Séminaire Ehresmann.
Topologie et géométrie différentielle

Dona Papert
Seymour Papert

Sur les treillis des ouverts et les paratopologies

Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. nº 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)

Année 1957/58

-:-:-:-

SUR LES TREILLIS DES OUVERTS ET LES PARATOPOLOGIES

par Mrs Dona PAPERT et Seymour PAPERT

INTRODUCTION. - Nous exposons ici une partie des résultats de nos recherches sur les treillis des ouverts et des fermés des espaces topologiques, ainsi que sur "la topologie sans points". L'exposé consiste en trois parties :

1. Propriétés des treillis des ouverts et représentation des treillis comme treillis d'ouverts ;

2. Etude de théorèmes classiques de la topologie transposés en théorèmes de treillis ;

3. Quelques résultats sur des catégories d'applications de treillis qui renferment également des généralisations de théorèmes topologiques.

Nous ne pourrions pas donner ici les démonstrations de toutes nos propositions sans allonger trop ce texte. Mais nous pourrons fournir des exemplaires de certaines d'entre elles à ceux qui s'y intéressent particulièrement.

1. Les treillis des ouverts et des fermés des espaces topologiques.

DÉFINITIONS et TERMINOLOGIE. - Soient x , y , z , ... des éléments d'un treillis L . Si z est l'élément le plus grand tel que $x \wedge z < y$, nous l'appelons le pseudo-complémentaire relatif de x par rapport à y et nous écrivons $z = x * y$. Si $x * y$ existe pour chaque couple (x , y) , L est dit treillis de Brouwer. Si L a un élément minimum, 0 , on écrit $x^* = x * 0$; x^* est alors l'élément maximum disjoint de x . Si L est de Brouwer et complet nous l'appelons TBC ou, par abus de language, paratopologie. On sait que les TBC sont les treillis complets qui satisfont aux conditions équivalentes :

DI $\quad \bigvee(x \wedge x_\alpha) = x \wedge \bigvee x_\alpha$.

DI' $\quad \bigvee(x_\alpha \wedge y_\beta) = \bigvee x_\alpha \wedge \bigvee y_\beta$.

DI" Pour $a \in L$, l'application de L dans lui-même, $f(x) = x \wedge a$, est continue pour la topologie d'ordre du treillis.

Le treillis des ouverts d'un espace topologique X est un TBC que nous notons T(X) . $x * y$ est, en effet, $E - \overline{x - y}$.

La condition (DI) n'est cependant pas la plus forte condition de distributivité vérifiée par les ouverts. Pour en trouver d'autres nous introduisons les notations suivantes.

Soit L un treillis complet. On définit une application $\mu : P(P(L)) \to P(L)$ comme il suit. Soit $G = (g_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble d'ensembles g_α d'éléments de L . Soit $f : A \to L$ une application telle que $f(\alpha) \in g_\alpha$; c'est-à-dire $f \in F = \prod_{\alpha \in A} g_\alpha$. Alors $\mu(G)$ est l'ensemble des éléments de la forme $z_f = \bigvee_\alpha f(\alpha)$
De même on définit l'opération duale : $\tilde{\mu}(G) = (\bigwedge_\alpha f(\alpha))_{f \in F}$.

Soit maintenant Φ un élément de $P(P(L))$. Nous disons que L est distributif (Φ) si chaque fois que $g_\alpha \in \Phi$ pour chaque $\alpha \in A$ on a

$$\bigvee_\alpha \wedge g_\alpha = \wedge \mu(G) \quad ,$$

où $G = (g_\alpha)$ et, pour $A \in P(L)$, $\wedge A$ signifie l'intersection de tous les éléments de A .

De même L est distributif-(DΦ) si la condition duale est remplie :

$$\bigwedge_\alpha \vee g_\alpha = \vee \tilde{\mu}(G)$$

Deux cas particuliers de distributivité-(Φ) nous intéressent. Le premier est celui de Φ = Fin , l'ensemble des ensembles finis d'éléments de L . Le second est celui de $\Phi = F$ où F est l'ensemble le plus petit qui satisfait à :

i. Fin F ;

ii. $G = (g_\alpha) \in F \Rightarrow \mu(G) \in F$;

iii. a. $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in F$, b. $x_\alpha = \bigwedge_{\beta \in B_\alpha} x_\alpha^\beta$, et c. pour chaque α , $(x_\alpha^\beta)_{\beta \in B_\alpha} \in F$ impliquent $(x_\alpha^\beta)_{\beta \in B_\alpha, \alpha \in A} \in F$.

Si $(x_\alpha) \in F$ nous disons que (x_α) est un ensemble-F . Le sens intuitif de l'ensemble F est clarifié par :

PROPOSITION 1. - Soit X un espace topologique et (x_α) un F-ensemble de T(X) . Alors $\bigcap x_\alpha$ est ouvert.

PROPOSITION 2. - T(X) est distributif-(Fin) et distributif-F .

PROPOSITION 3. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis complet L soit de la forme $T(X)$, est qu'il soit distributif-(F).

Pour les propositions qui suivent, il est plus facile de penser en termes de fermés. Les résultats sur les ouverts se démontrent par dualité.

DEFINITION. - Un élément d'un treillis L est $\vee$-irréductible si $x \neq 0$ et $x = y \vee z \Rightarrow x = y$ ou $x = z$.

PROPOSITION 4. - Soit E un sous-ensemble des éléments $\vee$-irréductibles de L, et pour chaque $x \in L$ posons

$$F_x = (y \in E : y < x) .$$

Alors $F_x \cup F_y = F_{x \vee y}$ et $\bigcap F_{x_\alpha} = F_{\wedge x_\alpha}$.

DEMONSTRATION.

i. $z \in F_x \cup F_y \Rightarrow z < x$ ou $z < y \Rightarrow z < x \vee y$ puisque z est $\vee$-irréductible

ii. $z \in \bigcap F_{x_\alpha} \Leftrightarrow z \in F_{x_\alpha}$ pour chaque α

$\Leftrightarrow z < x_\alpha$ pour chaque α

$\Leftrightarrow z < \wedge x_\alpha$.

COROLLAIRE.

1° Les F_x sont les fermés d'une topologie sur E, dite topologie induite sur E par L.

2° Si chaque élément de L est la réunion d'éléments de E, le treillis des fermés de la topologie induite sur E est identique à L.

PROPOSITION 5. - Un treillis L est le treillis des fermés (ouverts) d'un espace topologique si, si et seulement si chaque élément est réunion (intersection) d'éléments $\vee$-irréductibles ($\wedge$-irréductibles). On peut, d'ailleurs, supposer que l'espace topologique est T_0.

CONVENTION. - Par la suite espace topologique voudra dire espace topologique T_0.

PTOPOSITION 6. - Soit X un espace topologique et $\tilde{X}$ l'ensemble des éléments $\wedge$-irréductibles de $T(X)$ muni de la topologie induite par $T(X)$. Alors X est homéomorphe à un sous-espace X' de $\tilde{X}$ qui est treillis-dense dans le sens que deux ouverts distincts de $\tilde{X}$ ont des traces distinctes sur X' .

DÉFINITION. - On appelle $\tilde{X}$ <u>l'espace plein</u> qui correspond à X .

L'espace plein est l'espace maximum parmi les espaces T_0 qui ont le même treillis d'ouverts. Remarquons que les espaces séparés sont toujours pleins. Un exemple d'un espace qui n'est pas plein est le suivant : soit X l'espace des nombres réels muni de la topologie qu'on obtient en prenant les complémentaires des ensembles finis comme les ouverts. Alors X n'est pas plein. $\tilde{X}$ est l'espace qu'on obtient en ajoutant un point w à X , et en prenant comme les ouverts les ensembles de la forme $G \cup \{w\}$, où G est un ouvert de X . Remarquons que X est T_1 et que $\tilde{X}$ ne l'est pas.

Les propositions qui suivent sont faciles à démontrer.

PROPOSITION 7. - Si $f : X \to Y$ est une application continue, $T(f) = f^{-1} : T(Y) \to T(X)$ est un $\vee$-homomorphisme (c'est-à-dire $f^{-1}(x \wedge y) = f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\vee x_\alpha) = \vee f^{-1}(x_\alpha)$) . Réciproquement, si $h : T(Y) \to T(X)$ est un $\vee$-homomorphisme, il existe une application continue $f : X \to \tilde{Y}$ telle que $h = T(f)$.

COROLLAIRE. - T est un foncteur contravariant qui applique la catégorie $\mathfrak{T}$ des applicationscontinues des espaces topologiques dans la catégorie $\mathcal{H}$ des $\vee$-homomorphismes des TBC . En outre, si $\tilde{\mathfrak{T}}$ est la sous-catégorie de $\mathfrak{T}$ dont les objets sont les espaces pleins, $T : \tilde{\mathfrak{T}} \to T(\mathfrak{T})$ est un isomorphisme contravariant On peut, donc, identifier $\tilde{\mathfrak{T}}$ et $T(\mathfrak{T}) \subset \mathcal{H}$.

PROPOSITION 8. - Le produit topologique d'espaces pleins est un espace plein et $T(\pi(X_\alpha)) = T(\pi(\tilde{X}_\alpha))$.

Nous discuterons dans la troisième partie en quoi $T(\pi(X_\alpha))$ est un "produit" de la famille de treillis $T(X_\alpha)$.

2. <u>Définitions et théorèmes "paratopologiques"</u>.

De nombreuses propriétés d'espaces topologiques sont déterminées par le treillis des ouverts de l'espace. Si l'espace X est, par exemple, quasi-compact, connexe, uniformisable ou T_2 , tout espace avec le même treillis des ouverts l'est également. Par contre, il se peut que $T(X) = T(Y)$ tandis que X , mais non Y , soit dénombrable à l'infini, T_1 ou de Baire. Nous appelons propriétés-T celles de la première sorte, c'est-à-dire celles qui sont vérifiées par X si, et seulement si elles le sont par $\tilde{X}$. Ci-dessous une liste de propriétés-T qui se définissent dans les seuls termes des notions propres aux treillis de Brouwer, ainsi qu'un échantillon des théorèmes que nous avons pu transformer en théorèmes sur les TBC .

DÉFINITIONS.

i. (z_α) est un recouvrement de L si $\vee z_\alpha = I$. Un recouvrement (z_α) est plus fin qu'un recouvrement (y_β) si $(\forall \alpha)(\exists \beta)$: $z_\alpha < y_\beta$. Nous écrivons alors $(y_\beta) > (z_\alpha)$. (z_α) est de type fini si pour chaque α , $z_\alpha \wedge z_\beta = 0$ sauf pour un ensemble fini des β .

ii. L est quasi-compact (quasi-paracompact) si chaque recouvrement a un sous-recouvrement fini (de type fini). Un élément $x \in L$ est relativement compact si chaque recouvrement (z_α) tel que $z_\alpha > x^*$, a un sous-recouvrement fini. L est localement quasi-compact s'il existe un recouvrement dont les éléments sont relativement quasi-compacts.

iii. On écrit $\bar{x} < y$ si $x^* \vee y = I$, et $x < \bar{y}$ si $x < y^{**}$.

On dit que x est dense si $I < \bar{x}$, c'est-à-dire $I = x^{**}$, c'est-à-dire $x^* = 0$. Un TBC qui, localement compact, est dénombrable à l'infini si $I = \vee x_n$ ou $\bar{x}_n < x_{n+1}$ et x_n est relativement quasi-compact.

iv. Filtre, Ultrafiltre, etc., se définissent d'une façon évidente. Co-filtre, ultre-co-filtre sont les notions duales. Un filtre est convergent s'il contient au moins un élément de chaque recouvrement.

v. L est régulier si chaque $x \in L$ peut s'écrire $x = \vee y_\alpha$ où $\bar{y}_\alpha < x$. L est normal si $x_1 \vee x_2 = I \Rightarrow \exists\, y_1 , y_2$ tels que

a. $y_1 \vee x_1 = I$,

b. $y_2 \vee x_2 = I$,

c. $y_1 \wedge y_2 = 0$.

vi. L est uniformisable s'il existe une famille $C = (c_\gamma)$ de recouvrements, telle que :

a. C est fibré par $>$

b. $(\forall \gamma)\ x < y \in c_\gamma \Rightarrow x \in c_\gamma$.

c. $(\forall \gamma)(\exists \beta)$: $(x , y \in c_\beta$ et $x \wedge y \neq 0) \Rightarrow x \vee y \in c_\gamma$ et

d. chaque $x \in L$ s'écrit $x = \vee y_\iota$ de sorte que

$$(\forall_\iota)(\exists\gamma) : (z \in c_\gamma \text{ et } z \wedge y_\iota \neq 0) \Rightarrow z < x .$$

THÉORÈMES (Echantillon).

i. Soient x , y relativement compacts. Alors

a. $x \vee y$ est relativement compact,

b. $z \prec \bar{y} \Rightarrow z$ est relativement compact,

c. L est q-compact si I est relativement compact.

ii. Si L est q-compact, chaque ultra-filtre est convergent.

iii. Si L est connexe, il est paracompact, si et seulement s'il est dénombrable à l'infini.

iv. (Lemme d'Urysohn) Soit L normal et soient x , $y \in L$ tels que $x \vee y = L$. Il existe, alors, un homomorphisme h du treillis des ouverts du segment $[0 , 1]$ de la droite réelle dans L tel que $h([0 , 1)) < x$ et $h((0 , 1]) < y$.

v. a. Si L est uniformisable, il est régulier

b. Si L est normal et régulier, il est uniformisable.

vi. Les groupes de Čech se définissent par recouvrement et les groupes singuliers par les $\vee$-homomorphismes $h : T(E_n) \to L$ de sorte que les axiomes d'Eilenberg et Steenrod sont vérifiés.

[Nous avons étudié les groupes de Čech en collaboration avec J. BENABOU].

3. <u>La catégorie</u> H : <u>théorème de Tychonoff.</u>

DÉFINITION. - Une $\mathcal{H}$-catégorie est une sous-catégorie complète de $\mathcal{H}$, la catégorie des $\vee$-homomorphismes de TBC . Une $\mathcal{H}$-catégorie est régulière si chaque $\vee$-sous-treillis d'un de ses objets est encore de ses objets. (K est un $\vee$-sous-treillis de L si toute réunion pour L d'éléments de K est dans K). Soient (L_α) une famille d'objets d'une $\mathcal{H}$-catégorie C , L un objet de C et $p_\alpha : L_\alpha \to L$ une famille d'éléments de C . Nous appelons (par abus de langage, voir GROTHENDIECK) L-produit des L_α avec projections p_α si pour chaque C-objet K et famille $f_\alpha : L_\alpha \to K$ d'éléments de C , il y a un seul élément $f \in C$, $f : L \to K$ tel que $f\, p_\alpha = f_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
L_\alpha \arrow[r, "p_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & L \arrow[dl, "f"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

Si chaque famille (I_α) d'objets de C a un C-produit, C est une <u>catégorie avec produit</u>. Nous écrivons $L = \otimes_C L_\alpha$.

L'intérêt des produits dans les catégories est indiqué par la proposition :

PROPOSITION 8 (Théorème de TYCHONOFF). - Soit C une catégorie régulière avec produits, et qui a comme objet le treillis réduit à deux éléments. Alors le C-produit de C-objets q-compacts est q-compact.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{J}$ un ultra-cofiltre dans le C-produit L des C-objets L_α avec projections f_α. Il faut démontrer que la réunion $\bigvee J$ des éléments de J n'est pas I. Posons $J_\alpha = (x \in L_\alpha : f_\alpha(x) \in J)$. J_α est un co-filtre. On peut trouver un ultra-cofiltre J'_α qui le raffine. Puisque L_α est q-compact $x_\iota \in J'_\alpha \Rightarrow \bigvee x_\iota \in J'_\alpha$; car si $\bigvee x_\iota \notin J'_\alpha$, $\exists\, y \in J'_\alpha$ tel que $y \vee \bigvee x_\iota = \bigvee(y \vee x_\iota) = I$. Il s'ensuit que l'on peut construire des $\vee$-homomorphismes (éléments de C) $h_\alpha : L_\alpha \to K$ tels que $h_\alpha(y) = I$ si $y \notin J'_\alpha$, $h'_\alpha(y) = 0$ si $y \in J'_\alpha$. Puisque L est le produit des L_α il existe h tel que $h_\alpha = hf_\alpha$.

Il n'est pas difficile de démontrer que puisque C est régulier chaque élément de L est réunion d'éléments, dits élémentaires, qui sont intersections finies d'éléments de la forme $f_\alpha(x)$, $x \in L_\alpha$. D'autre part on démontre que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de L sont dans un ultra-cofiltre, au moins un de ses éléments dans l'ultra-cofiltre.

Il vient donc que $h(x) = 0$ pour $x \in J$, d'où $h(\bigvee J) = 0$. Mais $h(I) = I$ ce qui démontre que $\bigvee J \neq I$ et la démonstration est achevée.

On peut, de même, démontrer des théorèmes sur les produits de TBC connexes, uniformisables, etc.

1° <u>Exemples de catégories avec produits</u>. - La catégorie $\mathcal{K}$ elle-même a comme produit le résultat de la construction esquissée à la fin de l'article d'EHRESMANN [2]. (Voir aussi les études de BENABOU). La carégorie $\mathcal{D}$ des treillis distributifs-(Fin) et la catégorie $T(\mathcal{J})$ sont également des catégories régulières avec produits. Ces produits ne sont pas identiques. Soit R la droite rationnelle. $T(R)$ et $T(R) \otimes_{\mathcal{D}} T(R)$ sont distributifs-(Fin), mais $T(R) \otimes_{\mathcal{K}} T(R)$ ne l'est pas. Ce même exemple nous montre que $\otimes_{\mathcal{K}} T(X_\alpha)$ n'est pas toujours la même chose que $T(\prod X_\alpha)$. En revanche on peut démontrer que $\otimes_{\mathcal{D}} T(X_\alpha) = T(\prod X_\alpha) = \otimes_{T(\mathcal{J})} T(X_\alpha)$. Donc T est "un homomorphisme pour produits" en tant que foncteur $T : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ mais non en tant que foncteur $T : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$.

2° Autres notions de Catégorie. - Il est possible de définir une notion de "sous-espace" dans une $\mathcal{K}$ catégorie (à peu près comme GROTHENDIECK définit les sous-trucs d'un catégorie abstraite) et une notion de sous-espace fermé, tous les deux en termes catégoriels, de sorte que les théorèmes de la topologie générale se transpose d'une façon naturelle. De même on peut définir des "fibrés", etc. Nous espérons exposer prochainement ces résultats en détail.

4. Exemples de TBC .

On trouve partout dans la mathématique des treillis de Brouwer qui ne sont pas treillis des ouverts d'espaces topologiques. Les algèbres de Boole et les "lattice groups" sont les treillis de Brouwer. En théorie de logique les treillis de Brouwer fournissent des modèles pour la logique dite intuitioniste ou de Brouwer comme les algèbres de Boole en fournissent pour le calcul ordinaire de propositions. Nous basant sur la proposition 4 ci-dessus nous allons discuter la possibilité de représenter comme treillis d'ouverts un nombre de TBC .

1° Treillis des mesures. - Soit L un treillis complet de mesures définies sur une σ-algèbre donnée d'ensembles mesurables. L est un TBC . Supposons pour chaque $\mu \in L$ et chaque ensemble mesurable, X , que la mesure μ_X définie par $\mu_X(Y) = \mu(X \cap Y)$ soit dans L . Il est évident qu'une mesure de L est $\vee$-irréductible si, et seulement si, elle ne prend qu'une seule valeur différente de zéro. Si donc une seule mesure μ de L prend des valeurs arbitrairement petites dans tout ensemble mesurable, μ n'est supérieure à aucune mesure irréductible, et L n'est le treillis des fermés d'aucun espace. Par symétrie on trouve des treillis de mesures qui n'admettent aucune représentation comme treillis d'ouverts.

2° Algèbres de Boole. - Dans une algèbre de Boole un élément est irréductible seulement si son complémentaire est un atome. Donc les treillis de Boole sans atome (par exemple les ensembles mesurables de la droite modulo les ensembles nuls) sont des TBC qui ne sont pas treillis d'ouverts.

3° Treillis de Fonctions. - Soit X un espace de Stone, c'est-à-dire un espace compact où les fermetures des ouverts sont ouverts. Les fonctions qui appliquent X dans l'intervalle fermé $(0 , 1)$ sont un TBC . Ce treillis admet une représentation comme treillis des ouverts d'un espace si, et seulement si, les points isolés de X sont partout denses dans X .

4° Treillis d'idéaux, sous-algèbres, etc. - En général, un treillis des ensembles définis par une condition finie est un TBC s'il est distributif. De plus, s'il est distributif, un tel treillis est un treillis d'ouverts. Ce fait est une conséquence facile du lemme de Zorn.

Il en résulte que si L est le treillis des idéaux d'un treillis distributif ou de treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique généralisé, L est isomorphe au treillis des ouverts d'un espace topologique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKOFF (Garrett). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[2] EHRESMANN (Charles). - Gattungen von lokalen Strukturen, Jahresb. deutsch. Math. Verein., t. 60, 1957/58, p. 49-77.

[3] Séminaire GROTHENDIECK : Algèbre homologique, t. 1, 1957.