Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Grebert
J. C. Guillot

Le problème spectral inverse pour les systèmes AKNS périodiques sur la droite réelle

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A9_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LE PROBLEME SPECTRAL INVERSE POUR LES SYSTEMES AKNS PERIODIQUES SUR LA DROITE REELLE

B. GREBERT et J.C. GUILLOT

Exposé n°VII

23 Janvier 1990

I Introduction.

On considère l'opérateur suivant sur $\mathbf{R}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $p(.)$ et $q(.)$ sont deux fonctions réelles de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ (resp. $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}), H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$) telles que

$$p(x+1) = p(x) \quad \text{et} \quad q(x+1) = q(x) \ , \ x \in \mathbf{R} \ . \tag{2}$$

H est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{C}^2)$ de domaine $H^1(\mathbf{R}, \mathbf{C}^2)$. Ce système est habituellement appelé AKNS (AKNS pour M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell et H. Segur). On pourrait aussi l'appeler système de Zakharov-Shabat, ou encore système de Dirac (voir [A.K.N.S] et [Zah-Sha]).

On sait que H a un spectre de bandes. Plus précisément le spectre de H est absolument continu et il est constitué par une réunion dénombrable ou finie d'intervalles fermés.

Avant de préciser ce qu'on entend par problème spectral inverse il nous faut décrire la théorie spectrale de H en détail. Ensuite seulement nous décrirons en détail la solution du problème inverse que l'on aborde. On se contentera de donner les résultats principaux. Les détails apparaîtront prochainement dans un rapport du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole polytechnique.

2. Le spectre de l'opérateur AKNS

On notera H_0 l'opérateur H associé à $p(x) = q(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Le spectre de H_0 est $\mathbf{R}$. Le spectre de H ne sera pas borné inférieurement.

Il est bien connu que les extrémités des bandes sont les valeurs propres de restrictions de H à l'intervalle $(0,1)$ associées à des conditions aux limites mixtes convenables. Précisément on doit considérer les deux problèmes aux valeurs propres autoadjoints suivants sur $(0,1)$.

i)
$$(HF)(x, \lambda; p, q) = \lambda F(x, \lambda; p, q)$$
$$F(0, \lambda; p, q) = F(1, \lambda; p, q)$$

(condition aux limites périodique)

ii)
$$(HF)(x, \lambda; p, q) = \lambda F(x, \lambda; p, q)$$
$$F(0, \lambda; p, q) = -F(1, \lambda; p, q)$$

(condition aux limites antipériodique)

Les valeurs propres de i) et ii) sont appelées les valeurs propres périodiques de H. Elles forment une suite croissante $(\lambda_k(p,q))_{k \in \mathbf{Z}}$ de nombres réels, chaque valeur propre étant écrite avec sa multiplicité. La numérotation des valeurs propres est telle que les $\lambda_{2k}(p,q)$ et $\lambda_{2k-1}(p,q)$ avec k pair sont les valeurs propres de i). On peut alors avoir, soit

$\lambda_{2k}(p,q) > \lambda_{2k-1}(p,q)$ et alors λ_{2k} et λ_{2k-1} sont simples, soit $\lambda_{2k}(p,q) = \lambda_{2k-1}(p,q)$ et dans ce cas λ_{2k} est double.

Les $\lambda_{2k}(p,q)$ et $\lambda_{2k-1}(p,q)$ avec k impair sont les valeurs propres de ii) vérifiant les mêmes propriétés que pour i).

Le spectre périodique, c'est à dire la réunion des deux spectres ponctuels associés respectivement à i) et à ii) s'ordonne de telle sorte que l'on ait, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\cdots < \lambda_{-2k-1} \leq \lambda_{-2k} \cdots < \lambda_{-3} \leq \lambda_{-2} < \lambda_{-1} \leq \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \cdots < \lambda_{2k-1} \leq \lambda_{2k} < \cdots \tag{3}$$

Lorsque $p = q = 0$ on a $\lambda_{2k} = \lambda_{2k-1} = k\pi$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Chaque $\lambda_k(\cdot,\cdot)$ est une fonction continue de (p,q). Les bandes, ou les intervalles de stabilité, sont les intervalles $[\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}]$. Les intervalles d'instabilités (gaps en anglais) sont les intervalles $(\lambda_{2-1}, \lambda_{2k})$. Ils se réduisent à un point lorsque $\lambda_{2k} = \lambda_{2k-1}$. Dans ce dernier cas deux bandes ont ce seul point en commun. En particulier deux bandes ne se chevauchent jamais. Pour décrire les intervalles de stabilité et d'instabilité il est bon d'introduire la matrice de Floquet et sa trace.

Soit

$$F_1(x,\lambda;p,q) = \begin{pmatrix} Y_1(x,\lambda;p,q) \\ Z_1(x,\lambda;p,q) \end{pmatrix} \tag{4}$$

la solution de $HF = \lambda F$ sur $[0,1]$ telle que

$$F_1(0,\lambda;p,q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

et

$$F_2(x,\lambda;p,q) = \begin{pmatrix} Y_2(x,\lambda;p,q) \\ Z_2(x,\lambda;p,q) \end{pmatrix} \tag{6}$$

la solution telle que

$$F_2(0,\lambda;p,q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

La matrice de Floquet est alors

$$\begin{pmatrix} Y_1(1,\lambda;p,q) & Y_2(1,\lambda;p,q) \\ Z_1(1,\lambda;p,q) & Z_2(1,\lambda;p,q) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Le discriminant $\Delta(\lambda;p,q)$ est alors

$$\Delta(\lambda;p,q) = Y_1(1,\lambda;p,q) + Z_2(1,\lambda;p,q)$$

On a les propriétés suivantes, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

1. $$|\Delta(\lambda)| < 2 \quad \text{si} \quad \lambda_{2k} < \lambda < \lambda_{2k+1}$$

2. $$|\Delta(\lambda)| > 2 \quad \text{si} \quad \lambda_{2k-1} < \lambda < \lambda_{2k}$$

3. $$\Delta(\lambda_{2k}) = \Delta(\lambda_{2k-1}) = (-1)^k 2$$

Le cas où chacune des valeurs propres périodiques est simple est générique.

3. Le problème spectral inverse

Il y a certainement de nombreuses façons différentes de poser le problème spectral inverse. On entendra, ici, par problème spectral inverse les deux problèmes suivants

Problème 1.

Détermination des ensembles isospectraux.

Soit un couple (p_0, q_0) donné. On pose

$$L(p_0, q_0) = \{(p, q); \lambda_k(p, q) = \lambda_k(p_0, q_0) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

$L(p_0, q_0)$ est l'ensemble de tous les couples (p, q) ayant le même spectre périodique que le couple (p_0, q_0).

Problème 2.

Caractérisation de tous les spectres périodiques possibles.

Quelles conditions doit vérifier la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ pour qu'une telle suite soit le spectre périodique d'au moins un couple (p, q) ?

Le premier problème a été beaucoup étudié dans le cadre de la géométrie algébrique, c'est à dire lorsque le nombre d'intervalles d'instabilité est fini. Notre contribution concerne essentiellement le cas où le nombre d'intervalles d'instabilité n'est pas fini.

Introduisons les espaces suivants

$$\mathcal{H}^0 = L^2_{\mathbf{R}}([0,1]) \times L^2_{\mathbf{R}}([0,1])$$

$$\mathcal{H}^1 = \{(p, q) \in H^1_{\mathbf{R}}([0,1]) \times H^1_{\mathbf{R}}([0,1]); p(0) = p(1) \quad \text{et} \quad q(0) = q(1)\}$$

$$\mathcal{H}^2 = \{(p, q) \in H^2_{\mathbf{R}}([0,1]) \times H^2_{\mathbf{R}}([0,1]); p(0) = p(1), p'(0) = p'(1), q(0) = q(1) \text{ et } q'(0) = q'(1)\}$$

On identifiera les potentiels de $\mathcal{H}^0$ (resp. $\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2$) avec leur prolongement par périodicité sur $\mathbf{R}$.

Soit $(p_0, q_0) \in H^1$. A tout intervalle d'instabilité ouvert $(\lambda_{2k-1}(p_0, q_0), \lambda_{2k}(p_0, q_0))$ on associe le cercle centré au point $\frac{\lambda_{2k+1}+\lambda_{2k}}{2}$ et de rayon $\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{2}$. On montre alors que $L(p_0, q_0)$, comme sous ensemble de $\mathcal{H}^1$, est homéomorphe au produit de tous les cercles associés aux intervalles d'instabilité ouverts où chaque cercle est paramétrisé à l'aide de l'un des spectres auxiliaires introduits ci-dessous. De plus si $(p_0, q_0) \in \mathcal{H}^2$ alors $L(p_0, q_0)$ est contenu dans $\mathcal{H}^2$. Ainsi a-t'on le théorème suivant

Théorème 1.—

$L(p_0, q_0)$ est un tore compact.

On ne connait pas encore une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ soit le spectre périodique d'au moins un couple (p, q). Récemment J. Garnett et E. Trubowitz (voir [Gar-Tru 1] et [Gar-Tru 2]) ont clairement montré dans le cas de l'opérateur de Schrödinger la grande rigidité qui sous-tend ce problème. Leur point de vue est de considérer la suite des longueurs des intervalles d'instabilité et de mettre à jour des contraintes sur le spectre périodique. C'est le point de vue que nous adopterons ici. Dans leur premier article J. Garnett et E. Trubowitz ont utilisé la théorie des mesures harmoniques alors que dans le second ils ont suivi une approche analogue à celle utilisée par J. Pöschel et E. Trubowitz (voir [Pö-Tru]) dans leur livre consacré au problème spectral inverse pour l'opérateur de Schrödinger sur [0,1] avec la condition de Dirichlet. Nous suivrons et développerons la seonde approche pour les systèmes AKNS. Elle utilise essentiellement l'analyse fonctionnelle non linéaire dans $L^2_{\mathbf{R}}([0,1])$. On pourrait certainement affaiblir les hypothèses de l'un de nos théorèmes en utilisant l'approche de [Gar-Tru 1] et on pourrait aussi étendre nos résultats à des potentiels périodiques p et q localement dans $H^k_{loc}(\mathbf{R})$ pour tout entier $k > 2$.

Pour une autre approche de la caractérisation du spectre périodique voir ([Mar. Ost.1,2] et [Mis. 1,2]).

Pour paramétriser les ensembles isospectraux et pour caractériser tous les spectres périodiques possibles la seule donnée du spectre périodique ne suffit pas. Il est nécessaire d'introduire d'autres spectres. Chacun d'entre eux est associé à la restriction de H à $(0,1)$ et à une condition de Dirichlet.

Pour tout x dans $[0,1]$ et pour p et q dans $\mathcal{H}^0$, $F_1(x,\cdot;p,q)$ est une fonction entière de λ. Les zéros de $Z_1(1,\cdot;p,q)$ dans $\mathbf{C}$ forment une suite de nombre réels strictement croissante $(\mu_k(p,q))_{k\in\mathbf{Z}}$. Cette suite est le spectre de l'opérateur autoadjoint dans $L^2([0,1],\mathbf{C}^2)$ associé à H et à la condition de Dirichlet $Z(0;p,q) = Z(1;p,q) = 0$.

Pour obtenir les deux autres spectres auxiliaires nécessaires on commence par remarquer que la transformation J suivante :

$$J(p,q) = (-q,p)$$

est isospectrale.

On introduit alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$\tilde{\mu}_k(p,q) = \mu_k(J(p,q)) = \mu_k(-q,p)$$
$$\nu_k(p,q) = \mu_k(J^2(p,q)) = \mu_k(-p,-q)$$

Les ν_k sont les zéros dans $\mathbf{C}$ de la fonction entière $Y_2(1,\cdot;p,q)$ et $(\nu_k(p,q))_{k\in\mathbf{Z}}$ est le spectre de l'opérateur autoadjoint associé à la restriction de H à $(0,1)$ et à la condition de Dirichlet $Y(0;p,q) = Y(1;p,q) = 0$.

Il est fondamental de remarquer que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$\lambda_{2k-1}(p,q) \leq \mu_k(p,q), \tilde{\mu}_k(p,q), \nu_k(p,q) \leq \lambda_{2k}(p,q)$$

Soit $\gamma_k(p,q) = \lambda_{2k}(p,q) - \lambda_{2k-1}(p,q)$ la longueur du kième intervalle d'instabilité.

Soit E^0(resp.E^1, E^2) l'ensemble des potentiels (p,q) de $\mathcal{H}^0$(resp.$\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2$) tels que $p(\cdot)$ soit impair et $q(\cdot)$ pair. Alors la restriction de $\gamma_k(\cdot\ ,\ \cdot)$ à E^0 (resp. E^1, E^2) est donnée par

$$\gamma_k(p,q) = |\mu_k(p,q) - \nu_k(p,q)| \qquad (p,q) \in E^0$$

En fait il est préférable de poser

$$\sigma_k(p,q) = \mu_k(p,q) - \nu_k(p,q)\ ,\ (p,q) \in E^0$$

et de considérer la suite des $\sigma_k(.,\ .)$:

$$\sigma(p,q) = (\sigma_k(p,q))_{k\in\mathbf{Z}}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.—

(i) σ *est une application réelle analytique de* $E^0(\text{resp.}E^1, E^2)$ *dans* $\ell^2(\mathbf{Z})$ *(resp.* $\ell_1^2(\mathbf{Z}), \ell_2^2(\mathbf{Z}))$.

(ii) $d_{(p,q)}\sigma$ *est un isomorphisme de* $E^0(\text{resp.}E^1, E^2)$ *sur* $\ell^2(\mathbf{Z})$ *(resp.* $\ell_1^2(\mathbf{Z}), \ell_2^2(\mathbf{Z}))$.

(iii) σ *est injective sur* E^0 *et est une application réelle bianalytique de* E^0 *sur un ouvert de* $\ell^2(\mathbf{Z})$.

(iv) σ *est surjective de* $E^1(\text{resp.}E^2)$ *sur* $\ell_1^2(\mathbf{Z})$ *(resp.* $\ell_2^2(\mathbf{Z}))$ *et c'est une application réelle bianalytique de* $E^1(\text{resp.}E^2)$ *sur* $\ell_1^2(\mathbf{Z})$ *(resp.*$\ell_2^2(\mathbf{Z}))$.

De (iv) du théorème précédent on en déduit immédiatement que l'application $(p,q) \mapsto (\gamma_k(p,q))_{k\in\mathbf{Z}}$ est surjective. Plus précisément on a le résultat suivant :

Théorème 3.— *Soit* $(\gamma_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in (\ell_1^2(\mathbf{Z}))^+$ *(resp.* $(\ell_2^2(\mathbf{Z}))^+$*) il existe alors* $(p_0, q_0) \in E^1(\text{resp.}E^2)$ *tels que* $\gamma_k(p_0, q_0) = \gamma_k$ *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$.

Evidemment tout couple $(p,q) \in L(p_0, q_0)$ va vérifier la même propriété à savoir $\gamma_k(p,q) = \gamma_k$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Le théorème suivant nous affirme que ce sont les seuls.

Théorème 4.— *Soit* $(\gamma_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in (\ell_1^2(\mathbf{Z}))^+$ *(resp.* $(\ell_2^2(\mathbf{Z}))^+$*). Soit* $(p_0, q_0) \in E^1$ *(resp.* E^2*) tel que* $\gamma_k(p_0, q_0) = \gamma_k$ *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$. *Alors* $\{(p,q) \in \mathcal{H}^1(\text{resp.}\mathcal{H}^2) \ ; \ \gamma_k(p,q) = \gamma_k, k \in \mathbf{Z}\} = L(p_0, q_0)$.

Remarque : Le théorème 4 montre bien le type de rigidité rencontré dans ce probleme inverse périodique. Une fois la suite des intervalles d'instabilité donnée, le spectre périodique est complètement déterminé. Ainsi, si on considère une suite d'intervalles d'instabilité appartenant à $\ell_1^2, (\mathbf{Z})^+$, une fois leur numérotation fixée, nous n'avons plus la liberté de les placer a notre gré sur $\mathbf{R}$, tout en respectant l'ordre dans lequel on doit les considérer, de telle sorte que l'on puisse interpréter le complémentaire de ces intervalles comme le spectre de l'opérateur H associé à un couple (p,q) de potentiels périodiques. Ainsi le théorème 4 affirme qu'il n'y a qu'une seule manière de les placer sur $\mathbf{R}$ de telle sorte que l'interprétation précédente soit valable.

La démonstration du théorème 4 dépend de la description des ensembles isospectraux. Le théorème 2 est central et c'est de lui dont dépend en fait la caractérisation des spectres périodiques.

Le calcul des comportements asymptotiques de $\mu_k(p,q)$ et de $\nu_k(p,q)$ pour $|k|$ grand est très important et doit être poussé de plus en plus loin au fur et à mesure que p et q sont plus réguliers. Ils permettent de montrer que $\sigma(p,q) \in \ell^2(\mathbf{Z})$ (resp. $\ell_1^2(\mathbf{Z}), \ell_2^2(\mathbf{Z}))$ pour (p,q) dans $\mathcal{H}^0$ (resp. $\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2$). Pour tout $k \in \mathbf{Z}$ on montre que les applications $(p,q) \mapsto \mu_k(p,q)$ et $(p,q) \mapsto \nu_k(p,q)$ sont réelles analytiques. En utilisant le théorème de Rouché on montre alors comme dans [Pö-Tru] que $(p,q) \mapsto \sigma(p,q)$ est réelle analytique sur $E^0(\text{resp.}E^1, E^2)$ dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ (resp. $\ell_1^2(\mathbf{Z}), \ell_2^2(\mathbf{Z}))$.

L'un des points importants du théorème 3 est ii). La démonstration en est longue.

On a

$$d_{(p,q)}\sigma((v_1, v_2)) = \{(\nabla_{(p,q)}\mu_k - \nabla_{(p,q)}\nu_k, (v_1, v_2))_{(L^2([0,1]))^2}\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

où $(v_1, v_2) \in E^0$. $\nabla_{(p,q)}\mu_k$ et $\nabla_{(p,q)}\nu_k$ sont des éléments de E^0.

$\{\nabla_{p,q}\mu_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base de Riesz de E^0 image par un isomorphisme de la base orthonormale $(-\sin 2k\pi x, \cos 2k\pi x)_{k\in\mathbf{Z}}$ de E^0.

Ainsi

$$\nabla_{(p,q)}\mu_k - \nabla_{(p,q)}\nu_k = \sum_{k'\in\mathbf{Z}} \alpha_{k'}\nabla_{(p,q)}\mu_{k'}$$

Or il est possible de construire une famille duale de la base de Riesz $\{\nabla_{(p,q)}\mu_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ famille qu'on notera $\{A_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ et telle que

$$(\nabla_{(p,q)}\mu_k, A_{k'})_{L^2([0,1])^2} = \delta_{kk'}$$

Ainsi

$$\alpha_{k'} = (\nabla_{(p,q)}\mu_k - \nabla_{(p,q)}\nu_k, A_{k'})$$

On a donc

$$\nabla_{(p,q)}\mu_k - \nabla_{(p,q)}\nu_k = \sum_{k'\in\mathbf{Z}}(\delta_{kk'} - (\nabla_{(p,q)}\nu_k, A_{k'}))\nabla_{(p,q)}\mu_{k'}$$

Il suffit donc de montrer que l'opérateur linéaire de $\ell^2(\mathbf{Z})$ dans lui même suivant :

$$B = (\delta_{kk'} - (\nabla_{(p,q)}\nu_k, A_{k'}))_{kk'}$$

est bijectif.

On montre facilement que B est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Il suffit donc de montrer que B est injectif ou surjectif. C'est un processus assez long utilisant la représentation des solutions entières par des produits infinis ainsi qu'un raisonnement par l'absurde. Les détails se trouveront dans le rapport.

La démonstration de l'injectivité de σ est basée sur ce qu'on appelle les formules de trace. Pour $(p,q) \in \mathcal{H}^1(\text{resp.}\mathcal{H}^2)$ on a

$$p(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\lambda_{2k} + \lambda_{2k-1} - 2\tilde{\mu}_k(T_x p, T_x q))$$

$$q(x) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\lambda_{2k} + \lambda_{2k-1} - 2\mu_k(T_x p, T_x q))$$

où $(T_x u)(t) = u(x+t)$ et où les séries convergent dans $C^0([0,1])$ (resp. $C^1([0,1])$).

Définissons alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{E}^n = \{(p,q) \in E^0; \sigma_k(p,q) = 0 \quad \text{pour} \quad |k| > n\}$$

Si $(p,q) \in \mathcal{E}^n$ alors $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont des potentiels C^∞. Comme σ est un isomorphisme local $\mathcal{E}^n$ est une sous variété analytique réelle de E^0 de dimension $2n+1$. Pour tout entier n σ est une application réelle bianalytique de $\mathcal{E}^n$ sur $\mathbf{R}^{2n+1}$. En effet, $\sigma(\mathcal{E}^n)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^{2n+1}$ car σ est un homéomorphisme local. En utilisant les formules de trace et un argument d'analyse fonctionnelle on montre que $\sigma(\mathcal{E}^n)$ est aussi fermé. Ainsi σ est surjective sur $\mathbf{R}^{2n+1}$. On montre également que σ est injective sur $\mathcal{E}^n$. On en déduit que σ est injective sur E^0 (voir [Gar-Tru 2]).

Le renforcement de l'hypothèse sur (p,q) est nécessaire pour démontrer la surjectivité car, à partir des formules de trace, la démonstration utilise la construction d'une suite bornée de E^0 (voir [Gar-Tru 2]) en établissant une estimation à priori qu'on ne sait pas améliorer. L'approche de [Gar-Tru 1] permettrait d'éviter le renforcement de l'hypothèse sur (p,q) mais au prix d'une bien plus longue démonstration.

On peut donner l'idée de la démonstration du théorème 4 (voir [Ka])

Définissons

$$L(p_0,q_0) = \{(p,q) \in E^1; \lambda_k(p,q) = \lambda_k(p_0,q_0) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

et

$$I(p_0,q_0) = \{(p,q) \in E^1; \gamma_k(p,q) = \gamma_k(p_0,q_0) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

Evidemment

$$L(p_0,q_0) \subset I(p_0,q_0)$$

De plus

$$I(p_0,q_0) = \bigcup_{(p,q)\in I(p_0,q_0)} L(p,q)$$

La description des ensembles isospectraux montre qu'il existe $(p_{\max},q_{\max}) \in L(p,q)$ tels que $\lambda_{2k}(p,q) = \mu_k(p_{\max},q_{\max}) = \lambda_{2k}(p_{\max},q_{\max})$. Mais alors on montre que $\nu_k(p_{\max},q_{\max}) = \lambda_{2k-1}(p,q) = \lambda_{2k-1}(p_{\max},q_{\max})$

Il existe aussi $(p_{0\max},q_{0\max}) \in L(p_0,q_0)$ tels que

$$\lambda_{2k}(p_0,q_0) = \mu_k(p_{0\max},q_{0\max})$$

$$\lambda_{2k-1}(p_0,q_0) = \nu_k(p_{0\max},q_{0\max})$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

En particulier $\sigma_k(p_{\max},q_{\max}) = \gamma_k(p,q) = \gamma_k(p_0,q_0) = \sigma_k(p_{0\max},q_{0\max})$ et comme σ est injective on a

$$(p_{\max},q_{\max}) = (p_{0\max},q_{0\max})$$

Ainsi $L(p,q) = L(p_0,q_0)$ et $I(p_0,q_0) \subset L(p_0,q_0)$.

En conclusion on a $I(p_0,q_0) = L(p_0,q_0)$ C.Q.F.D.

Une des conséquences de tout ce qui précède est une nouvelle démonstration du théorème dit de Marchenko qui a été démontré pour la première fois par Misyura [Mis-2] :

Théorème 5.— *L'ensemble des potentiels pour lesquels il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles d'instabilité est dense dans $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1$ et $\mathcal{H}^2$ pour les topologies respectives.*

Les formules de trace ont la conséquence immédiate suivante qui généralise un théorème dû à Borg

Théorème 6.— *Supposons que* $\lambda_{2k}(p,q) = \lambda_{2k-1}(p,q)$ *pour* $(p,q) \in E'$ *et tout* $k \in \mathbf{Z}$. *Alors* $p(x) = q(x) = 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

Enfin on est capable de décrire l'ensemble de tous les potentiels p et q n'ayant qu'un seul intervalle d'instabilité ouvert $\gamma_0 = \gamma > 0$.

Théorème 7.— *L'ensemble des potentiels* p *et* q *tels que*

$$\gamma_k(p,q) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad k \neq 0 \quad \textit{et} \quad \gamma_0(p,q) = \gamma > 0$$

est l'ensemble des potentiels constants :

$$p(x) = p \quad \textit{et} \quad q(x) = q \quad \textit{pour tout} \quad x \in [0,1]$$

vérifiant

$$p^2 + q^2 = \frac{\gamma^2}{4}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= -\lambda_{-1} = (p^2 + q^2)^{1/2} \\
\lambda_{2k} &= \lambda_{2k-1} = (k^2\pi^2 + p^2 + q^2)^{1/2} \\
\lambda_{-2k} &= \lambda_{-2k-1} = -(k^2\pi^2 + p^2 + q^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

où $k > 0$.

Très récemment dans le cas particulier où $q(x) = m$, m constante, F. Gesztesy, W. Schweiger et B. Simon ont donné des exemples de potentiels s'exprimant à l'aide de fonctions de Weierstrass pour lesquels l'opérateur H a trois intervalles d'instabilité (voir [Gesz, Schw, Sim]). Les intervalles d'instabilité ainsi que le spectre périodique restent symétriques par rapport à l'origine.

Références

[A.K.N.S] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell et H. Segur. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. Stud. Appl. Math. **53**, (1974), p.249-315

[Gar-Tru 1] J. Garnett et E. Trubowitz. Gaps and bands of one dimensional periodic Schrödinger operators. Comment. Math. Helvetici, **59**, (1984), p.258-312.

[Gar-Tru 2] J. Garnett et E. Trubowitz. Gaps and bands of one dimensional periodic Schrödinger operators II. Comm. Math. Helvetici **62**, (1987), p.18-37.

[Ge-Sch-Si] Commutation methods applied to the $mKdV$-equation. Publication du département de Mathématiques, Université du Missouri, Columbia (1990).

[Ka] Th. Kappeler. On the periodic spectrum of the one dimensional Schrödinger equation. Comm. Math. Helvetici **65**, (1990), p.1-3.

[Mar-Ost 1] V.A. Marchenko and I.V. Ostrovsky. A characterisation of the spectrum of Hill's operator. Math. USSR. Sbornik, **97**, (1975), p.493-554.

[Mar-Ost 2] V.A. Marchenko and I.V. Ostrovsky. Approximation of periodic by finite-zone potentials. Selecta Math. Sovietici **6**, (1987), p. 101-106.

[Mis 1] T.V. Misyura. Properties of the spectra of periodic and antiperiodic boundary value problems generated by Dirac operators I, II (in Russian) Teor. Funktsü Funktsional Anal. i Prilozhen **30**, (1978), p.90-101 ; **31**, (1979), p.102-109.

[Mis 2] T.V. Misyura. Finite zone Dirac operators (in Russian). Teor. Funktsü Funktsional Anal. i Prilozhen **33**, (1980), p. 107-111.

[Pö-Tru] J. Pöschel et E. Trubowitz. Inverse Spectral Theory. Academic Press (1987).

[Zah-Sha] V. Zakharov et A. Shabat, A scheme for integrating nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. Func. Anal. and Appl. **8**, (1974), p.226-235.

B. GREBERT
Université Paris-Nord
et
C.M.A.P., Ecole Polytechnique

J.C.GUILLOT
Université Paris-Nord
et
C.M.A.P., Ecole Polytechnique

ERRATUM

page VII-9 ligne 7 lire :

[Ge-Sch-Si] F. Gesztesy, W. Schweiger et B. Simon. Commutation methods applied to the $mKdV$-equation. Publication du départment de Mathématiques, Université du Missouri, Columbia (1990).

au lieu de :

[Ge-Sch-Si] Commutation methods applied to the $mKdV$-equation. Publication du département de Mathématiques, Université du Missouri, Columbia (1990).