SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Valeurs propres immergées dans le spectre continu d'une surface de Riemann

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. nº 8, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

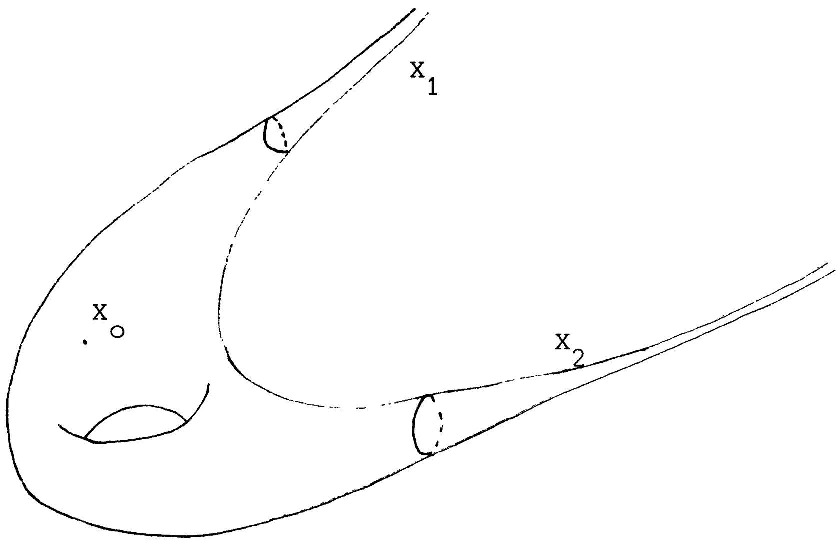
VALEURS PROPRES IMMERGEES DANS LE SPECTRE CONTINU D'UNE SURFACE DE RIEMANN

par Y. COLIN DE VERDIERE

Exposé n° VIII

18 Janvier 1983

On étudie la théorie spectrale du laplacien sur une variété riemannienne complète, non compacte, de volume fini du type suivant : $X = X_o \bigcup_{i=1}^{N} X_i$ où X_o est compacte et X_i est isométrique à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [b_i, +\infty]$ équipé de la métrique hyperbolique $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ $(x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ y \in [b_i, +\infty[)$.



On obtient par exemple de telles variétés à courbure constante -1 en prenant des quotients $X = H/\Gamma$ où H est le demi-plan de Poincaré avec la métrique hyperbolique et Γ est un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$, groupe des isométries de H, agissant de façon proprement discontinu et sans points fixes de façon que aire$(H/\Gamma) < +\infty$. Les fonctions sur X s'identifient alors aux fonctions sur H Γ-périodiques (on dit plutôt automorphes dans ce contexte).

Les résultats que nous décrivons ici se généralisent au cas des quotients de volume fini d'espaces symétriques de rang 1 même à courbure non constante (voir [D] pour une description géométrique des pointes de ces variétés).

La variété X étant complète, il est classique ([G] et aussi [C]) que $\Delta \restriction C_o^\infty(X)$ est essentiellement autoadjoint sur $L^2(X)$: nous noterons Δ_∞ cette extension autoadjointe, Δ désignant le laplacien au sens des distributions.

Rappelons d'abord les résultats classiques ([K] ou [L.P.] sur la théorie spectrale de Δ_∞ : le spectre de Δ_∞ se compose d'un <u>spectre absolument continu</u> $[\frac{1}{4}, +\infty[$ <u>de multiplicité</u> N et d'un <u>spectre discret</u> fini ou infini formé de valeurs propres $0 = \lambda_o < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$, ne s'accumulant (éventuellement) qu'en $+\infty$.

On a le :

Théorème : 1) Si $N(\lambda) = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \leqslant \lambda\}$, alors

$$\limsup_{\lambda \to \infty} (N(\lambda)/\lambda) \leqslant \frac{1}{4\pi} \text{ aire}(X).$$

2) Pour une métrique générique sur X_0 (voir signification précise plus loin), Δ_∞ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres toutes situées dans $[a, \frac{1}{4}[$.

Commentaires : (a) le résultat 1) est démontré par de nombreux auteurs ([L-P] ,[M]) en utilisant assez explicitement les séries d'Eisenstein(description du spectre continu). Donnelly ([D]) donne une démonstration s'appliquant aux espaces localement symétriques à l'aide d'estimations du noyau de l'équation de la chaleur ; nous avons donné dans [CV3] une démonstration s'appuyant sur le principa du minimax et se généralisant au cas localement symétrique.

(b) Dans le cas $X = H/\Gamma$, on a $N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi}$ aire (X) dans beaucoup de cas arithmétiquement intéressants, par exemple $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, cela résulte d'une écriture explicite des séries d' Eisenstein. On ne sait pas si c'est vrai pour tout Γ (conjecture de Roelcke , [V]).

(c) L'étude des valeurs propres inférieures à $\frac{1}{4}$ peut se faire au moyen des méthodes isopérimétriques usuelles sur les variétés compactes ([B]).

Je vais consacrer le reste de cet exposé à esquisser une preuve du résultat 2) en supposant pour simplifier N = 1. Ce résultat et d'autres sont l'objet de l'article [CV 3] .

1. Théorie spectrale de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [b \; +\infty[$ (conditions de Neumann)

En utilisant une séparation des variables évidente

$$f(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(y) e^{2\pi i n x}$$

on peut écrire

$$L^2(X_1, \frac{dxdy}{y^2}) = \widehat{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}} L^2([b,+\infty[\; , \frac{dy}{y^2})$$

et $\Delta_\infty = \widehat{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}} H_n$, où H_n est unitairement équivalent à $-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{4} + 4\pi^2 n^2 e^{2t}$ sur $L^2([\text{Log } b, \infty[, dt)$ avec au point $B = \log b$ la condition aux limites $2f'(B) - f(B) = 0$.

H_0 a donc un spectre continu $[\frac{1}{4}, +\infty[$ de multiplicité 1 alors que les H_n sont à résolvante compacte pour $n \neq 0$; on a même plus : $\widehat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} H_n$ est à résolvante compacte : si $\alpha_n = \inf(\text{spectre } H_n)$, on a $\lim_{|n| \to \infty} \alpha_n = +\infty$.

En utilisant des méthodes du type minimax, on peut montrer :

$$\sum_{n \neq 0} \text{Card } \{\text{val. propres de } H_n \leqslant \lambda\} \sim \frac{\lambda}{4\pi} \text{aire}(X_1).$$

2. <u>Les opérateurs Δ_a de Lax-Phillips</u>

Si f est une fonction sur $X = X_0 \cup X_1$, on note $f_0(y)$ $(y \geqslant b)$ le <u>zéro-ème coefficient de Fourier</u> de f défini par

$$f_0(y) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f^1(x,y)\,dx \quad \text{où} \quad f^1 = f \upharpoonright X_1 .$$

On a alors : si $\lambda_n \geqslant \frac{1}{4}$ est une valeur propre de Δ_∞ associée à une fonction propre φ_n, $\varphi_{n,0}(y) \equiv 0$; en effet on doit avoir

(i) $\int_b^{+\infty} |\varphi_{n,0}(y)|^2 \frac{dy}{y^2} < +\infty$ et

(ii) $(y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_n)\,\varphi_{n,0}(y) = 0$

ce qui est incompatible (voir § 1) sauf si $\varphi_{n,0} \equiv 0$.

Le rôle important joué par le zéro-ème coefficient de Fourier dans ce contexte a amené Lax et Phillips à définir les opérateurs Δ_a : si $a > b$, on pose $\mathcal{H}_a^s = H^s(X) \cap \{f \mid f_0 \upharpoonright [a,+\infty[\equiv 0\}$ et $q_a(f) = \int_X \|df\|^2$, alors la forme q_a de domaine $\mathcal{H}_a^1$ est fermée sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_a^0$. On note Δ_a l'opérateur autoadjoint associé par l'extension de Friedrichs à q_a.

Le domaine de Δ_a est le sous-espace de $\mathcal{H}_a^1$ formé des fonctions f telles que $\Delta f = g + CT_a$ où $g \in L^2(X)$ et $T_a \in \mathcal{D}'(X)$ est définie par $\langle T_a \mid f \rangle = f_o(a)$; on a alors $\Delta_a f = g$.

Théorie spectrale de Δ_a : Il résulte aisément de l'étude du cas du cylindre hyperbolique que Δ_a est à résolvante compacte. On peut classer les valeurs propres de Δ_a en deux types :

Type I : λ_n valeur propre de Δ_∞ telle que la fonction propre associée φ_n vérifie $\varphi_{n,o} \equiv 0$ (c'est le cas de toutes les valeurs propres de Δ_∞ qui sont $\geqslant \frac{1}{4}$)

Type II : $\mu_j(a)$ associée à des fonctions propres φ_j telle que

$$\varphi_{j,o}(a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dy} \varphi_{j,o}(a) \neq 0$$

Les valeurs propres de type II se calcule à partir du zéro-ème coefficient de Fourier des séries d'Eisenstein.

On prouve à partir du cas du cylindre et du principe du minimax que Card {Val. propres de $\Delta_a \leqslant \lambda$ } $\sim \frac{\lambda}{4\pi}$ aire (X), ce qui conduit au résultat I du théorème.

Remarque : Les opérateurs Δ_a permettent une approche aisée de la théorie spectrale de Δ_∞ ; on peut s'en servir pour avoir une preuve rapide du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein([CV1]).

3. Le cas générique

Soit K un compact d'intérieur non vide de X_o et $\mathcal{U} \subset C_o^\infty(K)$ l'ensemble des f telles que le laplacien Δ_∞ pour la métrique $e^f g_o$ n'ait aucune valeur propre $\geqslant \frac{1}{4}$, alors $\mathcal{U}$ est un résiduel au sens de Baire. On note $\Delta_{a,f}$ l'opérateur Δ_a pour la métrique $e^f . g_o$.

Esquisse de la preuve : L'idée est d'appliquer la théorie des perturbations à la famille analytique d'opérateurs $\Delta_{a,tf}$ (si on se place au voisinage de g_o) : on peut ainsi montrer que :

1) génériquement les valeurs propres de $\Delta_{a,f}$ sont simples

2) si λ_o est valeur propre simple de Δ_a de type II, c'est encore vrai pour la valeur propre $\lambda(t)$ de $\Delta_{a,tf}$ pour t petit voisin de O où $\lambda(t)$ est la valeur propre de $\Delta_{a,tf}$ dépendant continument de t telle que $\lambda(O) = \lambda_o$.

Il reste essentiellement à montrer un résultat de densité du genre suivant si λ_o est une valeur propre simple de type I de Δ_a il existe $f \in C_o^\infty(K)$ telle que la valeur propre $\lambda(t)$ de $\Delta_{a,tf}$ soit de type II pour $t \neq O$ petit, autrement dit si $\psi(t)$ est la fonction propre associée :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=o} \psi_o \not\equiv O .$$

Supposons prouvé le :

Lemme : <u>Si</u> $U \subset X_o$ <u>est un ouvert et</u> $\lambda_o > \frac{1}{4}$ <u>donné il existe</u> $h \in D(\Delta_a)$ <u>telle que</u> $h_o \not\equiv O$ <u>et</u> $(\Delta_a - \lambda_o)h \in C_o^\infty(U)$.

Soit $U \subset K$ telle que la fonction propre ψ_o de Δ_a ne s'annule pas sur U et on écrit : $(\Delta_a - \lambda_o)h = f\psi$ où $f \in C_o^\infty(U)$ et h comme dans le lemme précédent ; on obtient :

$$(\Delta_a - \lambda_o)(\dot\psi - h) = \dot\lambda_o \psi ,$$

donc $\dot\lambda_o = O$ et $\dot\psi_o = h_o \not\equiv O$.

<u>Preuve du lemme</u> : On choisit une métrique g_1 telle que support $(g_1 - g_o) \subset U$ et $\lambda_o \notin$ spectre(Δ_{a,g_1}) et pour $z_o \in X_o \cup \{(x,y) \in X_1 | \; y < a\}$ on pose $R(z_o,.) = (\Delta_{a,g_1} - \lambda_o)^{-1}(\delta(z_o))$. Pour $z_o \in X_o$ ou $y(z_o) < y < a$, on a :

$$R(z_o,.)\big|_o(y) = A(z_o)y^{s_o} + B(z_o)y^{1-s_o} \quad (\text{avec } s_o(1-s_o) = \lambda_o)$$

et on vérifie que dans $X_o \cup \{(x,y) \in X_1 | \; y < a\}$, on a :

$$(\Delta_{g_1} - \lambda_o)A = (\Delta_{g_1} - \lambda_o)B = O .$$

Or $A(z_o)y^{s_o} + B(z_o)y^{1-s_o}$ n'est pas nul pour tout z_o car cela impliquerait que pour tout $f \in C_o^\infty(X_o \cup \{(x,y) \in X_1 | y < a\})$ on ait $((\Delta_{a,g_1} - \lambda_o)^{-1}f)_o \equiv O$, ce qui est faux : prendre $k = \varphi(y)$, $\varphi \in C_o^\infty(]b,a[)$ et $f = (\Delta_{g_1} - \lambda_o)k$.

Donc par le principe de prolongement analytique des solutions d'une équation elliptique à coefficients C^∞ , il existe $z_o \in U$ tel que $A(z_o)y^{s_o} + B(z_o)y^{1-s_o} \not\equiv 0$. Soit $\varphi \in C_o^\infty(U)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de z_o on pose $h(z) = (1 - \varphi(z))\, R(z_o,z)$: c'est une solution du problème.

REFERENCES

[B] Büser P. : Proc. Symposia in Pure Mathematics, 36 (1980).

[C] Chernoff : J. of Functional analysis 12, 401-404 (1973).

[CV1] Y. Colin de Verdière : C. R. Acad. Sc. 293 (1981), 361-363.

[CV2] Y. Colin de Verdière : Pseudo-laplaciens I, Ann. Inst. Fourier 32(1982), 275-286.

[CV3] Y. Colin de Verdière : Pseudo-laplaciens II, Ann. Inst. Fourier 33(1983).

[D] Donnelly H. : Comm. P. D. E. 6 (1981), 963-982.

[G] Gaffney : PNAS 1950.

[K] Kubota : Elementary theory of Eisenstein series (1973).

[L.P.] P. D. Lax, R. Phillips : Scattering theory for automorphic functions. Ann. of Math. Studies 87 (1976).

[M] Muller : Preprint, I.H.E.S. (1980).

[V] Venkov : Russian Math. surveys 34 (1976), 79-153.

*
* *