \frac{f^{\gamma'}}{\psi^{\gamma'-1}}$$

ce qui est la relation cherchée.

Terminons par l'examen de deux cas limites explicites. On suppose $N = 3$ et $\gamma = N/(N-2) = 3$. Considérons les équations

(25) $$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = \mu \geqslant 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

(24) $$\begin{cases} -\Delta u = u^3 + \lambda\mu \quad \lambda > 0 \text{ petit}, \quad \mu \geqslant 0, \quad u \geqslant 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème 2, on sait que si, μ est une masse ponctuelle, (25) n'a pas de solution, la valeur 3 étant de ce point de vue une valeur critique. On peut se demander s'il y a existence lorsque μ est une mesure sans atomes. La réponse est négative. En effet, il existe des compacts de $W^{2,3/2}$-capacité nulle dans $\mathbb{R}^3$ qui portent des mesures sans atomes non nulles. De telles mesures ne sont donc pas acceptables d'après le théorème 2 (voir [4] pour de telles constructions).

Pour (24), on déduit du théorème 5 que, si $\mu \in L^q(\Omega)$ avec $q > 1$, alors il admet une solution pour λ assez petit. En effet, si φ est une fonction test comme dans (18) et si $W = \dfrac{(-\Delta\varphi)^{\gamma'}}{\varphi^{\gamma'-1}}$, on a

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = W^{\frac{1}{\gamma'}}\,\varphi^{\frac{1}{\gamma}} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donc, pour $1 < p < \gamma' = N/2$, $p^* = pN/(N-2p)$, on a, d'après les injections de Sobolev et les estimations $W^{2,p}$ pour $-\Delta$:

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}} \leqslant C\|\varphi\|_{W^{2,p}} \leqslant C\,\|\Delta\varphi\|_{L^p} \leqslant \left(\int W^{\frac{p}{\gamma'}}\,\varphi^{\frac{p}{\gamma}}\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int W\right)^{1/\gamma'} \left(\int \varphi^{\frac{p(\gamma'-1)}{\gamma'-p}}\right)^{(\gamma'-p)/\gamma' p}.$$

Comme $1 < p < \gamma' = N/2$, on a $p^* \geqslant p(\gamma'-1)/(\gamma'-p)$. On en déduit que pour tout $1 < r < \infty$.

$$\|\varphi\|_{L^r} \leqslant C \int W$$

Ainsi, si $\mu \in L^q$ avec $q > 1$

$$\int \varphi \mu \leqslant \|\mu\|_{L^p} \, \|\varphi\|_{L^{q'}} \leqslant C \int w$$

ce qui prouve que $\lambda\mu$ vérifie (18) pour λ petit ; d'où l'existence d'une solution pour (24). Reste le cas limite $\mu \in L^1(\Omega)$.

Prenant dans (18) des fonctions-test du type $\psi^{2\gamma'}$ on montre aisément que (18) implique

$$\forall K \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega \ , \ K \text{ compact}, \quad \Omega' \text{ ouvert}$$

$$\int_K \mu \leqslant c(\Omega',\gamma) \quad C_{2,\gamma'}(K)$$

et donc dans le cas $N = 2\gamma'$

$$\int_{|X - X_o| \leqslant r} \mu \leqslant C(\mathrm{Log}\ 1/r)^{1-\gamma'}$$

Il est clair qu'il existe des fonctions de L^1 ne vérifiant pas cette inégalité. Donc, on ne peut pas résoudre (24) pour tout $\mu \in L^1(\Omega)$.

<u>Remarque</u> : Une étude similaire pour les problèmes paraboliques

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \pm u^\gamma = \nu \quad , \ u(0) = \mu \ , \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \ \nu \ , \ \mu \ \text{ mesures},$$

a été réalisée par les mêmes auteurs et peut être trouvée dans [4] et [5] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. R. Adams, J. C. Polking : The equivalence of two definitions of capacity, Proc. of A.M.S., 37 (1973), pp. 529-534.

[2] P. Baras : Résultats d'existence et d'éliminabilité pour l'équation $-\Delta u = u^\gamma + \mu$ et sa version parabolique, exposé au séminaire du Collège de France (à paraître).

[3] P. Baras, M. Pierre : Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble (à paraître).

[4] P. Baras, M. Pierre : Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures (à paraître).

[5] P. Baras, M. Pierre : Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution positive pour des équations semi-linéaires non monotones (à paraître).

[6] Ph. Benilan, H. Brezis : Papier à paraître sur l'équation de Thomas-Fermi

[7] H. Brezis, P. L. Lions : A note on isolated singularities for linear elliptic equations, Mathematical Analysis and Applications, Part. A, Vol. dedicated to L. Schwartz, L. Nachbin ed., Ac. Press (1981), pp. 263-266.

[8] H. Brezis, L. Véron : Removable singularities for some nonlinear elliptic equation, Arch. for Rat. Mech. and Ana., 75 (1980) pp. 1-6.

[9] T. Gallouët, A. Morel : A paraître.

[10] P. L. Lions : Isolated singularities in semilinear problems, J. of Diff. Eq. 38 (1980), pp. 441-450.

[11] N. G. Meyers : A theory of capacities for potentiels of functions in Lebesgue classes, Math. Scand. 26 (1970), pp. 255-292.

[12] M. Pierre : Résultats d'existence et d'éliminabilité pour l'équation $-\Delta u + u^{\gamma} = \mu$ et sa version parabolique, exposé au séminaire du Collège de France (à paraître).

[13] L. Véron : Singularités éliminables d'équations elliptiques non linéaires, J. of Diff. Eq. 41 (1981) pp. 87-95

***