H. Isozaki

La structure de la matrice S pour le problème à trois corps

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 19, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A19_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LA STRUCTURE DE LA MATRICE S POUR LE PROBLEME A TROIS CORPS

H. ISOZAKI

Exposé n° XIX

28 Mai 1991

On considère le mouvement de trois particules quantiques. Supposons que dans le passé deux de ces particules forment un état lié, noté par (1,2), et que le troisième progresse vers cette paire. Après la collision, il y aura lieu cinq phénomènes de diffusion :

$$(1,2)+(3) \Rightarrow \begin{cases} (a)\ (1,2)+(3) & \cdots \text{ le procédé élastique} \\ (b)\ (1,2)^* + (3)_* & \\ (c)\ (1,2)' + (3) & \\ (d)\ (1,3)+(2) & \\ (e)\ (1)+(2)+(3) & \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \cdots \text{ les procédés inélastiques}$$

(a) correspond au cas où il n'y a aucun changement avec la collision. Dans (b), l'état lié change d'énergie, et dans (c) le niveau d'énergie de l'état lié ne change pas mais cette paire prend un état différent (cela a lieu lorsque la valeur propre est dégénérée). (d) est le procédé de réarrangement. Finalement, (e) correspond au cas où les trois corps bougent librement après la collision. Les quatre premiers procédés sont traités essentiellement de la même manière que pour le problème à deux corps. L'objet de cet exposé est d'étudier la structure de la matrice S correspondant à (e).

I - ENONCES DES RESULTATS

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons trois particules ayant la position x^i et la masse m_i. Pour une paire $\alpha = (i,j)$, on pose

$$x^\alpha = \sqrt{2m_\alpha}(x^i - x^j),\ x_\alpha = \sqrt{2n_\alpha}(x^k - \frac{m_i x^i + m_j x^j}{m_i + m_j}),$$

$$\frac{1}{m_\alpha} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}, \qquad \frac{1}{n_\alpha} = \frac{1}{m_i + m_j} + \frac{1}{m_k}.$$

Soit $X = \{(x^1, x^2, x^3)\ ;\ \sum_{i=1}^{3} m_i x^i = 0\}$. Alors, dans $L^2(X)$, l'opérateur de Schrödinger pour le problème à trois corps est décrit par

$$H = H_0 + \sum_\alpha V_\alpha(x^\alpha), \qquad H_0 = -\Delta_{x^\alpha} - \Delta_{x_\alpha}.$$

Supposons que le potentiel V_α satisfasse l'hypothèse suivante :

$(H)_\rho$ V_α est une fonction réelle, régulière, et en plus il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$|\partial_y^m V_\alpha(y)| \leq C_m(1+|y|)^{-\rho-m}(m = 0,1,2,\cdots).$$

Si $\rho > 1$, les opérateurs d'ondes existent :

$$W_0^\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0},$$
$$W_\alpha^\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_\alpha} J_\alpha$$

où $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$, J_α est l'injection définie par

$$(J_\alpha f)(x^\alpha, x_\alpha) = \varphi^\alpha(x^\alpha) f(x_\alpha), \qquad \forall f \in L^2(\mathbf{R}^3),$$

φ^α étant la fonction propre normalisée de $h^\alpha = -\Delta_{x^\alpha} + V_\alpha(x^\alpha)$ avec la valeur propre $E^\alpha < 0$.

Nous introduisons l'opérateur de diffusion défini par

$$S_{0\alpha} = (W_0^+)^* W_\alpha^-$$

On considère la transformation de Fourier de $S_{0\alpha}$. Posons

$$(\mathcal{F}_0(\lambda) f)(\theta) = (2\pi)^{-3}\ 2^{-1/2} \lambda \int_{\mathbf{R}^6} e^{-i\sqrt{\lambda}\theta\cdot x} f(x) dx,$$

et

$$(\mathcal{F}_0 f)(\lambda, \theta) = (\mathcal{F}_0(\lambda) f)(\theta).$$

Alors, J_0 est unitaire de $L^2(\mathbf{R}^6)$ dans $L^2((0,\infty)\,; L^2(S^5))$. On pose aussi

$$(\mathcal{F}_{0\alpha}(\lambda) f)(\omega) = (2\pi)^{-3/2}\ 2^{-1/2} (\lambda - E^\alpha)^{1/4} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\sqrt{\lambda - E^\alpha}\omega\cdot x} f(x) dx,$$

et

$$(\mathcal{F}_{0\alpha} f)(\lambda, \omega) = (\mathcal{F}_{0\alpha}(\lambda) f)(\omega).$$

Alors, $\mathcal{F}_{0\alpha}$ est unitaire de $L^2(\mathbf{R}^3)$ dans $L^2((E^\alpha,\infty)\,; L^2(S^2))$.

On pose

$$\widehat{S}_{0\alpha} = \mathcal{F}_0 S_{0\alpha} \mathcal{F}_{0\alpha}^*.$$

alors, pour tout $\lambda > 0$, on peut définir l'opérateur

$$\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda) \in \mathbf{B}(L^2(S^2)\,; L^2(S^5))$$

tel que

$$(\widehat{S}_{0\alpha} f)(\lambda, \theta) = (\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda) f(\lambda, \cdot))(\theta) \qquad \forall f \in L^2((E^\alpha, \infty)\,; L^2(S^2)).$$

Cet opérateur $\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda)$ est appelé la matrice S. On s'intéresse aux propriétés du noyau de $\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda)$. Soient

$$X_\beta = \{x \in X\,; x^\beta = 0\},$$
$$M = S^5 \setminus \bigcup_\beta X_\beta,$$
$$\text{et } N = S^5 \cap (\bigcup_\beta X_\beta)$$

Le résultat principal est alors le suivant.

Théorème 1.—

(1) Supposons que $\rho > 3$. Alors, en dehors de $N, \widehat{S}_{0\alpha}(\lambda)$ a un noyau $\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\,;\theta,\omega)$ qui est continu :

$$\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\,;\theta,\omega) \in C^0((0,\infty)\times M \times S^2).$$

(2) Supposons que $\rho > 5+1/2$. On décompose $\theta \in S^5$ comme $\theta = (\theta^\beta, \theta_\beta)$ en accord avec le choix des coordonnées de Jacobi. Alors on a

$$\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\,;\theta,\omega) \sim |\theta^\beta|^{-1} A_{\beta,-1}(\lambda\,; \frac{\theta^\beta}{|\theta^\beta|}, \theta_\beta, \omega)$$
$$+A_{\beta,0}(\lambda\,; \frac{\theta^\beta}{|\theta^\beta|}, \theta_\beta, \omega)$$

lorsque $\theta^\beta \to 0$, où

$$A_{\beta,-1}(\lambda\,; \frac{\theta^\beta}{|\theta^\beta|}, \theta_\beta, \omega)$$
$$= \sum_j^{\text{finie}} C_{\beta 1}^{(j)}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega) \times \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\theta^\beta}{|\theta^\beta|}\cdot x^\beta V_\beta(x^\beta) u_\beta^{(j)}(x^\beta)dx^\beta$$
$$+C_{\beta 2}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega) \times \int_{\mathbf{R}^3} V_\beta(x^\beta)\psi_\beta(x^\beta)dx^\beta,$$

$U_\beta^{(j)}$ étant la fonction propre de $h^\beta = -\Delta_{x^\beta} + V_\beta(x^\beta)$ avec la valeur propre zéro et ψ_β étant la zéro-résonance de $h^\beta.A_{\beta,-1} = 0$ si zéro n'est pas valeur propre de h^β ni zéro-résonance. Dans ce cas là, $\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\,;\theta,\omega)$ est continue au voisinage de $N \cap X_\beta$.

Remarquons que la zéro-résonance est la solution de l'équation de Schrödinger

$$h^\beta\psi_\beta = 0$$

qui se comporte comme

$$\psi_\beta(x^\beta) \sim \frac{c}{|x^\beta|} \qquad c \neq 0, \qquad \text{lorsque } |x^\beta| \to \infty.$$

Intéressons-nous maintenant aux coefficients $C_{\beta 1}^{(j)}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega)$ et $C_{\beta 2}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega)$ apparaissant dans le théorème 1.

Théorème 2.— *$C_{\beta 1}^{(j)}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega)$ et $C_{\beta 2}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega)$ sont des amplitudes de diffusion de 2-cluster à 2-cluster.*

Plus précisément, $C_{\beta 1}^{(j)}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega)$ et $C_{\beta 2}(\lambda\,;\theta_\beta,\omega)$ représentent des amplitudes de diffusion (à des constantes multiplicatives près) qui correspondent aux procédés dans lesquels, après la collision, la paire β devient l'état lié d'énergie zéro pour $C_{\beta 1}^{(j)}$ et la zéro-résonance pour $C_{\beta 2}$.

Notre deuxième but est de relier la matrice S au comportement asymptotique de la fonction propre généralisée de H. Rappelons d'abord le cas de deux corps. La fonction propre généralisée $\varphi(x,\xi)$ de $-\Delta+V$ dans $\mathbf{R}^n$ s'écrit

$$\varphi(x,\xi)=e^{ix\xi}+v,$$

$$v=v(x,\xi)=-(-\Delta+V-|\xi|^2-i0)^{-1}(V(x)e^{ix\xi}).$$

Le premier terme, $e^{ix\xi}$, représente l'onde incidente, et la deuxième, v, l'onde de diffusion. Alors, on trouve l'amplitude de diffusion $A(\lambda\,;\theta,\omega)=\widehat{S}(\lambda\,;\theta,\omega)-\delta(\theta-\omega)$ de la manière suivante :

$$v(x,\sqrt{\lambda}\omega)\sim C(\lambda)\Gamma^{-(n-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}\Gamma}A(\lambda\,;\theta,\omega),$$

$$\theta=x/|x|,\qquad \Gamma=|x|\to\infty.$$

Dans le cas du problème à trois corps, la fonction propre généralisée est donnée par

$$\varphi(x,\lambda,\omega)=e^{i\sqrt{\lambda-E^\alpha}\omega\cdot x_\alpha}\varphi^\alpha(x^\alpha)+v,$$

$$v=-R(\lambda+i0)f, R(Z)=(H-Z)^{-1},$$

$$f=\sum_{\delta\neq\alpha}V_\delta(x^\delta)\varphi^\alpha(x^\alpha)e^{i\sqrt{\lambda-E^\alpha}\omega\cdot x_\alpha}.$$

Comme le cas des deux corps, on retrouve la matrice S à l'aide de v.

Téorème 3.— *Supposons que $\rho>3$. Alors on a*

$$s-\lim_{\Gamma\to\infty}\ r^{5/2}e^{-i\sqrt{\lambda}r}v(r\cdot)=C_1(\lambda)\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\,;\cdot,\omega)$$

dans $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$.

Le comportement asymptotique de v au voisinage de N est compliqué. On introduit l'opérateur pseudo-différentiel P de symbole $p(x,\xi_\beta)$ tel que

$$p(x,\xi_\beta)=\chi_\beta(x)\psi(|\xi_\beta|^2)\varphi_+\left(\frac{x_\beta}{|x_\beta|}\cdot\frac{\xi_\beta}{|\xi_\beta|}\right),$$

où $\chi_\beta(x)=1$ si $|x^\beta|/|x|<\varepsilon_1, \chi_\beta(x)=0$ si $|x^\beta|/|x|>2\varepsilon_1$, ou $|x|<1, \psi(t)=1$ si $|t-\lambda|<\varepsilon_2, \psi(t)=0$ si $|t-\lambda|>2\varepsilon_2$, $\varphi_+(t)=1$ si $t>1-\varepsilon_3$, $\varphi_+(t)=0$ si $t<1-2\varepsilon_3, \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ étant des petites constantes positives telles que $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ soit assez petit.

On introduit aussi $\varphi(t)$ telle que $\varphi(t) = 1$ si $1 < t < 2$, $\varphi(t) = 0$ si $t < 1/2$ ou $t > 3$. Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 3 au sens de la moyenne.

Théorème 4.— *Supposons que $\varphi > 5 + 1/2$. Alors on a*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{\mathbf{R}^6} e^{-i\sqrt{\lambda}\theta \cdot x} \theta \cdot \hat{x} \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)(Pv)(x)dx$$

$$= C_2(\lambda)\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\ ; \theta, \omega)$$

dans $L^2(\widetilde{N}_\beta), \widetilde{N}_\beta$ étant un petit voisinage de $N \cap X_\beta$ dans S^5.

Faisons maintenant quelques remarques sur ces résultats.

- Amrein, Pearson et Sinha [A-P-S] ont montré que, dans le problème à N-corps, la section totale de l'amplitude de diffusion est finie pour presque toutes les valeurs de l'énergie si l'état initial est à 2-cluster. Voir aussi le travail de Enss et Simon [E-S].

-Ito et Tamura [I-T] ont étudié le comportement asymptotique semi-classique de la section-totale de la matrice S pour le problème à trois corps dans le cadre des distributions.

- Amrein et Sinha [A-S] ont étudié la matrice S pour le problème à trois corps pour l'énergie fixée sous la condition que les sons systèmes à deux corps n'aient pas la valeur propre zéro ni la zéro-résonance.

- Les résultats de (1) dans le Théorème 1 et le théorème 3 sont également vrais pour le procédé de 2-cluster à N-cluster pour le problème à N-corps.

- Le comportement asymptotique de v est l'un des objets qui intéressent les physiciens. Voir par exemple [M] et [N]. Je remercie le Professeur V. Bouslaev qui m'a indiqué beaucoup d'articles de physique.

II - LOCALISATION DE LA MATRICE S

Pour la preuve du Théorème 1, on utilise l'idée de [I-K]. On prend $\psi(\sigma) \in C^\infty(S^5)$ et $\psi_0(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ telle que $\psi_0(t) = 1$ au voisinage de λ. On pose $p(x,\xi) = \chi(x,\xi)\psi_0(|\xi|^2)\psi(\xi/|\xi|)$, où $\chi(x,\xi)$ est la fonction de localisation telle que $\chi(x,\xi) = 1$ si $|\xi|^2 \in \operatorname{supp} \psi_0$ et $|\hat{x} \cdot \hat{\xi}| > 1 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Soient

$$P = p(x, D_x),\ G = HP - PH_0,$$

et

$$Q_\alpha = \sum_{\delta \neq \alpha} V_\delta J_\alpha.$$

alors on a

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} \psi(\theta)\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda) &= -2\pi i \; \mathcal{F}_0(\lambda)P^*Q_\alpha \mathcal{F}_{0\alpha}(\lambda)^*. \\ &+ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 2\pi i \; \mathcal{F}_0(\lambda)G^*R(\lambda+i\varepsilon)\; Q_\alpha \; \mathcal{F}_{0\alpha}(\lambda)^*. \end{aligned}$$

Ce qui est important est de donner un sens au terme $G^*R(\lambda+i0)Q_\alpha$. Pour cela, on utilise l'estimation de Skibsted [S] établie récemment. Soit P l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $p_-(x,\xi)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$|\partial_x^m \partial_\xi^n \; p_-(x,\xi)| \leq C_{mn} < x >^{-m},$$

il existe un cône $\Gamma \subset X - \underset{\beta}{U} X_\beta$ tel que $\underset{x}{supp}\; p_-(x,\xi) \subset \Gamma$,

il existe une constante $0 < \varepsilon < 1$ telle que $p_-(x,\xi) = 0$ si $\hat{x}\cdot\hat{\xi} > 1-\varepsilon$.

Alors on a ([S])

$$(2.2) \qquad < x >^m P_-R(\lambda+i0) < x >^{-5} \in \mathbf{B}(L^2(X)\; ; L^2(X))$$

pour $m > -1/2,\; s > m+1$.

Les singularités de $\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\; ;\theta,\omega)$ viennent du comportement asymptotique à basse énergie de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger pour le problème à deux corps. Dans $\mathbf{R}^3$, soit $H_2 = -\Delta + V,\; V(x) = 0(|x|^{-\rho})$ lorsque $|x| \to \infty$.

On pose $R_2(Z) = (H_2 - Z)^{-1}$. D'après Jensen-Kato [J-K], on a, si $\rho > 5$,

$$(2.3) \qquad R_2(Z) \sim \frac{B_{-2}}{Z} + \frac{B_{-1}}{\sqrt{Z}}$$

dans $\mathbf{B}(L^{2,s}\; ; L^{2,-s}), s > 5/2$.

La preuve du Théorème 1 consiste à combiner (2.1) et (2.3).

III - REPRESENTATION SPECTRALE

L'idée de la démonstration des théorèmes 3 et 4 est basée sur la représentation spectrale de l'opérateur de Schrödinger.

Soit $v = -R(\lambda+i0)f$. Alors on a formellement

$$(3.1) \qquad \psi(\theta)\widehat{S}_{0\alpha}(\lambda\; ;\theta,\omega) = -2\pi i \; \mathcal{F}_0(\lambda)(H_0-\lambda)P^*v.$$

Posant $F = (h_0 - \lambda)P^* v$, on a formellement $P^* v = R_0(\lambda + i0)F$. Donc, on est amené à considérer la relation entre la transformation de Fourier et la résolvente de $-\Delta$. Ce problème est bien étudié par Jäger, Ikebe, Saito et Isozaki.

Les idées sont basées sur les observations suivantes.

Observation 1 : Soient $R_0(Z)$ la résolvente de $-\Delta$ dans $\mathbf{R}^n$, et $f \in Q$. Alors on a

$$\lim_{r \to \infty} r^{(n-1)/2} e^{-i\sqrt{\lambda} r} (R_0(\lambda + i0) f)(r\theta) = C_1(\lambda) \hat{f}(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Observation 2 : Soient $\rho(t), \rho_+(t) \in C^\infty(R^1)$ telles que $\rho_+(t) = 1$ si $t > 1 - \varepsilon, \rho_+(t) = 0$ si $t < 1 - 2\varepsilon, \rho(t) = 1$ si $1 < t < 2, \rho(t) = 0$ si $t < 1/2$ ou $t > 3$. Soit $f \in Q$. Alors on a

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int e^{-i\sqrt{\lambda}\theta \cdot x} \theta \cdot \hat{x} \rho_+(\theta \cdot \hat{x}) \rho\left(\frac{|x|}{R}\right) R_0(\lambda + i0) f dx$$

$$= c_2(\lambda) \hat{f}(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Pour la démonstration du Théorème 4, on a besoin de l'autre estimation de la résolvante. Soit $X_\alpha(x) = 1$ si $|x^\alpha|/|x| < \varepsilon_1, X_\alpha(x) = 0$ si $|x^\alpha|/|x| > 2\varepsilon_1$. Soient $P_\alpha(x_\alpha, D_{x_\alpha})$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $p(x_\alpha, \xi_\alpha)$ tel que

$$|\partial_{x_\alpha}^m \partial_{\xi_\alpha}^n \ p(x_\alpha, \xi_\alpha)| \leq C_{mn} < x_\alpha >^{-m},$$

$$p(x_\alpha, \xi_\alpha) = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{x_\alpha}{|x_\alpha|} \cdot \frac{\xi_\alpha}{|\xi_\alpha|} > \mu_- \qquad (-1 < \mu_- < 1),$$
$$p(x_\alpha, \xi_\alpha) = 0 \qquad \text{si} \quad ||\xi_\alpha| - \sqrt{\lambda}| > \varepsilon_2,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ étant des constantes positives telles que $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$. Alors on a

$$(3.2) \qquad < x >^m X_\alpha(x) P_\alpha(x_\alpha, D_{x_\alpha}) R(\lambda + i0) < x >^{-s} \in \mathbf{B}(L^2(X)\,; L^2(X))$$

pour $m > -1/2, s > m + 1$.

Cette estimation est démontrée par la méthode des commutateurs des opérateurs pseudo-differentiels.

Bibliographie

[A-P-S] W. Amrein, D. Pearson et K. Sinha, Bounds on the total scattering cross-section for N-body systems, Nuovo Cimento 52 A (1979), 115-131.

[E-S] V. Enss et B. Simon, Finite total cross sections in non-relativistic quantum mechanics, Commun. Math. Phys. 76 (1980), 177-209.

[I-T] H.T. Ito et H. Tamura, Semi-classical asymptotics for total scattering cross sections of 3-body problems, prepublication (1990).

[A-S] W. Amrein et K. Sinha, On three body scattering cross sections, J. Phys. A : Math. Gen. 15 (1982), 1567-1586.

[M] S.P. Merkuriev, On the three-body Coulomb scattering problem, Ann. of Phys. 130 (1980), 395-426.

[N] R.G. Newton, The asymptotic form of three-particle wave functions and the cross sections, Ann. of Phys. 74 (1972), 324-351.

[I-K] H. Isozaki et H. Kitada, Scattering matrices for two-body Schrödinger operators, Scientific papers of the college of arts and sciences, Tokyo Univ. 35 (1985), 81-107.

[S] E. Skibsted, Propagation estimates for N-body Schrödinger operators, prepublication (1990).

[J-K] A. Jensen et T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, Duke Math. J. 46 (1979), 583-611.

H. ISOZAKI

Departement de Mathématiques

Université d'Osaka

Toyomaka, 560, JAPON