V. M. PETKOV

Pôles de la matrice de diffusion pour des perturbations captives

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 15, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A15_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

POLES DE LA MATRICE DE DIFFUSION POUR DES PERTURBATIONS CAPTIVES

V.M. PETKOV

Exposé n° XV

23 Avril 1991

1. Introduction.

Soit $L = -c^2(x)\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{jk}(x)\partial_{x_k})$ un opérateur dans $\mathbf{R}^n, n \geq 3$ n impair. On suppose que les coefficients $a_{jk}(x), c(x)$ satisfont les hypothèses :

$$(H_1) \qquad \left[\begin{array}{l} a_{jk}(x), c(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \\ a_{jk}(x) = a_{kj}(x), c(x) \geq c_0 > 0 \ , \ \forall x \in \mathbf{R}^n, \\ \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \delta_0|\xi|^2 \ , \ \forall x \in \mathbf{R}^n \ , \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \\ \text{avec } \delta_0 > 0, \end{array}\right.$$

$$(H_2) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{Il existe } \rho_0 > 0 \text{ tel que} \\ c(x) = 1, a_{jk}(x) = \delta_{jk}, \quad \text{pour} \quad |x| \geq \rho_0, \\ \delta_{jk} \quad \text{étant les symboles de Kronecker.} \end{array}\right.$$

Posons $L_0 = -\Delta$ et considérons les problèmes de Cauchy pour les opérateurs $(\partial_t^2 + L_0)$ et $(\partial_t^2 + L)$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n$. Soit $H_D(\mathbf{R}^n)$ le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ par rapport à la norme

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$$

et soit $H = H_D(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ l'espace énergétique. On introduit dans H deux groupes unitaires $U_0(t), U(t)$ associés respectivement aux problèmes de Cauchy pour $\partial_t^2 + L_0$ et $\partial_t^2 + L$. On peut construire une théorie de diffusion liée aux groupes $U_0(t)$ et $U(t)$ et on introduit la matrice de diffusion

$$S(\lambda) \ : L^2(\mathbf{R}^{n-1}) \to L^2(\mathbf{R}^{n-1}), \lambda \in \mathbf{R}$$

comme une fonction à valeurs des opérateurs unitaires (cf. [1], [6]). La fonction $S(\lambda)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec des pôles z_j dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} :$ Im $z > 0\}$. De plus, $S(\lambda) = \mathrm{Id} + K(\lambda)$, où $K(\lambda)$ est un opérateur nucléaire et cela rend possible l'introduction de la phase de diffusion

$$s(\lambda) = -i \log \det S(\lambda) \ , \ s(0) \in [0, 2\pi[\ .$$

Dans cet exposé on se propose d'examiner l'existence de pôles $\{z_j\}$ tels que

$$\lim_{j\to\infty} |z_j - \lambda_j| = 0 \ , \tag{1}$$

où $\{\lambda_j\}$ est une suite de nombre réels.

D'autre part, l'existence de pôles $\{z_j\}$ ayant la propriété (1) implique une croissance de la dérivée $|\frac{ds}{d\lambda}(\lambda_j)|$ quand $|\lambda_j| \to \infty$.

Nous nous intéressons aux problèmes suivants :

(I) Soit $p \in \mathbf{N}$. Trouver une suite $\{z_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ de pôles et une suite de nombres réels $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ telles que

$$|z_j - \lambda_j| \leq C_p |z_j|^{-p} \ , \ \forall j \in \mathbf{N} \tag{2}$$

avec une constante $C_\rho > 0$ indépendante de j.

(II) Soit $m \in \mathbf{N}, m \geq n$. Trouver une suite $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbf{N}}, |\lambda_j| \to \infty$, telle que

$$|\frac{ds}{d\lambda}(\lambda_j)| \geq C(1 + |\lambda_j|)^m, \forall j \in \mathbf{N}$$

avec $C > 0$ indépendante de j.

(III) Trouver une asymptotique de type de Weyl avec deux termes pour la phase de diffusion $s(\lambda)$ quand $|\lambda| \to \infty$.

Les problèmes (I)-(III) sont liés et pour qu'on ait (2) il faut que la mesure de l'ensemble de points périodiques par rapport au flot Hamiltonien de L soit positive. En effet, nous donnerons une précision sur la conjecture de Ralston [12] qui a suggéré que l'existence des trajectoires périodiques stables implique l'existence de pôles z_j pour lesquels on a (1). Les résultats concernant l'apparition de pôles z_j tels que Im $z_j \to 0$ ont été obtenus par Ralston [12], Ikawa [5] pour des perturbations captives.

D'autre part, Gérard, Martinez et Robert [3] ont examiné la croissance exponentielle de la dérivée de la phase de diffusion $\frac{ds_h(\lambda)}{d\lambda}$ pour l'opérateur de Schrödinger $-h^2\Delta + V(x)$.

2. Annonce de résultats.

Soit $\ell(x,\xi) = c^2(x)\sum_{j,k} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k$ le symbole principal de L et soit $\ell_s(x,\xi)$ le symbole sous-principal de L. On introduit l'ensemble

$$\sum = \{(x,\xi) \in T^*(\mathbf{R}) \ : \ell(x,\xi) = 1\}$$

et on considère sur Σ les trajectoires du flot Hamiltonien ϕ^t de $\ell(x,\varepsilon)$. On dit que $\nu \in \Sigma$ est périodique avec période T si $\phi^T(\nu) = \nu$. On désigne par Π_T l'ensemble de points périodiques ayant période T et on pose $\Pi = \cup_{t>0}\Pi_t$. Etant donné $\nu \in \Sigma$, considérons la trajectoire périodique

$$\delta(\nu) = \{(x(\sigma\ ;\nu), \xi(\sigma\ ;\nu)) \in \mathbf{R}^{2n}\ ; 0 \le \sigma \le T(\nu)\},$$

où $T(\nu)$ est la période primitive de $\delta(\nu)$). Posons

$$q_s(\nu) = \int_0^{T(\nu)} \ell_s(x(\sigma\ ;\nu), \xi(\sigma\ ;\nu))d\sigma\ .$$

Soit $q_c(\nu) \in \mathbf{Z}$ l'indice de Maslov de la trajectoire périodique $\delta(\nu)$ et soit

$$q(\nu) = \frac{\pi}{2}q_c(\nu) - q_s(\nu)\ .$$

Etant donné $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $[\lambda]_{2\pi}$ le residium de λ modulo 2π, déterminé par

$$-\pi < [\lambda]_{2\pi} \le \pi$$

$$\lambda = [\lambda]_{2\pi} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbf{Z}\ .$$

Finalement, introduisons la fonction

$$Q(\lambda) = (2\pi)^{-n}\int_\Pi \frac{[\pi - \lambda T(\nu) - q(\nu)]_{2\pi}}{T(\nu)}d\nu\ .$$

Il est facile de voir que pour tout $\nu \in \Pi$ nous avons $T(\nu) \ge \delta_1 > 0$ et cela implique

$$|Q(\lambda)| \le C_1\ ,\ \forall\lambda \in \mathbf{R}\ .$$

La fonction $Q(\lambda)$ a été introduite par Safarov [15] (cf. aussi [4]). Afin d'annoncer une formule de Weyl pour $s(\lambda)$, introduisons la constante

$$c_0 = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\int_{\mathbf{R}^n} \{[\det(c^2(x)a_{jk}(x))]^{-1/2} - 1\}dx\ .$$

Dans le théorème suivant on obtient une formule de Weyl pour la phase de diffusion $s(\lambda)$.

Théorème 1.— *Pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$Q(\lambda - \varepsilon)\lambda^{n-1} - C_0\varepsilon\lambda^{n-1} - o(\lambda^{n-1}) \leq s(\lambda) - c_0\lambda^n$$
$$\leq Q(\lambda + \varepsilon)\lambda^{n-1} + C_0\varepsilon\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}) \ . \tag{3}$$

où la constante $C_0 > 0$ ne dépend pas de ε et λ.

Remarques :

1) Dans le cas où mes $\Pi = 0$ on obtient une asymptotique avec un reste de type $o(\lambda^{n-1})$. Dans ce cas le résultat a été obtenu par d'autres méthodes par Robert [13], [14]. Il a traité aussi le cas général avec un reste de type $0(\lambda^{n-1})$.

2) Pour des métriques non-captives une formule pour la phase de diffusion a été démontrée par Majda et Ralston [7]. On renvoie à [9] pour des résultats concernant la phase de diffusion associée à l'opérateur de diffusion pour des obstacles.

Il est facile de voir que la fonction $Q(\lambda)$ est continue à gauche et à droite. De plus, si on pose

$$\Omega_\lambda = \{\nu \in \Pi \ : \lambda T(\nu) + q(\nu) = 0 \bmod (2\pi)\},$$

on obtient

$$Q(\lambda + 0) - Q(\lambda - 0) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\Omega_\lambda} T^{-1}(\nu) d\nu \ .$$

La continuité de la fonction $Q(\lambda)$ sur $\mathbf{R}$ joue un rôle crucial pour l'existence de pôles z_k tels que Im $z_k \to 0$.

Théorème 2.— *Soit $p \in \mathbf{N}$. Supposons qu'il existe $\xi > 0$ et deux suites $\lambda_k \nearrow \infty$ et $\varepsilon_k \searrow 0$ telles qu'on a*

$$Q(\lambda_k + \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}) - Q(\lambda_k - \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}) \geq \xi \quad pour \quad \forall k \in \mathbf{N} \ . \tag{4}$$

Alors pour toute constante $C > 0$ il existe $k_0(C)$ et des pôles $\{z_k\}$ tels que

$$|z_k - \lambda_k| \leq C|z_k|^{-p} \quad pour \quad k \geq k_0(C). \tag{5}$$

De plus, si $p \geq n$ il existe k_1 et C' tels que

$$|\frac{ds}{d\lambda}(\mathrm{Re}\ z_k)| \geq C'(1 + |z_k|)^p \ , \forall k \geq k_1. \tag{6}$$

Corollaire 3.— *Supposons qu'il existe $\xi > 0$ et une suite $\lambda_k \nearrow \infty$ tel que*

$$Q(\lambda_k + 0) - Q(\lambda_k - 0) \geq \xi \quad pour\ tout \quad k \in \mathbf{N} \ . \tag{7}$$

Alors la condition (4) est satisfaite pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Dans l'exemple suivant l'hypothèse (7) est satisfaite même si on examine seulement une partie des trajectoires périodiques.

Exemple 4 : Soit $n = 3$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < r_0 < r_1 < \rho_0$ tels que

$$a_{jk}(x) = \delta_{jk} \ , c(x) = \alpha|x| \quad \text{pour} \quad r_0 \leq |x| \leq r_1 .$$

Soit $S_\sigma = \{x \in \mathbf{R}^n \ : |x| = \sigma\}, r_0 \leq \sigma \leq r_1$.

Posons

$$\Sigma_{0,1} = \{(x,\xi) \in \Sigma \ : r_0 \leq |x| \leq r_1, \Sigma_k x_k \xi_k = 0\}.$$

Alors pour tout $\nu \in \Sigma_{0,1}$ nous avons une trajectoire périodique de H_q ayant période $T(\nu) = \frac{2\pi}{\alpha}$. En effet, si $\{t(\sigma), x(\sigma), -1, \xi(\sigma)\}$ est une trajectoire périodique, on trouve

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\dot{x}_k(\sigma)}{\dot{t}(\sigma)} = \alpha^2 r^2 \xi_k \quad \text{avec} \quad r = \text{const}$$

$$\text{et} \quad |\frac{dx}{dt}| = \alpha r \quad \text{implique}$$

$$\alpha r T(\nu) = \int_0^{T(\nu)} |\frac{dx}{dt}| dt = 2\pi r \ .$$

D'autre part, nous avons $q_s(\nu) = 0$, $q_c(\nu) = -2$ pour $\nu \in \Sigma_{0,1}$ puisque $\Sigma_k x_k(\sigma)\xi_k(\sigma) = 0$. Alors $q(\nu) = -\pi$ et on considère la suite

$$\lambda_k = \alpha(k + \frac{1}{2}), k \in \mathbf{Z}$$

pour laquelle $\lambda_k \frac{2\pi}{\alpha} - \pi = 0 \pmod{2\pi}$. On obtient

$$\Omega_{\lambda_k} \supseteq \Sigma_{0,1} \ , \ \mu_\Sigma(\Omega_{\lambda_k}) \geq \mu_0 > 0$$

et

$$Q(\lambda_k + 0) - Q(\lambda_k - 0) \geq \mu_0 (\frac{2\pi}{\alpha})^{-1} = \xi > 0 \ ,$$

où μ_Σ est la mesure induite sur Σ. De telle manière, pour tout $p \in \mathbf{N}$ et $C_p > 0$ il existe des pôles $\{z_k\}$ tels que

$$|z_k - \alpha(k + \frac{1}{2})| \leq C_p |z_k|^{-p} \ , \ \forall k \ .$$

On peut comparer cet exemple avec celui de Ralston [12], où la métrique est radiale.

3. Idée de la démonstration du théorème 1.

Pour simplifier la description des idées on va supposer que $c(x) \equiv 1$. Alors l'opérateur L admet une extension auto-adjoint dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ qu'on note aussi par L. On commence par une formule de trace obtenue dans [1]. Pour chaque fonction $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ on a

$$2tr \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(\cos t\sqrt{L} - \cos t\sqrt{L_0})dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\frac{ds}{d\lambda}(\chi)dx \ , \tag{8}$$

où $\hat{\varphi}(\lambda)$ est la transformation de Fourier de $\varphi(t)$. En suivant les arguments de Melrose [8] on peut montrer que pour toute fonction $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ on a

$$2tr \int_0^{\infty} \varphi(t)(\cos t\sqrt{L} - \cos t\sqrt{L_0})dt = \Sigma_j \hat{\varphi}(-z_j) \ , \tag{9}$$

où $\hat{\varphi}(z)$ est la transformation de Laplace et la sommation est sur tous les pôles z_j en les répétant en suivant leur multiplicité. Comme en [9] on introduit la distribution

$$\xi(t) = \begin{cases} \Sigma_j e^{iz_j t} \ , \ t > 0 \ , \\ \Sigma_j e^{i\bar{z}_j t} \ , \ t < 0 \ . \end{cases}$$

Soit $N(R) = \sharp\{j : |z_j| \leq R\}$ la fonction de comptage de nombre de pôles dans le disque $|z| \leq R$. Récemment, Vodev [19] et Sjöstrand et Zworski [17], [18] ont obtenu une estimation optimale pour la fonction $N(R)$ dans la forme

$$N(R) \leq C_0 R^n + C_1 \ , \ \forall R > 0 \ . \tag{10}$$

Alors en combinant (8) et (9) on déduit la représentation

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) = \Sigma_j \frac{2 \ \mathrm{Im} \ z_j}{(\mathrm{Re} \ z_j - \lambda)^2 + (\mathrm{Im} \ z_j)^2} \ ,$$

où la sommation est sur tous les pôles z_j calculés avec leur multiplicité et la série est convergente au sens de distributions. Cette forme de $\frac{ds}{d\lambda}$ pour des obstacles bornés a été proposée par Melrose [9].

Soit $\zeta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction telle que $\zeta(t) = 1$ pour $|t| \leq 2$, $\zeta(t) = 0$ pour $|t| \geq 3$. Introduisons la fonction $s_1(\lambda)$ par

$$\frac{ds_1}{d\lambda}(\lambda) = \Sigma_j \zeta(\frac{|z_j|}{\lambda}) \frac{2 \ \mathrm{Im} \ z_j}{(\mathrm{Re} \ z_j - \lambda)^2 + (\mathrm{Im} \ z_j)^2} \ , s_1(0) = 0 \tag{11}$$

et on pose $s_2(\lambda) = s(\lambda) - s_1(\lambda)$. Il est facile de voir que $s_2(\lambda)$ est un symbole dans l'espace $S^n(\mathbf{R})$ et

$$|\frac{ds_2}{d\lambda}(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|)^{n-1}.$$

Soit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ une fonction ayant les propriétés suivantes :

$$\rho(\tau) = \rho(-\tau)\ ,\ \rho(\tau) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad \tau \in \mathbf{R}\ .$$

$$\rho(\tau) > 0 \quad \text{pour} \quad |\tau| \leq 1\ , \hat{\rho}(0) = 1\ .$$

$$\hat{\rho}(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \text{supp}\ \hat{\rho}(t) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

où $0 < \varepsilon_0 < \delta_1$ est assez petit et $\hat{\rho}(t)$ désigne la transformation de Fourier.

Posons $\rho_\delta(\tau) = \frac{1}{\delta}\rho(\frac{\tau}{\delta}), 0 < \delta \leq 1$. Rappelons un théorème taubérien démontré par Safarov [15].

Théorème 5 [15].— *Soit $e(\chi)$ une fonction croissante telle que $|e(\lambda)| \leq C|\lambda|^M$. Soit $e_\delta(\lambda) = (e * \rho_\delta)(\lambda)$. Supposons que $e_1'(\lambda) \leq C_1(1+|\lambda|)^{n-1}$. Alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et tout $0 < \delta \leq 1$ on a*

$$\begin{aligned} e_\delta(\lambda - \varepsilon) - C_0\varepsilon^{-1}\delta|\lambda|^{n-1} - C_0' &\leq e(\lambda) \\ &\leq e_\delta(\lambda + \varepsilon) + C_0\varepsilon^{-1}\delta|\lambda|^{n-1} + C_0' \end{aligned} \tag{12}$$

avec des constantes C_0, C_0' qui ne dépendent pas de ε et δ.

Afin d'appliquer ce théorème pour la fonction $s_1(\lambda)$ on estime

$$|e_1'(\lambda)| \leq |(\frac{ds}{d\lambda} * \rho)(x)| + |(\frac{ds_2}{d\lambda} * \rho)(\lambda)| \leq C(1+|\lambda|)^{n-1}\ .$$

Après on utilise la formule (8) avec $\varphi(t) = \hat{\rho}(t)e^{i\lambda t}$ et on obtient l'asymptotique

$$(\frac{ds}{d\lambda} * \rho)(\lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^{n-1-2k} \tag{13}$$

avec $d_0 = \frac{n}{2}c_0$. Pour la fonction $s_2(\lambda)$ par un calcul direct on déduit pour $0 < \delta < \varepsilon$ les estimations

$$\begin{aligned} (s_2 * \rho_\delta)(\lambda - \varepsilon) - C_2'\varepsilon|\lambda|^{n-1} &\leq s_2(\lambda) \\ &\leq (s_2 * \rho_\delta)(\lambda + \varepsilon) + C_2'\varepsilon|\lambda|^{n-1}. \end{aligned}$$

Soit $E(t, x, y)$ la solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + L_x)E(t, x, y) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^{n+1}, \\ E(0, x, y) = 0\ . \partial_t E(0, x, y) = \delta(x - y) \end{cases}$$

et soit $E_0(t, x, y)$ la solution du même problème avec L_0 à la place de L. Alors

$$(\frac{ds}{d\lambda} * \rho_\delta)(\lambda) = 2tr\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(\delta t)e^{i\lambda t}(\cos t\sqrt{L} - \cos t\sqrt{L_0})dt$$

$$= 2 \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} [\partial_t E(t,x,x) - \partial_t E_0(t,x,x)] dt dx \ . \tag{14}$$

Soit $\phi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que supp $\phi \subset (-\delta_1, \delta_1), \phi(t) = 1$ pour $|t| \leq \frac{\delta_1}{2}$. L'étude de (14) avec $\hat{\rho}(\delta t)$ remplacée par $\phi(t)\hat{\rho}(\delta\theta)$ ne pose pas de problèmes. D'autre part, notons que $E_0(t,x,x) = 0$ pour $t \neq 0$. L'intégration sur $\mathbf{R}^n$ par rapport à x dans (14) engendre des difficultés quand $\delta \to 0$ puisque le support de $\hat{\rho}(\delta t)$ est inclus dans $(-\varepsilon_0/\delta \ , \ \varepsilon_0/\delta)$. Pour cela on va utiliser une formule de trace pour des fonctions $\psi(t)$ ayant support dans $\mathbf{R}^+$. Soit $h_0(t,x,y)$ la solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x) h_0(t,x,y) = E_0(t,x,y), \\ \quad \text{supp } h_0 \subset \{(t,x,y) \ : t \geq 0\}, \end{cases}$$

où on prolonge $E_0(t,x,y)$ et $E(t,x,y)$ comme 0 pour $t < 0$. Soit $Q = L - L_0$.

Théorème 6.— *Pour chaque fonction $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ on a*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) \partial_t E(t,x,x) dt \ dx$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) \partial_t E(s,x,z) Q_x Q_z h_0(t-s,z,x) dx \ dz \ , \tag{15}$$

où l'intégration est interprétée au sens de distributions.

Soit $\alpha_1(x) \ , \ \alpha_2(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ deux fonctions telles que $\alpha_1(x) = 1$ pour $|x| \leq \rho_0 + 1$, $\alpha_1(x) = 0$ pour $|x| \geq \rho_0 + 2$ et $\alpha_2(x) = 1$ sur supp $\alpha_1(x)$. Notons $\nu_\delta(\lambda)$ la transformation de Fourier de

$$Y(t)(1 - \phi(t))\hat{\rho}(\delta t)$$

On applique (15) avec $\varphi(t) = e^{i\lambda^t}(1 - \phi(t))\hat{\rho}(\delta t)$ et on obtient

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (1 - \varphi(t)) \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \partial_t E(t,x,x) dt \ dx$$

$$= (2\pi)^{-1} \int \int dx dz \alpha_2(x) \alpha_1(z) \int d\mu \nu_\delta(\lambda - \mu) \int e^{-i\mu t} \partial_t E(t,x,z) dt$$

$$. Q_x Q_z \int e^{-i\mu s} h_0(s,z,x) ds \ . \tag{16}$$

On écrit

$$Q_x Q_z = (L_x - \mu^2 + \Delta_x + \mu^2)(L_z - \mu^2 + \Delta_z + \mu^2)$$

et on remarque que

$$(\Delta_x + \mu^2) \int e^{-i\mu s} h_0(s,z,x) ds = \int e^{-i\mu s} E_0(s,z,x) ds \ , \tag{17}$$

$$(L_x - \mu^2) \int e^{-i\mu t} \partial_t E(t,x,z)dt = i\mu\delta(x-z), \tag{18}$$

où les intégrales sont interprétés au sens de distributions.

On voit facilement que les singularités des distributions

$$\int e^{-i\mu s} h_0(s,z,x)ds \ , \ \int e^{-i\mu s} E_0(s,z,x)ds$$

sont inclus dans le diagonal

$$\{(x,z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ : x = z\} \ .$$

En profitant de (17), (18) on observe que si dans (16) on remplace Q_x par l'opérateur $(L_x - \mu^2)$, on obtient des termes qu'on peut estimer par $\mathcal{O}(|\lambda|^{-M})$ pour tout $M \in \mathbf{N}$ uniformément par rapport à $\delta \in (0,1)$. L'opérateur $(\Delta_x + \mu^2)(\Delta_z + \mu^2)$ donne le terme

$$I_\delta^+(\lambda) = \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (1-\phi(t))\hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \alpha_1^2(x) \partial_t E(t,x,x) dt \ dx \ , \tag{18}$$

où l'intégration par rapport à x est sur un compact qui contient les trajectoires périodiques de H_ℓ. Afin de traiter l'opérateur $(\Delta_x + \mu^2)(L_z - \mu^2)$ on fait une intégration par parties dans l'intégral par rapport à z et on exploite (17). De telle façon, modulo des termes négligibles, on obtient des intégrales

$$\sum_{1 \le |\gamma| \le 2} \int_{\mathbf{R}^n} dx \int_{\rho_0 + 1 \le |z| \le \rho_0 + 2} dz \alpha_2(x) \partial_z^\gamma \alpha_1(z) \int d\mu \nu_\delta(\lambda - \mu) \ .$$

$$P_{2-\gamma} \int e^{-i\mu t} \partial_t E(t,x,z) dt \int e^{-i\mu s} E_0(s,z,x) ds \ , \tag{19}$$

où $P_{2-\gamma}$ sont des opérateurs différentiels par rapport à z d'ordre $2 - |\gamma|$. On examine (19) en construisant une paramétrix de $E(t,x,z)$. On obtient une intégrale oscillant ayant des points critiques qui sont hors du domaine de l'intégration.

On répète le même argument pour les fonctions $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^-)$ et on se ramène à l'étude de l'intégrale

$$I_\delta(x) = \int_{-\infty}^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (1-\phi(t))\hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \alpha_1^2(x) \partial_t E(t,x,x) dt \ dx \ .$$

L'asymptotique de $I_\delta(\lambda)$ est liée avec les périodes des trajectoires périodiques de ϕ^t. On dit qu'un point $\nu \in \Pi_t$ est absolument périodique si les graphes de ϕ^t et de l'identité sont tangent d'ordre infini en (ν, ν). Posons $\Pi^a = \cup_{t>0} \Pi_t^a$, où $\Pi_t^a \subset \Pi_t$ désigne l'ensemble de points absolument périodiques ayant période t. Alors on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.— *On a*

$$\int\int(1-\phi(t))\hat{\rho}(\delta t)e^{i\lambda t}\partial_t E(t,x,x)dt\ dx$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\Pi^a}\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\rho}(k\delta T(\nu))\cos(k(\lambda T(\nu)+q(\nu)))d\nu\lambda^{n-1}$$

$$+o(\lambda^{n-1})\ ,\ |\lambda|\to\infty\ , \tag{20}$$

où $o(\lambda^{n-1})$ *ne dépend pas de* $\delta\in(0,1)$.

Pour démontrer cette proposition comme dans [4], [15] on construit une paramétrix globale pour $E(t,x,y)$ et on utilise le fait que $\mu_\Sigma(\Pi)=\mu_\Sigma(\Pi^a)$, μ_Σ étant la mesure induite sur Σ. Cela permet de calculer les singularités associées aux périodes de trajectoires absolument périodiques. Pour terminer la démonstration du théorème 1 on utilise (12), (13) et (20) et l'argument de Safarov [15].

Remarque 8. Pour la phase de diffusion associée à l'équation des ondes dans l'extérieur d'un obstacle compact K ayant frontière C^∞ on peut obtenir le même résultat que celui du théorème 1. Pour cela il faut considérer les trajectoires périodiques et réfléchissants correspondant au flot généralisé de $\partial_t^2-\Delta_x$ dans $\mathbf{R}^n\setminus K$. D'autre part, dans le cas générique nous avons mes $\Pi=0$ (cf. [10]).

4. Démonstration du théorème 2.

Supposons qu'il existe $\xi>0$ et deux suites $\lambda_k\nearrow\infty$ et $\varepsilon_k\searrow 0$ telles qu'on a (4). D'après (3) on trouve

$$s(\lambda_k+\frac{2\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}})-s(\lambda_k-\frac{2\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}})\geq$$

$$\geq\left[Q(\lambda_k+\frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}})-Q(\lambda_k-\frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}})\right]\lambda_k^{n-1}$$

$$-C_2\varepsilon_k\lambda_k^{n-1}-C_3\delta_2\lambda_k^{n-1}\geq\frac{\xi}{2}\lambda_k^{n-1} \tag{21}$$

si on prend δ_2 assez petit et $k\geq k_0$,

Maintenant, supposons qu'il existe $C_0>0$ telle que pour tout δ , $|\delta|\leq 1$, tous les pôles z_j et k_1 fixé on a $\lambda_{k_1}\geq 1$ et

$$\left(\mathrm{Re}\ z_j-(\lambda_{k_1}+\frac{2\delta\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}})\right)^2+(\mathrm{Im}\ z_j)^2\geq C_0|z_j|^{-2p}.$$

Alors

$$\left|\frac{ds_1}{d\lambda}(\lambda_{k_1}+\frac{2\delta\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}})\right| \leq \Sigma_j \zeta\left(\frac{|z_j|}{\lambda_{k_1}+\frac{2\delta\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}}}\right)|z_j|^p$$

$$\leq C_1\lambda_{k_1}^{n+p} \ , \ \forall\delta \ , |\delta| \leq 1 \ ,$$

où la constante C_1 ne dépend pas de k_1. Pour $k_1 \geq k_0$ nous avons avec une autre constante C_1' l'estimation

$$\left|s(\lambda_{k_1}+\frac{2\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}}) - s(\lambda_{k_1}-\frac{2\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}})\right|$$

$$\leq 4C_1'\varepsilon_{k_1}\lambda_{k_1}^{n-1} \ .$$

Prenant $k_1 \geq k_0$ assez grand on obtient une contradiction avec (21). De telle manière, on trouve $k_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq k_2$ il existe au moins un pôle z_k pour lequel

$$\left|z_k - (\lambda_k + \frac{2\delta_k\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}})\right|^2 \leq C_0|z_k|^{-2p}$$

avec $|\delta_k| \leq 1$. On en déduit

$$\lim_{k\to\infty}(z_k - \lambda_k) = 0 \ .$$

Alors il existe $k_3 \in \mathbf{N}$ tel que pour $k \geq k_3$ on a

$$|z_k - \lambda_k|^2 \leq 4C_0|z_k|^{-2p} \ .$$

Pour la démonstration de (6) on applique l'argument de [11].

Bibliographie :

[1] C. Bardos, J.C. Guillot et J. Ralston, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné, Comm. in P.D.E., 7 (1982), 905-958.

[2] V. Buslaev, Scaterring plane waves, spectral asymptotics and trace formulas in exterior problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 197 (1971), 999-1002.

[3] C. Gérard, A. Martinez, D. Robert, Breit-Wigner formulas for the scattering phase and total scattering cross-section in the semi-classical limit, Commun. Math. Phys., 121 (1989), 323-336.

[4] T.E. Gurejev, Yu. Safarov, Precise asymptotics of the spectrum for the Laplace operator on manifolds with periodic geodesics, LOMI preprint E-1-86, Leningrad and Trans. MIAN URSS, 179.

[5] M. Ikawa, Trapping obstacles with a sequence of poles converging to the real axis, Osaka J. Math., 22 (1985), 657-689.

[6] P. Lax, R. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, 1967.

[7] A. Majda and J. Ralston, An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains, II, Duke Math. J. 45 (1978), 513-536 and III, 46 (1979), 725-731.

[8] R. Melrose, Polynomial bound on the number of scattering poles, J. Funct. Anal., 53 (1983), 287-303.

[9] R. Melrose, Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering, Comm. PDE, 13 (1988), 1431-1439.

[10] V. Petkov, L. Stoyanov, On the number of periodic reflecting rays in generic domains, Erg. Th. Dynam. Systems, 8 (1988), 81-91.

[11] V. Petkov, Phase de diffusion pour des perturbations captives, Conférence Saint-Jean-de-Monts, 1990, Société Mathématique de France.

[12] J. Ralston, Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering matrix, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 571-582.

[13] D. Robert, Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel, Asymptotic Analysis 3 (1991), 301-320.

[14] D. Robert, Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du Laplcien. preprint, Août 1990.

[15] Yu Safarov, Asymptotic of the spectrum of pseudo-differential operator with periodic bicharacteristics, Trans. Sci. Seminar LOMI, 152 (1986), 94-104 (In Russian).

[16] Yu Safarov, Exact asymptotics of the spectrum of a boundary value problem and periodic billiards Izv AN SSSR, Ser. Mat. 52 (1988), 1230-1251. Math. USSR Izvestiya 33 (1989), 553-573.

[17] J. Sjöstrand, Estimations sur les résonances pour le Laplacien avec une perturbation à support compact, Séminaire EDP, Ecole Polytechnique, 1990-1991.

[18] J. Sjöstrand, M. Zworski, Complex scaling and the distribution of scattering poles, preprint.

[19] G. Vodev, Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles for metric perturbations of the Laplacian in $\mathbf{R}^n, n \geq 3$ odd, preprint 1990.

V. Petkov

Département de Mathématiques

Université de Bordeaux I

33405 TALENCE