N. K. Stanton

L'équation de la chaleur en plusieurs variables complexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 6, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 2 - 1 9 8 3

L'EQUATION DE LA CHALEUR EN PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

par N. K. STANTON

Exposé n° VI

14 Décembre 1982

Dans cet exposé, nous considérons un exemple d'équation de la chaleur en plusieurs variables complexes. C'est l'équation de la chaleur associée au problème de $\bar{\partial}$-Neumann dans un domaine de Siegel strictement pseudoconvexe. Dans le § 2, nous donnons une formule explicite pour la solution fondamentale de cette équation (2.20). Mais d'abord, nous regardons l'origine classique du problème.

1. LE CAS CLASSIQUE

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec bord Γ supposé C^∞. Le problème de Neumann se décrit comme suit : on se donne une fonction f sur Ω et une fonction g sur Γ et on cherche une solution u de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ désigne le champ de vecteurs normaux à Γ de longueur 1 dans la direction extérieure à Ω. Si $\check{\tilde{g}}$ est une fonction sur Ω vérifiant $\dfrac{\partial \check{\tilde{g}}}{\partial \nu} = g$, alors $v = u - \check{\tilde{g}}$ est la solution de

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta v = \check{\tilde{f}} = f - \Delta \check{\tilde{g}} & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Puisqu'on peut facilement trouver une telle $\check{\tilde{g}}$, le problème de Neumann se réduit au problème (1.1). La condition $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ s'appelle la <u>condition de Neumann.</u>

Considérons maintenant les formes de degré 1 sur Ω. Nous considérons l'analogue du problème (1.1). On se donne une forme $f = \Sigma\, f_i dx_i$. On cherche une forme $u = \Sigma\, u_i\, dx_i$ qui vérifie

$$u = f \qquad \text{sur } \Omega$$

et aussi des conditions convenables au bord. Ici, Δ opère sur chaque composante de u, $\Delta u = \Sigma(\Delta u_i) dx^i$. Quelles sont les conditions convenables au bord, analogues à la condition de Neumann ? On pense tout de suite à

$$(du)_{norm} = 0$$

où $(v)_{norm}$ désigne les composantes normales de la forme v. Mais cela ne nous donne que $n-1$ conditions pour n fonctions. Alors, nous demanderons en plus que

$$(u)_{norm} = 0 .$$

Les conditions au bord pour le problème

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \Delta u = -(dd^* + d^* d)u = f & \text{sur } \Omega \\ (u)_{norm} = (du)_{norm} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

s'appellent les <u>conditions absolues</u> ou les <u>conditions de d-Neumann.</u>

Les deux problèmes (1.1) et (1.2) sont des problèmes elliptiques à valeurs au bord. En conséquence, chacun de ces problèmes a un spectre discret (négatif) et les valeurs propres ont une multiplicité finie. Une méthode pour obtenir des résultats sur le comportement asymptotique des valeurs propres est d'étudier la solution fondamentale du problème à valeurs initiales pour l'équation de la chaleur associée au problème elliptique. On se donne f_o et on cherche $f(x,t)$ qui résout :

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)\, f(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \text{Pour chaque } t > 0,\ f(.,t) \text{ vérifie les conditions au bord} \\ \lim\limits_{t \to 0} f(x,t) = f_o(x). \end{cases}$$

La solution fondamentale a été trouvée dans les domaines bornés et plus généralement dans les variétés à bord par McKean-Singer [MS] pour les fonctions par la méthode de réflexion et par Greiner[Gr] et Ray-Singer [RS] pour les formes par les méthodes de la théorie du potentiel. On peut aussi employer la méthode d'approximation du bord par un demi-espace et approximation du problème par un problème à coefficients constants dans le demi-espace [LSU]. La raison d'introduire la solution fondamentale est que sa trace est $\Sigma\, e^{\lambda t}$ où la somme est étendue à toutes les valeurs propres du problème. Mc Kean-Singer [MS] et Greiner [Gr] ont démontré que cette trace a un développement asymptotique quand $t \to 0$ en puissances demi-entières de t, commençant par $t^{-n/2}$, dont les coefficients sont les intégrales de polynômes (ne dépendant que de la dimension et de la puissance de t) en la courbure et ses dérivées covariantes. Par exemple, pour les fonctions sur une surface avec la condition de Neumann au bord, on a

$$\Sigma\, e^{\lambda t} = \frac{1}{4\pi t}\,\text{Aire} + \frac{1}{4\sqrt{4\pi t}}\,\text{longueur du bord}$$

$$+ \frac{1}{12\pi}\iint K - \frac{1}{24\pi}\int_{\text{bord}} k_g + O(t^{1/2})$$

quand $t \to 0$ où K désigne la courbure gaussienne et k_g la courbure géodésique du bord.

Toutes les méthodes pour trouver la solution fondamentale utilisent d'une manière ou d'une autre le fait qu'on sait résoudre le problème dans un demi-espace. Grâce à cela et puisqu'un domaine de Siegel est l'analogue strictement pseudoconvexe d'un demi-espace et ressemble un peu à un demi-espace, regardons ce cas. Soit $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x_n > 0\}$. Les conditions de d-Neumann au bord sont

$$(u)_{\text{norm}} = u_n dx_n = 0 \qquad \text{sur} \qquad \{x_n = 0\}$$

et

$$(du)_{\text{norm}} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right) dx_n \wedge dx_i = 0 \qquad \text{sur} \quad \{x_n = 0\}\ .$$

La première condition est simplement

$$u(x',0) = 0$$

où $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$. Puisque $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x',0) = 0$ quand $i < n$,

la deuxième condition est

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_n}(x',0) = 0 \qquad 1 \leqslant i < n.$$

Donc, le problème de d-Neumann pour les formes de degré 1 se réduit à deux problèmes pour les fonctions - un avec la condition de Neumann au bord, l'autre avec la condition de Dirichlet.

Pour résoudre l'équation de la chaleur dans le demi-espace avec une de ces conditions au bord, il faut d'abord savoir le rédoudre dans tout l'espace sans condition au bord.

Rappelons que la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ est donnée par convolution avec le noyau gaussien. On se donne $f_o \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on pose

$$f(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} \int e^{-|x-y|^2/4t} f_o(y)\, dy \; . \tag{1.3}$$

Une méthode pour trouver cette solution fondamentale est de prendre la transformée de Fourier dans les variables x. Pour vérifier que f résout l'équation de la chaleur, on prend la dérivée sous le signe intégrale. Si f est continue en x, nous vérifions que $f(x,t) \to f(x)$ quand $t \to 0$ à l'aide du fait que l'intégrale du noyau gaussien est 1. Donc,

$$\begin{aligned} f(x,t) - f_o(x) &= \int \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-|x-y|^2/4t}(f_o(y) - f_o(x))dy \\ &= \int_{|x-y|<\delta} + \int_{|x-y| \geqslant \delta} \end{aligned}$$

pour tout $\delta > 0$. La continuité de f en x nous permet de choisir δ suffisamment petit pour que la première intégrale soit petite. Maintenant, si nous fixons δ , nous voyons que la deuxième intégrale tend vers 0 quand $t \to 0$. Donc $f(x,t) \to f_o(x)$ quand $t \to 0$.

Revenons au demi-espace. Nous nous donnons une fonction $f_o \in L^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap C(\mathbb{R}^n_+)$ et nous cherchons une solution $F(x,t)$ de l'équation de la chaleur qui vérifie une des deux conditions au bord, par exemple, la condition de Dirichlet, $F(x',0,t) = 0$. D'abord nous prolongeons f_o par 0, et nous appelons aussi cette nouvelle fonction f_o. Pour trouver F, nous faisons une réflexion autour du bord. L'image de (y',y_n) est $(y', -y_n)$. Posons

$$F(x,t) = f(x,t) - \int \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-|x'-y'|^2/4t - (x_n+y_n)^2/4t} f_o(y)dy \; ,$$

où f est donnée par (1.3). La deuxième expression résout l'équation de la chaleur avec la valeur initiale 0 dans $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^+$ et l'intégrale a les mêmes valeurs au bord que f. Donc F est la solution cherchée. Si nous cherchons une solution F_1 qui vérifie $\frac{\partial F_1}{\partial x_n}((x',0),t) = 0$, nous posons

$$F_1(x,t) = f(x,t) + \int \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-|x'-y'|^2/4t - (x_n+y_n)^2/4t} f_o(y)\,dy.$$

2. LE PROBLEME DE $\bar\partial$-NEUMANN

En plusieurs variables complexes, le problème analogue est le problème de $\bar\partial$-Neumann dans les domaines strictement pseudoconvexe . Un domaine Ω avec bord régulier Γ est strictement pseudoconvexe si localement il est biholomorphiquement équivalent à un domaine strictement convexe par une application régulière jusqu'au bord. Ici, par strictement convexe, nous entendons que le Hessien d'une fonction qui définit le domaine est strictement positif. Par exemple, la boule ou un ellipsoïde est strictement pseudoconvexe. Le problème de $\bar\partial$-Neumann sur les formes de type (0,1) dans un domaine borné strictement pseudoconvexe Ω est le suivant . On se donne une forme $f = \Sigma\, f_i d\bar z_i$ sur Ω et on cherche une solution $u = \Sigma\, u_i\, d\bar z_i$ de

$$\begin{cases} (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)u = -\frac{1}{2}\Sigma(\Delta\, u_i)d\bar z_i = f & \text{sur } \Omega \\ u_{norm} = (\bar\partial\, u)_{norm} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

(Nous ne parlons que des formes du type (0,1) pour simplifier un peu). Ce problème diffère des autres en ce que les conditions de $\bar\partial$-Neumann ne sont pas elliptiques. On sait quand même, grâce au travail de Kohn [FK], que le problème a un spectre discret. Alors, une étude de l'équation de la chaleur associée devrait donner des renseignements sur le spectre. Malheureusement, les méthodes classiques, dont nous avons déjà parlé, ne marchent pas ici puisque les conditions au bord ne sont pas elliptiques. Le seul résultat jusqu'ici est celui de Métivier [M] qui est équivalent à la connaissance du premier terme dans le développement asymptotique de $\Sigma e^{-\lambda t}$.

On peut espérer qu'une modification des méthodes classiques marchera. A cause de cela et puisqu'il est intéressant de voir une formule explicite pour la solution, nous considérons l'équation de la chaleur dans l'analogue strictement pseudoconvexe du demi-espace [S1] [S2] . C'est le domaine de Siegel

$$D = \{(z,w) \ : \ z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C} \ , \mathrm{Im}\, w > |z|^2\} \ \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

Ce domaine est biholomorphiquement équivalent à la boule par l'application

$$(z,w) \quad \mapsto \quad \left(\frac{2z}{w+i} \ , \ \frac{w-i}{w+i}\right),$$

donc il est strictement pseudoconvexe . Le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe peut être localement bien approché par le bord du domaine de Siegel. On emploie cela dans l'étude de la géométrie du bord - la forme normale de Moser pour une hypersurface réelle et la connexion de Cartan-Chern-Tanaka [CM] sur l'hypersurface. On l'emploie également en analyse - d'abord Folland et Stein [FS] en étudiant le Laplacien de $\bar{\partial}_b$ sur le bord et plus tard Greiner et Stein [GS] en étudiant le problème de $\bar{\partial}$-Neumann.

Une raison faisant que le domaine de Siegel est un modèle simple est que le bord de D peut s'identifier au groupe de Heisenberg H_n, et H_n donne un groupe d'applications biholomorphes sur D et sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par

$$T_{(z',w')}(z,w) = (z+z', w+w' + 2i\Sigma \bar{z}'_j z_j) \tag{2.1}$$

où $(z',w') \in H_n$ et $(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Quand $(z,w) \in H_n = \partial D$, (2.1) donne la loi de multiplication dans le groupe H_n. Ces applications conservent les surfaces de niveau de $\rho(z,w) = \mathrm{Im}\, w - |z|^2$ et agissent transitivement sur ces surfaces. Les champs de vecteurs

$$\begin{cases} Z_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j} + 2i\bar{z}_j \dfrac{\partial}{\partial w} & j \leqslant n \\ Z_{n+1} = i\sqrt{2}\,\dfrac{\partial}{\partial w} & \end{cases} \tag{2.2}$$

sont invariants et $Z_1,\dots,Z_n$ sont tangents aux surfaces de niveau de ρ . Pour tirer avantage de l'action de H_n, donnons sur D (et sur $\mathbb{C}^{n+1}$) la métrique hermitienne pour laquelle (2.2) est une base orthonormée de $T^{1,0}$. (Cette métrique était introduite par Greiner et Stein [GS] et elle est un exemple de ce qu'ils appellent une métrique de Levi sur D. Elle n'est pas kählérienne). La forme de volume est 2^n fois la mesure de Lebesgue. Nos formules seront prises par rapport à la mesure de Lebesgue (sans le 2^n).

Nous considérons les formes du type $(0,1)$ sur D. (Il y a des résultats analogues pour les formes du type $(0,q)$, $q > 0$ [S1] [S2].) Soit $\{\omega^j\}$ la base de $\Lambda^{1,0}$ duale à (2.2). Soit $f = \Sigma f_j \bar{\omega}^j \in C^\infty(\Lambda^{0,1}(\bar{D}))$. Alors f vérifie les <u>conditions de $\bar{\partial}$-Neumann</u> si

$$(2.3) \qquad \begin{cases} f_{n+1}\,|_{\partial D} = 0 \\ \bar{Z}_{n+1} f_j|_{\partial D} = 0 \qquad j \leqslant n . \end{cases}$$

L'opérateur $\square$ est l'opérateur formellement autoadjoint définit sur les formes vérifiant 2.3) et une condition à l'infini par $\square = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$. La condition à l'infini est que chaque f_j se prolonge en une fonction à décroissance rapide. Alors $\square$ se prolonge en un opérateur fermé autoadjoint sur $L^2(\Lambda^{0,1}(D))$, qu'on note toujours $\square$. Le problème aux valeurs initiales pour l'équation de la chaleur associée est :
soit $f \in C_0^\infty(\Lambda^{0,1}(D))$; on cherche $F(.,t) \in L^2(\Lambda^{0,1}(D))$, $t \in \mathbb{R}^+$, différentiable en t, telle que :

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \text{pour chaque } t,\ F(.,t) \in \operatorname{Dom} \square \\ \text{(ii)} & \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \square\right)F = 0 \\ \text{(iii)} & \lim\limits_{t \to 0} F(.,t) = f \qquad \text{dans } L^2(\Lambda^{0,1}(D)). \end{cases}$$

Par le théorème spectral, $F(.,t) = e^{-t\square} f$ où $e^{-\square t}$ est le semi-groupe engendré par $-\square$. (Remarquons que $\square$ est positif tandis que le Laplacien habituel est négatif, ce qui explique le signe dans (ii).)

L'opérateur $e^{-t\square}$ a un noyau C^∞ , et nous donnerons une formule pour ce noyau. D'abord, nous décrirons l'équation de la chaleur d'une manière explicite. Utilisons les coordonnées (z,u,ρ) dans $\mathbb{C}^{n+1}$ où $u = \operatorname{Re} w$, $\rho = \operatorname{Im} w - |z|^2$, donc $D = \{\rho > 0\} = H_n \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{C}^{n+1} = H_n \times \mathbb{R}$, avec (z,u) les coordonnées sur H_n et ρ la coordonnée sur $\mathbb{R}$. Posons

$$(2.5) \qquad \square_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (Z_k\bar{Z}_k + \bar{Z}_k Z_k) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right) + i\alpha\frac{\partial}{\partial u} .$$

Un calcul facile donne

$$\square\,(\Sigma f_j\bar{\omega}^j) = \sum^{n} (\square_{n-2} f_j)\bar{\omega}^j + (\square_n f_{n+1})\bar{\omega}^{n+1} ,$$

et $\square$ est diagonal, ainsi que les conditions au bord.

Donc, la résolution de l'équation de la chaleur (2.4) se réduit à la résolution de deux problèmes paraboliques à valeurs initiales et au bord pour les fonctions complexes sur $\mathbb{R}_+^{2n+2} \times \mathbb{R}_+$. On se donne $f_o \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+^{2n+2})$.

Problème (1) : Trouver $f(z,u,\rho,t)$ telle que

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Box_n) f(z,u,\rho,t) = 0$$

$$f|_{\rho=0} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} f(z,u,\rho,t) = f_o(z,u,\rho) \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+^{2n+2}).$$

Problème (2) : Trouver $f(z,u,\rho,t)$ telle que

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Box_{n-2}) f(z,u,\rho,t) = 0$$

$$(\frac{\partial}{\partial \rho} - i\frac{\partial}{\partial u}) f|_{\rho=0} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} f(z,u,\rho,t) = f_o(z,u,\rho) \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+^{2n+2}).$$

Pour le premier problème, la condition au bord est la condition de Dirichlet, ce qui rend le problème elliptique. La condition au bord pour le problème (2) n'est pas elliptique. Nous allons résoudre ces problèmes en deux étapes, comme dans le demi-espace euclidien. Désignons par $h_t^{(i)}$ la solution fondamentale du problème (i). Remarquons que les deux problèmes sont invariants par l'action du groupe de Heisenberg, donc le noyau $h_t^{(i)}$ est un noyau de convolution dans les variables du groupe. Nous cherchons alors des noyaux qui dépendent des variables $(z,u,\rho,\sigma) \in H_n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Nous écrivons

$$h_t^{(1)}(z,u,\rho,\sigma) = k_t^n(z,u,\rho-\sigma) + q_t^{(1)}(z,u,\rho,\sigma) \tag{2.6}$$

et

$$h_t^{(2)}(z,u,\rho,\sigma) = k_t^{n-2}(z,u,\rho-\sigma) + q_t^{(2)}(z,u,\rho,\sigma) \tag{2.7}$$

où k_t^α est la solution fondamentale du problème à valeurs initiales pour l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \Box_\alpha$ dans $H_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{R}_+$. A cause de l'invariance de $\Box_\alpha$ par $H_n \times \mathbb{R}$, k_t^α est un noyau de convolution. Le noyau $q_t^{(i)}$ vérifie l'équation de la chaleur pour le problème (i) dans $H_n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ aux valeurs initiales 0 et corrige les valeurs au bord de $h_t^{(i)}$ pour que la condition au bord soit vérifiée.

Pour trouver la formule de k_t^α, on peut employer la transformée de Fourier dans le groupe $H_n \times \mathbb{R}$ ou bien on peut le déduire du noyau que Gaveau [G] a trouvé dans un problème lié à celui-ci dans H_n.

Avec ces méthodes on trouve la formule

$$(2.8) \qquad k_t^\alpha(z,u,\rho) = \frac{e^{-\rho^2/2t}}{2^{3/2}(\pi t)^{n+3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\operatorname{sh}\tau}\right)^n \exp\left(-\frac{i\tau u}{t} - \frac{|z|^2\tau}{t\operatorname{th}\tau} - \frac{\tau^2}{2t} - \alpha\tau\right) d\tau \ .$$

Dès qu'on a cette formule, pour vérifier que k_t^α est la solution fondalentale les étapes les plus importantes sont :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \text{des estimées} \\ \text{(ii)} & \displaystyle\int_{\mathbb{C}^{n+1}} k_t^\alpha = 1 \\ \text{(iii)} & \text{Si } \mathcal{V} \text{ est un voisinage de } 0, \\ & \displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{C}^{n+1}-\mathcal{V}} |k_t^\alpha| = 0 \ . \end{cases}$$

Les estimées dans (2.9)(i) doivent être assez bonnes pour pouvoir prendre les dérivé sous le signe intégrale dans (2.8) pour vérifier que k_t^α résout l'équation de la chaleur et ensuite pour prendre les dérivées dans l'intégrale de convolution. La propriété (2.9)(iii) dit que pour t petit, k_t^α est concentré auprès de l'origine. Avec les propriétés (2.9), on vérifie que k_t^α est la solution fondamentale exactement comme on le fait pour le noyau gaussien dans le cas euclidien.

Maintenant, la méthode de réflexion par rapport au bord que nous avons déjà employée dans le cas du demi-espace euclidien, nous donne que

$$q_t^{(1)}(z,u,\rho,\sigma) = - k_t^n(z,u,\rho+\sigma)$$

donc

$$(2.10) \qquad h_t^{(1)}(z,u,\rho,\sigma) = k_t^n(z,u,\rho-\sigma) - k_t^n(z,u,\rho+\sigma).$$

Le travail difficile est de trouver le noyau $q_t^{(2)}$. Nous employons la méthode de réduction au bord. Nous cherchons un noyau $q_t^{(2)}$ qui vérifie l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}_+^{2n+2} \times \mathbb{R}_+$ avec valeur initiale O et qui vérifie aussi

(2.11) $$\bar{Z}_{n+1}\, q_t^{(2)}\big|_{\rho=0} = -\bar{Z}_{n+1}\, k_t^{n-2}\big|_{\rho=0} .$$

Désignons par J l'opérateur de Poisson pour $\frac{\partial}{\partial t} + \Box_{n-2}$, donc si $g(z,u,t) \in C^0(H_n \times \mathbb{R}_+) \cap L^\infty(H_n \times [0,T])$ pour tout T, $(Jg)(z,u,\rho,t)$ vérifie

(2.12)
$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad (\frac{\partial}{\partial t} + \Box_{n-2}) Jg = 0 \\ &\text{(ii)} \quad \lim_{t \to 0} Jg = 0 \qquad \text{dans } H_n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ &\text{(iii)} \quad \lim_{\rho \to 0} Jg = g . \end{aligned}$$

Puisque $\Box_{n-2}$ est la somme d'un opérateur sur H_n indépendant de ρ et de $-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$, on a , comme dans le cas euclidien, que J est donné par convolution dans les variables de H_n et de temps par

(2.13) $$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \rho} k_t^{n-2} & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 . \end{cases}$$

Puisque Z_{n+1} et $\Box_{n-2}$ commutent, par (2.12)(i),(ii) on a que $Z_{n+1}Jg$ vérifie l'équation de la chaleur avec valeur initiale O. Remarquons que

$$\bar{Z}_{n+1} Z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) ,$$

donc

(2.14) $$\bar{Z}_{n+1} Z_{n+1} J = (\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{n-2}) J$$

où

(2.15) $$\mathcal{L}_{n-2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (Z_k \bar{Z}_k + \bar{Z}_k Z_k) + i(n-2) \frac{\partial}{\partial u} .$$

Puisqu'il n'y a pas de ρ dans $\mathcal{L}_{n-2}$, par (2.12) (iii) et (2.14), nous obtenons

$$(2.16) \qquad \lim_{\rho \to 0} \bar{Z}_{n+1} Z_{n+1} J = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{n-2} .$$

Désignons par A l'inverse à droite de $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{n-2}$, s'il existe. Alors, d'après (2.16)

$$\lim_{\rho \to 0} \bar{Z}_{n+1} (Z_{n+1} J A) = \text{Identité}.$$

Donc, pour $q_t^{(2)}$ nous devrons prendre

$$(2.17) \qquad q_t^{(2)} = - Z_{n+1} J A ((\bar{Z}_{n+1} k_t^{n-2})|_{\rho = 0}) .$$

D'après le principe de Duhamel, A est l'opérateur de convolution sur $H_n \times \mathbb{R}$ avec la solution fondamentale r_t^{n-2} de $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{n-2}$ si cette solution existe. Quand $n > 1$, d'après le travail de Gaveau [G] (voir aussi [S1])on a pour $t > 0$

$$r_t^{n-2}(z,u) = \frac{1}{2(\pi t)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\operatorname{sh} \tau}\right)^n \exp\left(- \frac{i\tau u}{t} - \frac{|z|^2\tau}{t \operatorname{th} \tau} - (n-2)\tau\right) d\tau .$$

On peut vérifier toutes ces choses pour voir que $q_t^{(2)}$ est le noyau qu'on cherche quand $n > 1$. Mais, puisqu'on connaît tous les noyaux dans (2.17), on peut les composer à l'aide des propriétés de semi-groupes [S1] et après des manipulations de la formule [S2] on trouve que

$$(2.18) \qquad q_t^{(2)}(z,u,\rho,\sigma) = k_t^{n-2} (z,u, \rho + \sigma) + q_t^{(3)}(z,u, \rho + \sigma)$$

où

$$(2.19) \qquad q_t^{(3)}(z,u,\rho) = - \frac{1}{t^{n+2}\, \pi^{n+3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^{n+1}}{(\operatorname{sh} \tau)^n} \exp\left(- \frac{i\tau u}{t} - \frac{|z|^2\tau}{t \operatorname{th} \tau} - (n-2)\tau + \frac{\rho\tau}{t}\right)$$
$$\left(\int_{\frac{\rho+\tau}{\sqrt{2t}}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \right) d\tau .$$

Maintenant, $q_t^{(3)}$ est défini même quand $n = 1$. Donc, avec des estimées sur (2.19), on démontre que $q_t^{(2)}$ donné par (2.18) est le noyau qu'il faut pour résoudre e problème (2).

Mettant ensemble (2.6), (2.7), (2.8), (2.18) et (2.19), nous avons enfin que si $f = \Sigma f_j \bar{\omega}^j \in C_o^\infty(\Lambda^{0,1}(D))$,

$$F(z,u,\rho,t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_D \{k_t^{n-2}((w,v)^{-1}(z,u),\rho-\sigma) + k_t^{n-2}((w,v)^{-1}(z,u),\rho+\sigma) + q_t^{(3)}((w,v)^{-1}(z,u),\rho+\sigma)\} f(w,v,\sigma)dV(w,v,\sigma)\right)\bar{\omega}^j$$

$$+ \left(\int_D \{k_t^n((w,v)^{-1}(z,u),\rho-\sigma) - k_t^n((w,v)^{-1}(z,u),\rho+\sigma)\} f_{n+1}(w,v,\sigma)dV(w,v,\sigma)\right) \bar{\omega}^{n+1}$$

est la solution à l'équation de la chaleur pour le problème de $\bar{\partial}$-Neumann (2.4) où dV est la mesure de Lebesgue et $(w,v)^{-1}(z,u)$ est la multiplication dans H_n.

BIBLIOGRAPHIE

[CM] S. S. Chern and J. K. Moser : Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133 (1974), 219-271.

[FK] G. B. Folland and J. J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Ann. of Math. Studies 75, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.

[FS] G. B. Folland and E. M. Stein : Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 429-522.

[Ga] B. Gaveau : Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta. Math. 139 (1977), 95-153.

[Gr] P. C. Greiner : An asymptotic expansion for the heat equation, Arch. Rational Mech. Anal. 41 (1971), 163-218.

[GS] P. C. Greiner and E. M. Stein : Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Mathematical Notes 19, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1977.

[MS] H. P. Mc Kean and I. M. Singer : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, J. Differential Geometry 1 (1967), 43-69.

[M] G. Métivier : Spectral asymptotics for the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Duke Mathematical J. 48 (1981), 779-806.

[LSU] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva : Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translations of Math. monographs, 23, Amer. Math. Soc., Providence , Rhode Island, 1968.

[RS] D. B. Ray and I. M. Singer : R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Advances in Math. 7 (1971), 145-210.

[S1] N. K. Stanton : The heat equation for the $\bar{\partial}$-Neumann problem in a strictly pseudoconvex Siegel domain, J. d'Analyse Math. 38 (1980), 67-112.

[S2] N. K. Stanton : The heat equation for the $\bar{\partial}$-Neumann problem in a strictly pseudoconvex Siegel domain, II, J. d'Analyse Math. 39 (1981) 189-2O2.

*
* *
*