



SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**1997-1998**

Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset

**Quelques remarques sur les équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^3$**

*Séminaire É. D. P.* (1997-1998), Exposé n° IX, 8 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_1997-1998\\_\\_\\_\\_A9\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A9_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES DANS $\mathbb{R}^3$

Pierre Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET

Département de Mathématiques  
Université d'Evry  
Bd des Coquibus, 91025 Evry Cedex, France  
e-mail: lemarie@lami.univ-evry.fr

**Résumé:** Nous présentons un résultat d'existence globale de solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^3$  pour des données initiales d'énergie infinie.

**Abstract:** We present a recent result on existence of global weak solutions for the Navier-Stokes equations on  $\mathbb{R}^3$  when the initial data have non-finite energy.

Depuis 1995, je travaille sur les solutions faibles et les solutions milds des équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ , dans la ligne des travaux récents de M. Cannone [CAN] et de F. Planchon [PLA]. En 1997, j'ai obtenu les résultats suivants: l'unicité des solutions milds dans  $\mathcal{C}([0, T[, (L^3(\mathbb{R}^3))^3)$  (en collaboration avec mes étudiantes G. Furioli et E. Terraneo [FLT 1], [FLT 2]) et l'existence globale de solutions faibles pour des données initiales dans  $L^p$  pour  $p \in [2, \infty[$  [LEM 1]. Dans cet exposé, je développerai ce dernier point.

Rappelons que les équations de Navier-Stokes sur  $]0, T[ \times \mathbb{R}^3$  décrivant l'évolution de la vitesse d'un fluide newtonien incompressible, homogène et visqueux  $\vec{u}(t, x)$ ,  $t \in ]0, T[, x \in \mathbb{R}^3$ , sont données en l'absence de force extérieure par le système

$$(1) \quad \rho \partial_t \vec{u} = \mu \Delta \vec{u} - \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} \varpi$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$\rho$  est la *densité* (constante) du fluide et  $\mu$  est le *coefficient de viscosité*; nous supposons ici (sans perte de généralité) que ces deux constantes sont égales à 1:  $\rho = \mu = 1$ .  $\varpi$  est la *pression* (inconnue), dont le rôle est de maintenir la divergence de  $\vec{u}$  égale à 0 (cette condition de *divergence nulle* exprimant l'incompressibilité du fluide).

Le théorème sur les solutions faibles à donnée initiale  $L^p$  est alors le suivant:

**Théorème A :** Si  $p \in [2, +\infty[$ , si  $\vec{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)^3$  et si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$  alors il existe une solution faible  $\vec{u}$  sur  $]0, +\infty[$  des équations de Navier-Stokes avec  $\vec{u}_0$  pour donnée initiale:

- $\vec{u}$  et  $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$  sont localement de carré intégrable sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- $\exists \varpi \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3)$   $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} \varpi$
- $\forall \vec{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \vec{u}(t, \cdot) | \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{u}_0 | \vec{\phi} \rangle$

On peut de plus imposer à  $\vec{u}$  de satisfaire les conditions de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [CKN]: pour tout compact  $K$  de  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3$  on a:

- $\sup_{t > 0} \int_{(t, x) \in K} |\vec{u}|^2 dx < \infty$
- $\int \int_K |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx dt < \infty$
- $\int \int_K |\varpi|^{5/3} dx dt < \infty$

h) pour toute  $\phi \in \mathcal{D}([0, \infty[\times \mathbb{R}^3)$  telle que  $\phi \geq 0$  et  $\text{Supp } \phi \subset K$ , on a

$$2 \int \int_K |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi(t, x) dx dt < \int \int_K |\vec{u}|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) dx dt + \int \int_K (|\vec{u}|^2 + 2\varpi)(\vec{u}, \vec{\nabla})\phi dx dt$$

Les résultats d'existence globale connus concernaient les cas  $\vec{u}_0 \in (L^2)^3$  (donnée initiale d'énergie finie) (théorème de Leray [LER], 1934, avec une solution  $\vec{u} \in L^\infty([0, \infty[, (L^2)^3)$ ) et  $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$  avec  $\|\vec{u}_0\|_3$  assez petite (théorème de Kato [KAT], 1984, avec une solution  $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, \infty[, (L^3)^3)$ ). Le résultat que nous présentons est en fait une résultante de ces deux théorèmes.

## 1. Solutions faibles des équations de Navier-Stokes

Nous allons maintenant préciser le sens de solution faible ou de solution mild que nous entendons utiliser lors de cet exposé.

**Définition 1:** [Solutions faibles et solutions milds]

A) Une *solution faible* des équations de Navier-Stokes sur  $]0, T^*[\times \mathbb{R}^3$  est une distribution vectorielle  $\vec{u} \in (L^2_{loc}([0, T^*[\times \mathbb{R}^3))^3$  qui vérifie:

a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

b)  $\exists \varpi \in \mathcal{D}'([0, T^*[\times \mathbb{R}^3)$   $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} \varpi$

B) Une *solution mild* des équations de Navier-Stokes sur  $]0, T^*[\times \mathbb{R}^3$  de donnée initiale  $\vec{u}_0 \in (S'(\mathbb{R}^3))^3$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ , est une distribution vectorielle  $\vec{u} \in (\mathcal{D}'((0, T^*) \times \mathbb{R}^3))^3$  telle que:

a)  $\vec{u} \in \cap_{T < T^*} L^2((0, T), (L^2_{uloc})^3)$

b)  $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t (\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{u} \otimes \vec{u}) ds$

où  $O_t$  est le *noyau d'Oseen* [OSE], [LER]  $O_t = (Id - \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}) e^{t\Delta} = ((\delta_{j,k} - \frac{1}{\Delta} \partial_j \partial_k) e^{t\Delta})_{1 \leq j, k \leq 3}$ .

Une solution mild est dite *régulière* si  $\vec{u} \in \cap_{T < T^*} L^q((0, T), (L^2_{uloc})^3)$  pour un  $q > 2$  et si de plus  $\vec{u} \in \cap_{0 < t < T < T^*} L^\infty([t, T], (L^\infty(\mathbb{R}^3))^3)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}\|_\infty = 0$ .

Rappelons que  $L^2_{uloc}$  est l'espace des fonctions uniformément localement de carré intégrable:  $f \in L^2_{uloc}$  si et seulement si:  $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^2 dy < +\infty$ .

Le noyau  $O_t$  est une matrice de convoluteurs  $(O_{j,k,t}(x) = \frac{1}{t^{3/2}} O_{j,k}(\frac{x}{\sqrt{t}}))_{1 \leq j, k \leq 3}$  et  $(\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{u} \otimes \vec{u})$  est une notation pour  $(\sum_i \sum_k \partial_i \{O_{j,k,t-s}\} * \{u_i(s) u_k(s)\})_{1 \leq j \leq 3}$ . Le noyau  $\partial_i O_{j,k}$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^3$  de sorte que  $\|(\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{L^1_{uloc}} \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|u\|_{L^2_{uloc}}^2$ . Mais par ailleurs  $L^1_{uloc}(\mathbb{R}^3) \subset B_{\infty}^{-3, \infty}$ , et  $\frac{1}{\Delta} \partial_i \partial_j \partial_k$  est continu de  $B_{\infty}^{-3, \infty}$  dans  $B_{\infty}^{-4, \infty}$  d'où  $\|(\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{B_{\infty}^{-4, \infty}} \leq C \|u\|_{L^2_{uloc}}^2$ ; cette dernière estimation s'intègre de sorte que l'expression sous forme d'équation intégrale a bien un sens.

Il est facile de vérifier qu'à une donnée initiale  $\vec{u}_0$  il correspond au plus une solution mild régulière ([LEM 2] pour le cas  $q = \infty$ ). De même, il est facile de voir qu'une solution mild des équations de Navier-Stokes en est une solution faible [FLT 2] et qu'elle appartient à  $\mathcal{C}([0, T^*[, (B_{\infty}^{-4, \infty})^3)$ ; la réciproque est vraie pour une solution faible  $\vec{u} \in \cap_{T < T^*} L^2((0, T), (L^2_{uloc})^3)$  si l'on rajoute une condition d'annulation à l'infini qui permet de contrôler  $\varpi$  à l'aide de  $\Delta \varpi = - \sum_k \sum_l \partial_k u_l \partial_l u_k$ :

**Définition 2:** L'espace  $E_2$  des fonctions uniformément localement de carré intégrable et nulles à l'infini est défini par:  $f \in E_2$  si et seulement si:

a)  $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^2 dy < +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^2 dy = 0$

Il est normé par:

$$\|f\|_{E_2} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left( \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Remarque** :  $E_2$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  dans  $L^2_{uloc}$ .

**Proposition1** [FLT 2]

Si  $\vec{u} \in \cap_{T < T^*} L^2((0, T), (E_2)^3)$ , alors  $\vec{u}$  est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans  $]0, T^*[\times \mathbb{R}^3$  si et seulement si elle en est une solution mild.

Nous ne considérerons que des solutions dans  $\cap_{T < T^*} L^2((0, T), (E_2)^3)$ ; c'est une classe assez générale pour contenir les solutions faibles de Leray [LER] ( $\vec{u} \in L^\infty(]0, \infty[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, \infty[, (\dot{H}^1)^3)$ ), les solutions milds de Kato [KAT] ( $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T^*[, (L^p)^3)$ , où  $3 \leq p < \infty$ ), mais également les solutions auto-similaires de Cannone [CAN] ( $t^{1/2-3/2p}\vec{u} \in L^\infty(]0, \infty[, (L^p)^3$ , où  $3 < p < \infty$ ) et celles de Meyer [MEY] ( $\vec{u} \in L^\infty(]0, \infty[, (L^{3,\infty})^3)$ ).

## 2. Solutions milds des équations de Navier-Stokes

Le formalisme des solutions *milds* de Kato [KAT] permet facilement d'établir le résultat suivant:

**Proposition2:** (Solutions *milds* dans  $L^p$ )

A) Pour  $p \in [3, \infty[$ ,  $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$  tel que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$  il existe un temps  $T^* > 0$  et une application  $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T^*[, (L^p)^3)$  tels que:

- a)  $\vec{u}$  et  $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$  sont localement de carré intégrable sur  $]0, T^*[\times \mathbb{R}^3$
- b)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- c)  $\exists \varpi \in \mathcal{D}'(]0, T^*[\times \mathbb{R}^3)$   $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} \varpi$
- d)  $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$
- e) pour tout  $T < T^*$  on a:  $\sup_{0 < t < T} \|\vec{u}\|_p + \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_p + \sqrt{t} \|\vec{u}\|_\infty < +\infty$
- f)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \|\vec{u}\|_\infty = 0$

B) Pour tous  $T_0 \in ]0, \infty[$  et  $p \in [3, \infty[$  il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que si la donnée initiale  $\vec{u}_0$  du point A) vérifie  $\|\vec{u}_0\|_p < \epsilon_0$  alors le temps d'existence  $T^*$  de la solution  $\vec{u}$  est supérieur à  $T_0$ .

C) Pour  $p = 3$  il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que si la donnée initiale  $\vec{u}_0$  du point A) vérifie  $\|\vec{u}_0\|_3 < \epsilon_1$  alors le temps d'existence  $T^*$  de la solution  $\vec{u}$  vaut  $+\infty$  et  $\vec{u}$  vérifie:

$$\sup_{t > 0} \|\vec{u}\|_3 + \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_3 + \sqrt{t} \|\vec{u}\|_\infty < +\infty$$

Rappelons brièvement le principe de la preuve. On cherche la solution  $\vec{u}$  comme point fixe de la transformation  $\vec{v} \rightarrow e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t (\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{v} \otimes \vec{v}) ds$ . Pour  $p \geq 3$ , on a  $L^p \subset B_\infty^{-1, \infty}$  et donc pour tout  $T \in ]0, \infty[$  si  $p \neq 3$  et  $T = \infty$  si  $p = 3$  on a  $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_\infty \leq C_{T,p} \|\vec{u}_0\|_p$ . On pose alors  $E_T = \{\vec{v} \in \mathcal{C}(]0, T[, (L^p)^3) / \sup_{0 < t < T} \|\vec{v}\|_p + \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}\|_p + \sqrt{t} \|\vec{v}\|_\infty < +\infty, \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \|\vec{v}\|_\infty = 0\}$ ; on sait que  $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in E_T$ ; on vérifie facilement que l'opérateur bilinéaire  $B(\vec{v}, \vec{w})(t) = \int_0^t (\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{v} \otimes \vec{w}) ds$  est continu de  $E_T \times E_T$  dans  $E_T$ . Plus précisément, on a:

$$\|(B(\vec{v}, \vec{v}) - B(\vec{w}, \vec{w}))(t, x)\|_{L^p(dx)} \leq C_0 \sup_{0 < s < t} \|\vec{v} - \vec{w}\|_p \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} (\|\vec{v}\|_\infty + \|\vec{w}\|_\infty)$$

$$\sqrt{t} \|(\vec{\nabla} \otimes B(\vec{v}, \vec{v}) - \vec{\nabla} \otimes B(\vec{w}, \vec{w}))(t, x)\|_{L^p(dx)} \leq C_1 \sup_{0 < s < t} (\|\vec{v} - \vec{w}\|_p + \sqrt{s} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v} - \vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_p) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} (\|\vec{v}\|_\infty + \|\vec{w}\|_\infty)$$

$$\|(B(\vec{v}, \vec{v}) - B(\vec{w}, \vec{w}))(t, x)\|_{L^\infty(dx)} \leq C_2 \left( \sup_{0 < s < t} \|\vec{v} - \vec{w}\|_p \right)^{1/2} \left( \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v} - \vec{w}\|_\infty \right)^{1/2} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} (\|\vec{v}\|_\infty + \|\vec{w}\|_\infty)$$

Il suffit alors de fixer  $R_0 > \max(\|\vec{u}_0\|_p, \sup_{t>0} \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_p)$ ,  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $(C_0 + C_1 + C_2)\epsilon_0 < 1$ ,  $2C_0\epsilon_0 < 1$ ,  $4C_1\epsilon_0 < 1$  et  $2C_2^2 R_0\epsilon_0 < 1$ , et enfin  $T$  tel que  $\sup_{0<t<T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_\infty < \epsilon_0$  pour obtenir que l'application  $\vec{v} \rightarrow e^{t\Delta} \vec{u}_0 - B(\vec{v}, \vec{v})$  laisse invariant le sous-ensemble fermé  $F_T$  de  $E_T$  défini par  $F_T = \{\vec{v} \in E_T / \sup_{0<t<T} \|\vec{v}\|_p \leq 2R_0, \sup_{0<t<T} \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}\|_p \leq 2R_0, \sup_{0<t<T} \sqrt{t} \|\vec{v}\|_\infty \leq \epsilon_0\}$  et qu'elle y est contractante. La démonstration est alors achevée.

### 3. Le cas $2 \leq p \leq 3$ .

C'est le cas le plus simple. Si  $2 \leq p \leq 3$  et  $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ , il est facile de décomposer  $\vec{u}_0$  en  $\vec{v}_0 + \vec{w}_0$  où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 \in (L^2)^3$ ,  $\vec{w}_0 \in (L^3)^3$  et  $\|\vec{w}_0\|_3 < \epsilon_1$  (où  $\epsilon_1$  est la constante de la proposition 2). Il suffit de décomposer  $L^p$  sur  $L^2$  et  $L^3$  sur chaque composante de  $\vec{u}_0$  indépendamment des autres composantes, puis de projeter cette décomposition sur les champs de vecteur à divergence nulle, ce projecteur étant continu sur  $(L^2)^3$  et  $(L^3)^3$ . On cherche alors la solution  $\vec{u}$  en la décomposant en  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  où:

a)  $\vec{w}$  est une solution mild globale des équations de Navier-Stokes avec  $\vec{w}_0$  pour donnée initiale (une telle solution existe d'après le théorème de Kato (Proposition 2)):

- $\vec{w} \in \mathcal{C}([0, \infty[, (L^3)^3)$
- $\sup_{t>0} \|\vec{w}\|_3 + \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_3 + \sqrt{t} \|\vec{w}\|_\infty \leq C_4 \|\vec{w}_0\|_3$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$
- $\exists \varpi_1 \in \mathcal{D}'(\]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3) \partial_t \vec{w} = \Delta \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{\nabla} \varpi_1$
- $\vec{w}(0, \cdot) = \vec{w}_0$

b)  $\vec{v}$  est une solution faible globale d'équations de Navier-Stokes perturbées avec  $\vec{v}_0$  pour donnée initiale (une telle solution sera construite par la méthode de Leray):

- $\vec{v} \in L^\infty(\]0, \infty[, (L^2)^3) \cap L^2(\]0, \infty[, (\dot{H}^1)^3)$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
- $\exists \varpi_2 \in \mathcal{D}'(\]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3) \partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{\nabla} \varpi_2$
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{v} - \vec{v}_0\|_2 = 0$

Comment construit-on  $\vec{v}$  et quelles en sont les propriétés? Il suffit de se rapporter à l'article fondateur de Jean Leray [LER]. On commence par atténuer la non-linéarité de l'équation en remplaçant les termes de la forme  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\beta}$  par des versions adoucies  $(\{\vec{\alpha} * \omega_\epsilon\} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\beta}$  ou  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \{\vec{\beta} * \omega_\epsilon\}$  où  $\omega_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3} \omega(\frac{x}{\epsilon})$  avec  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\int \omega(x) dx = 1$ . On définit donc  $\vec{v}_\epsilon \in \mathcal{C}([0, \infty[, (L^2)^3)$  comme la solution du système:

$$(3_\epsilon) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\epsilon = 0$$

$$(4_\epsilon) \quad \exists \varpi_\epsilon \in \mathcal{D}'(\]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3) \partial_t \vec{v}_\epsilon = \Delta \vec{v}_\epsilon - (\{\vec{v}_\epsilon * \omega_\epsilon\} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_\epsilon - (\{\vec{w} * \omega_\epsilon\} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_\epsilon - (\vec{v}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}) \{\vec{w} * \omega_\epsilon\} - \vec{\nabla} \varpi_\epsilon$$

$$(5_\epsilon) \quad \vec{v}_\epsilon(0, \cdot) = \vec{v}_0 * \omega_\epsilon$$

Le problème  $(3_\epsilon)$  et  $(4_\epsilon)$  est bien posé dans  $L^2$ : pour une donnée initiale  $L^2$ , on trouve d'abord une solution  $\mathcal{C}([0, T], (L^2)^3)$  pour un  $T > 0$ ; cette solution est de plus  $L^2(\]0, T[, (H^1)^3)$  puisque  $\partial_t \vec{v}_\epsilon - \Delta \vec{v}_\epsilon \in L^2(\]0, T[, (H^{-1})^3)$ ; cela donne  $\vec{v}_\epsilon \in L^2(\]0, T[, (H^1)^3)$  et  $\partial_t \vec{v}_\epsilon \in L^2(\]0, T[, (H^{-1})^3)$ , d'où:

$$\partial_t \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 = 2 \langle \partial_t \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \rangle_{L^2(dx)} = -2 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 + 2 \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\} \rangle_{L^2(dx)}$$

Or on a

$$| \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\} \rangle_{L^2(dx)} | \leq C \|\vec{v}_\epsilon\|_6 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2 \|\vec{w}\|_3 \leq C' \epsilon_1 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2$$

$C$  et  $C'$  ne dépendent ni de  $\epsilon$ , ni de  $\vec{w}$  ou de  $\vec{v}_\epsilon$  (ni de  $T$ ) et l'on peut choisir  $\epsilon_1$  assez petit pour obtenir  $\partial_t \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 \leq 0$ . Cela assure que la norme  $L^2$  de  $\vec{v}_\epsilon$  n'explose pas, puisque  $\|\vec{v}_\epsilon(t, \cdot)\|_2 \leq \|\vec{v}_\epsilon(0, \cdot)\|_2$ . On obtient finalement que  $\vec{v}_\epsilon$  est défini en tout temps et que  $\vec{v}_\epsilon \in L^\infty(\]0, \infty[, (L^2)^3) \cap L^2(\]0, \infty[, (\dot{H}^1)^3)$ . Le choix d'une donnée initiale régulière dans  $(5_\epsilon)$  assure de plus que  $\vec{v}_\epsilon$  est en fait une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^3$ .

Les fonctions  $\vec{v}_\epsilon$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ , vérifient:

- a)  $\sup_{0 < \epsilon \leq 1} \|\vec{v}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3, dx)} < \infty$
- b)  $\sup_{0 < \epsilon \leq 1} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_{L^2(]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3, dt dx)} < \infty$   
et donc
- c)  $\sup_{0 < \epsilon \leq 1} \|(Id - \Delta)^{1/2} \vec{v}_\epsilon\|_{L^2(]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3, dt dx)} < \infty$
- d)  $\sup_{0 < \epsilon \leq 1} \|(Id - \Delta)^{-3/4} \partial_t \vec{v}_\epsilon\|_{L^2(]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3, dt dx)} < \infty$

Cela entraîne que la famille  $\vec{v}_\epsilon$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ , est bornée dans  $H_{loc}^{2/5}(]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3)$  et qu'on peut donc en extraire une suite  $(\vec{v}_{\epsilon_n})$  (avec  $\epsilon_n \rightarrow 0$ ) qui converge en norme  $L^2$  sur tout compact de  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3$ . Par ailleurs, on a:

$$e) \forall T > 0 \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{0 < t < T} \sup_{0 < \epsilon \leq 1} \int_{|x| > R} |\vec{v}_\epsilon|^2 dx = 0$$

Finalement, la limite  $\vec{v}$  de la suite  $\vec{v}_{\epsilon_n}$  est dans  $L^\infty((L^2)^3)$  et on a pour presque tout  $t > 0$   $\lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}_{\epsilon_n} - \vec{v}|^2 dx = 0$ . On en conclut que  $\vec{v}_{\epsilon_n}$  converge vers  $\vec{v}$  fortement dans  $L_{loc}^2((L^2)^3)$  et faiblement dans  $L_{loc}^2((H^1)^3)$ .  $\vec{v}$  est alors bien solution du système de Navier-Stokes perturbé et il est facile de vérifier que  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$  vérifie les conditions de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. En effet, on a pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(]0, \infty[ \times \mathbb{R}^3)$  et en notant  $\vec{w}_{(\epsilon)} = \vec{w} * \omega_\epsilon$  et  $\vec{v}_{(\epsilon)} = \vec{v}_\epsilon * \omega_\epsilon$ :

$$\begin{aligned} & 2 \iint |\vec{\nabla} \otimes (\vec{v}_\epsilon + \vec{w})|^2 \phi(t, x) dx dt = \\ & \iint |\vec{v}_\epsilon + \vec{w}|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) dx dt + \iint (|\vec{v}_\epsilon + \vec{w}|^2 + 2\varpi_1 + 2\varpi_\epsilon) (\vec{v}_\epsilon + \vec{w}) \cdot \vec{\nabla} \phi dx dt \\ & + \iint \{ \vec{v}_\epsilon \cdot (\vec{v}_\epsilon + \vec{w}) \} \{ (\vec{w}_{(\epsilon)} - \vec{w} + \vec{v}_{(\epsilon)} - \vec{v}_\epsilon) \cdot \vec{\nabla} \phi \} dx dt + \iint (\vec{w}_{(\epsilon)} - \vec{w}) \cdot (\vec{v}_\epsilon + \vec{w}) (\vec{v}_\epsilon \cdot \vec{\nabla} \phi) dx dt \\ & + \iint (\vec{v}_\epsilon \cdot \{ (\vec{w}_{(\epsilon)} - \vec{w}) \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \} + \vec{w} \cdot \{ (\vec{w} - \vec{w}_{(\epsilon)}) \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_\epsilon \} + \vec{w}_{(\epsilon)} \cdot \{ \vec{v}_\epsilon \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \} - \vec{w} \cdot \{ \vec{v}_\epsilon \cdot \vec{\nabla} \vec{w}_{(\epsilon)} \}) \phi dx dt \\ & + \iint (\vec{v}_\epsilon \cdot \{ \vec{v}_{(\epsilon)} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \} - \vec{v}_\epsilon \cdot \{ \vec{v}_\epsilon \cdot \vec{\nabla} \vec{w}_{(\epsilon)} \} + \vec{w}_{(\epsilon)} \cdot \{ \vec{v}_\epsilon \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_\epsilon \} - \vec{w} \cdot \{ \vec{v}_{(\epsilon)} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_\epsilon \}) \phi dx dt \end{aligned}$$

Quand  $\epsilon_n$  tend vers 0, le membre de droite de cette égalité converge vers  $\iint |\vec{u}|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) dx dt + \iint (|\vec{u}|^2 + 2\varpi) \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi dx dt$ . Le membre de gauche ne converge pas; mais si  $\phi \geq 0$ , on a

$$\iint |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi(t, x) dx dt \leq \liminf_{\epsilon_n \rightarrow 0} \iint |\vec{\nabla} \otimes (\vec{v}_{\epsilon_n} + \vec{w})|^2 \phi(t, x) dx dt$$

Le théorème est alors démontré pour  $p \in [2, 3]$ .

#### 4. Le cas $p > 3$ : A) Résolution sur un intervalle de longueur 2.

Si  $p > 3$  et  $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ , on décompose  $\vec{u}_0$  en  $\vec{v}_0 + \vec{w}_0$  où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 \in (L^2)^3$ ,  $\vec{w}_0 \in (L^p)^3$  et  $\|\vec{w}_0\|_3 < \epsilon_0$  (où  $\epsilon_0$  est la constante de la proposition 2 associée à  $T_0 = 2$ ). Il suffit encore de décomposer  $L^p$  sur  $L^2$  et  $L^p$  avec petite norme sur chaque composante de  $\vec{u}_0$  indépendamment des autres composantes, puis de projeter cette décomposition sur les champs de vecteur à divergence nulle, ce projecteur étant continu sur  $(L^2)^3$  et  $(L^p)^3$ . On cherche alors la solution  $\vec{u}$  en la décomposant en  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  où:

a)  $\vec{w}$  est une solution mild des équations de Navier-Stokes sur  $]0, 2[ \times \mathbb{R}^3$  avec  $\vec{w}_0$  pour donnée initiale:

- $\vec{w} \in \mathcal{C}([0, 2], (L^p)^3)$
- $\sup_{t > 0} \|\vec{w}\|_p + \sqrt{t} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_p + \sqrt{t} \|\vec{w}\|_\infty \leq C_4 \|\vec{w}_0\|_p$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$
- $\exists \varpi_1 \in \mathcal{D}'(]0, 2[ \times \mathbb{R}^3) \quad \partial_t \vec{w} = \Delta \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{\nabla} \varpi_1$
- $\vec{w}(0, \cdot) = \vec{w}_0$

b)  $\vec{v}$  est une solution faible des équations de Navier-Stokes perturbées avec  $v_0$  pour donnée initiale (construite par la méthode de Leray):

- $\vec{v} \in L^\infty(]0, 2[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, 2[, (H^1)^3)$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
- $\exists \varpi_2 \in \mathcal{D}'(]0, 2[\times \mathbb{R}^3) \partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{\nabla} \varpi_2$
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{v} - \vec{v}_0\|_2 = 0$

La construction de  $\vec{v}$  se fait à nouveau par la méthode de Leray. On introduit à nouveau le problème (3 $_\epsilon$ ), (4 $_\epsilon$ ) et (5 $_\epsilon$ ) sur  $]0, 2[\times \mathbb{R}^3$ . Le problème reste bien posé dans  $L^2$  et fournit une solution  $\mathcal{C}([0, T], (L^2)^3) \cap L^2(]0, T[, (H^1)^3)$  pour un  $T > 0$ ; cette solution vérifie

$$\partial_t \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 = 2 \langle \partial_t \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \rangle_{L^2(dx)} = -2 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 + 2 \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\} \rangle_{L^2(dx)}$$

Or on a pour  $1/q + 1/p + 1/2 = 1$  et  $1/q = \alpha/2 + (1 - \alpha)/6$

$$| \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\} \rangle_{L^2(dx)} | \leq C \|\vec{v}_\epsilon\|_q \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2 \|\vec{w}\|_p \leq C' \epsilon_0 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^{2-\alpha} \|\vec{v}\|_2^\alpha \leq C'' \epsilon_0 (\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2)$$

$C, C'$  et  $C''$  ne dépendent ni de  $\epsilon$ , ni de  $\vec{w}$  ou de  $\vec{v}_\epsilon$  (ni de  $T$ ) et l'on peut choisir  $\epsilon_0$  assez petit pour obtenir  $\partial_t \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 + C'' \epsilon_0 \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 \leq 0$ . Cela assure que la norme  $L^2$  de  $\vec{v}_\epsilon$  n'explose pas, puisque  $\|\vec{v}_\epsilon(t, \cdot)\|_2^2 \leq e^{C'' \epsilon_0 t} \|\vec{v}_\epsilon(0, \cdot)\|_2^2$ . On obtient finalement que  $\vec{v}_\epsilon$  est défini sur  $[0, 2[$  et que  $\vec{v}_\epsilon \in L^\infty(]0, 2[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, 2[, (H^1)^3)$ . Le choix d'une donnée initiale régulière dans (5 $_\epsilon$ ) assure de plus que  $\vec{v}_\epsilon$  est en fait une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 2[\times \mathbb{R}^3$ .

On extrait ensuite de cette famille  $\vec{v}_\epsilon$  une suite convergente vers une solution du système de Navier-Stokes perturbé et conduisant ainsi à une solution de Caffarelli, Kohn et Nirenberg sur  $]0, 2[\times \mathbb{R}^3$ . Le problème est alors d'étendre cette solution en tout temps.

### 5. Le cas $p > 3$ : B) Résultats d'unicité et de régularité.

A priori, étendre la solution au delà de  $t = 2$  ne pose pas de problème: puisque  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  avec  $\vec{v}(t, \cdot) \in (L^2)^3$  et  $\vec{w}(t, \cdot) \in (L^p)^3$ , il suffit à un instant  $t_0$  de redécomposer  $\vec{u}(t_0, \cdot)$  en  $\vec{V} + \vec{W}$  où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0$ ,  $\vec{V} \in (L^2)^3$ ,  $\vec{W} \in (L^p)^3$ ,  $\|\vec{W}\|_p < \epsilon_0$  pour disposer d'une solution sur  $]t_0, t_0 + 2[$ . Le problème cependant est de conserver les propriétés de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, c'est-à-dire l'inégalité d'énergie locale contrôlant  $\int \int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi(t, x) dt dx$ . Pour cela, il ne suffit pas d'avoir une telle solution sur  $[0, t_0]$  et sur  $[t_0, t_0 + 2]$  car il y aurait un problème de recollement en  $t_0$ . Il s'agit de montrer le résultat suivant: si  $\vec{u}$  est la solution construite sur  $[0, 2[\times \mathbb{R}^3$  dans la section précédente, il existe  $t_0 \in [1, 2[$ , une solution  $\vec{U}$  sur  $[t_0, t_0 + 2[\times \mathbb{R}^3$  ayant pour donnée initiale  $\vec{u}(t_0, \cdot)$  et un nombre  $\eta > 0$  tel que  $\vec{u} = \vec{U}$  sur  $]t_0, t_0 + \eta[\times \mathbb{R}^3$ . On construira alors par récurrence une suite  $t_n$  croissante avec  $t_n + 1 \leq t_{n+1} < t_n + 2$  et des solutions (régulières au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg)  $\vec{u}^{(n)}$  sur  $]t_n, t_n + 2[\times \mathbb{R}^3$  telles que pour une certaine suite  $\eta_n$  de nombres strictement positifs  $\vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{(n+1)}$  sur  $]t_{n+1}, t_{n+1} + \eta_n[\times \mathbb{R}^3$  et on conclura par une partition de l'unité (avec des bosses positives...) adaptée aux intervalles  $]t_n, t_{n+1} + \eta_n[$ . Il s'agit donc de choisir  $t_0$ . Il est facile de voir que  $\vec{v}$  (et donc  $\vec{u}$ ) est presque partout  $L^p$  (en fait  $\vec{v} \in L^1(]0, 2[, (L^\infty)^3)$ ); on choisit alors  $t_0$  tel que  $\vec{v}(t_0) \in (L^p)^3$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \|\vec{v} - \vec{v}(t_0)\|_2 = 0$  (ce qui est également vrai presque partout, à cause de l'inégalité d'énergie). En appliquant la méthode de Leray perturbée et celle de Kato à  $\vec{u}(t_0)$ , on dispose donc de trois solutions de Navier-Stokes sur  $]t_0, t_0 + \theta[\times \mathbb{R}^3$  pour un  $\theta > 0$ :

\*  $\vec{u}$  définie sur  $]0, 2[\times \mathbb{R}^3$  construite par la méthode de Leray perturbée:  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  où  $\vec{w} \in \mathcal{C}([0, 2], (L^p)^3)$  et  $\vec{v} \in L^\infty(]0, 2[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, 2[, (H^1)^3)$ ;

\*  $\vec{U}$  définie sur  $]t_0, t_0 + 2[\times \mathbb{R}^3$  construite par la méthode de Leray perturbée:  $\vec{U} = \vec{V} + \vec{W}$  où  $\vec{W} \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + 2], (L^p)^3)$  et  $\vec{V} \in L^\infty(]t_0, t_0 + 2[, (L^2)^3) \cap L^2(]t_0, t_0 + 2[, (H^1)^3)$ ;

\*  $\vec{y}$  définie sur  $]t_0, t_0 + \theta[\times \mathbb{R}^3$  construite par la méthode de Kato:  $\vec{y} \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \theta], (L^p)^3)$ .

$\vec{u}$ ,  $\vec{U}$  et  $\vec{y}$  coïncident en  $t = t_0$ . Il est facile de vérifier que  $\vec{y}$  est  $L^\infty((L^2)^3)$  et  $L^2((H^1)^3)$ . Par ailleurs,  $\vec{y} - \vec{w}$  est solution de la même équation de Navier-Stokes perturbée que  $\vec{u} - \vec{w}$  sur  $]t_0, t_0 + \theta[ \times \mathbb{R}^3$ , les deux solutions coïncident en  $t_0$  et vérifient toutes deux la même inégalité d'énergie

$$\|\vec{u} - \vec{w}\|_2^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\vec{\nabla} \otimes (\vec{u} - \vec{w})\|_2^2 ds \leq \|\vec{u}(t_0) - \vec{w}(t_0)\|_2^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{\nabla} (\vec{u} - \vec{w}) | \vec{w} \rangle ds$$

(et pareil pour  $\vec{y} - \vec{w}$ ). De plus  $\vec{y} - \vec{w} \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \theta], (L^p)^3)$ . Le théorème d'unicité de Serrin [WAH] permet alors de conclure que  $\vec{u} = \vec{y}$ . On raisonne de même avec  $\vec{y} - \vec{W}$  et  $\vec{U} - \vec{W}$ . Cela termine la démonstration.

## 6. Généralisations.

Le théorème A se généralise à d'autres données initiales que  $L^p$  [LEM 1]. Bien évidemment, on peut par exemple considérer le cas d'une donnée  $L^p + L^2$ . Mais on peut considérer d'autres espaces  $L^2 + X$  où une donnée dans  $X$  permet de trouver une solution mild qui interagisse avec les fonctions dans  $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$  pour pouvoir imiter la méthode  $L^p$ . Il y a beaucoup d'exemples d'espaces  $X$  possibles, y compris des espaces de distributions singulières. Nous traiterons ici d'un exemple simple.

**Théorème B:** [Solutions localement  $L^3$ ]

Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$  et si  $\vec{u}_0$  est localement  $L^3$  et vérifie pour un  $\eta > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq 1} |\vec{u}_0(y)|^3 dy = 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int |\vec{u}_0(y)| \frac{1}{(1 + |x-y|)^{3-\eta}} dy < \infty$$

alors il existe une solution faible  $\vec{u}$  sur  $]0, +\infty[$  des équations de Navier-Stokes avec  $\vec{u}_0$  pour donnée initiale:

- $\vec{u}$  et  $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$  sont localement de carré intégrable sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- $\exists \varpi \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3)$   $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} \varpi$
- $\forall \vec{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \vec{u}(t, \cdot) | \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{u}_0 | \vec{\phi} \rangle$

De plus, on peut imposer à cette solution de satisfaire les conditions de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Nous introduisons l'espace  $E_3$  analogue de  $E_2$  pour la norme  $L^3$  et un espace "technique"  $E_{3,\alpha}$ :

**Définition 2:** A) L'espace  $E_3$  des fonctions uniformément localement de puissance troisième intégrable et nulles à l'infini est défini par:  $f \in E_3$  si et seulement si:

- $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 dy < +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 dy = 0$

Il est normé par:

$$\|f\|_{E_3} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left( \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 dy \right)^{\frac{1}{3}}$$

B) Pour  $0 < \alpha < 3$ , l'espace  $E_{3,\alpha}$  est défini par  $f \in E_{3,\alpha}$  si et seulement si on a:

- $f \in E_3$
- $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^{3/2} \frac{1}{(1+|x-y|)^{3-\alpha}} dy < \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^{3/2} \frac{1}{(1+|x-y|)^{3-\alpha}} dy = 0$



Il est normé par:

$$\|f\|_{E_{3,\alpha}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left( \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 dy \right)^{\frac{1}{3}} + \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^{3/2} \frac{1}{(1+|x-y|)^{3-\alpha}} dy \right)^{2/3}$$

Il est facile de voir que la donnée  $\vec{u}_0$  du théorème B appartient à  $(E_{3,\alpha})^3$  pour  $\alpha$  assez petit et que  $E_{3,\alpha}$  est bien adapté aux équations de Navier-Stokes:

a)  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  est dense dans  $E_{3,\alpha}$  (par troncature et régularisation)

b) les transformations de Riesz opèrent continument sur  $E_{3,\alpha}$ : en effet elles opèrent continument (et uniformément par rapport à  $x_0$ ) sur  $L^{3/2}(\frac{1}{(1+|x_0-y|)^{3-\alpha}} dy)$  car  $\frac{1}{(1+|x_0-y|)^{3-\alpha}}$  est un poids de la classe de Muckenhoupt  $A_{3/2}$ ; pour estimer  $\int_{|x-y| \leq 1} |R_j f(y)|^3 dy$ , on scinde  $f$  en  $g_x = f(y)1_{|x-y| \leq 2}(y)$  et  $h_x(y) = f(y)1_{|x-y| > 2}(y)$ ;  $R_j g_x(y)$  s'estime facilement par la continuité  $L^3$  de  $R_j$ ; par ailleurs  $R_j h_x(y)$  est bornée sur  $|x-y| \leq 1$  par  $(\int_{|w-x| > 2} |f(w)|^{3/2} \frac{1}{|x-w|^{3-\alpha}} dw)^{2/3} (\int_{|x-w| > 2} \frac{1}{|x-w|^{3+2\alpha}} dw)^{1/3}$ .

c) de a) et b) on tire qu'un champ à divergence nulle dans  $(E_{3,\alpha})^3$  se décompose en un champ à divergence nulle appartenant à  $(L^2)^3$  et un champ de norme  $E_{3,\alpha}$  arbitrairement petite.

d) le formalisme de Kato pour l'existence de solutions milds s'applique sans problème car le produit ponctuel est un opérateur bilinéaire continu de  $L^\infty \times E_{3,\alpha}$  dans  $E_{3,\alpha}$  et  $E_{3,\alpha} \subset B_\infty^{-1,\infty}$

e) le produit ponctuel est bien continu de  $L^2 \times E_{3,\alpha}$  dans  $H^{-1}$ ; en fait, il l'est de  $L^2 \times L^3_{uloc}$  dans  $H^{-1}$

f) La fin de la démonstration est similaire (en remplaçant le théorème d'unicité de Serrin par celui de Von Wahl [WAH]).

## Bibliographie

[CKN] CAFFARELLI, L., KOHN, R., & NIRENBERG, L., Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982), pp. 771-831.

[CAN] CANNONE, M., *Ondelettes, paraproducts et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Paris, 1995.

[FLT 1] FURIOLI, G., LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G. & TERRANEO, E., Sur l'unicité dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  des solutions "mild" de l'équation de Navier-Stokes, *C.R.Acad.Sci. Paris*, Série 1, 325 (1997) pp. 1253-1256.

[FLT 2] FURIOLI, G., LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G. & TERRANEO, E., Unicité dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  et d'autres espaces limites pour Navier-Stokes, soumis à *Revista Mat. Iberoamer.*.

[KAT] KATO, T., Strong  $L^p$  solutions of the Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^m$  with applications to weak solutions, *Math. Zeit.* 187 (1984), pp. 471-480.

[LEM 1] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., Solutions faibles d'énergie infinie pour les équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ , en préparation.

[LEM 2] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., Some remarks on the Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^3$ , à paraître in *Journal Math. Phys.* .

[LER] LERAY, J., Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.* 63 (1933), pp. 193-248.

[MEY] MEYER, Y., *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, à paraître comme *Memoir of the AMS*.

[OSE] OSEEN, C.W., *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.

[PLA] PLANCHON, F., *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes.*, Thesis, Ecole Polytechnique, 1996.

[WAH] VON WAHL, W., *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.