J-P. SERRE

# La suite spectrale attachée à une application continue

*Séminaire Henri Cartan*, tome 3 (1950-1951), exp. n° 21, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A21_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

LA SUITE SPECTRALE ATTACHÉE À UNE APPLICATION CONTINUE

(Exposé de J-P. SERRE, le 18.6.1951)

---

Le but de cet exposé est de reprendre, dans le cadre des "$\Phi$-cohomologies", la théorie de l'anneau spectral d'une application continue, développée par J. Leray dans des Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris, ainsi que dans ses deux mémoires parus en 1950 au Journal de Math. pures et appl.

L'outil essentiel va être le théorème fondamental de l'exposé 19 , dont nous allons rappeler un cas particulier.

1.- Rappel.

Soit $B$ un espace , $\Phi$ une famille de parties de $B$ vérifiant les conditions données au paragraphe 7 de l'exposé 15 , $L$ un faisceau sur $B$ vérifiant les conditions suivantes:

a) $L$ est gradué (à degrés tous positifs), et possède un opérateur cobord de degré $+1$ .

b) $L$ est fin.

Dans ces conditions, le théorème fondamental de l'exposé 19 s'applique et donne :

Proposition 1.- Dans les conditions précédentes, il existe une suite spectrale $(E^r)$ , où $E^2_{p+q,p} = H^p_\Phi(B , H^q(L))$ , et où $E^\infty$ est le module gradué associé à $H(\Gamma_\Phi(L))$ convenablement filtré.

Remarque : La proposition précédente est valable sous des conditions sensiblement plus larges, comme on l'a dit dans l'exposé 19 ; celles que nous avons données nous suffiront par la suite.

Si maintenant $A$ est une carapace fine, graduée à degrés tous positifs, et munie d'un opérateur cobord de degré $+1$ , nous pouvons appliquer la proposition 1 à $\mathcal{F}(A)$ , faisceau associé à $A$ . Pour que le résultat obtenu soit utilisable, il faut supposer en outre que $A$ est $\Phi$-complète, c'est-à-dire que $A_\Phi = \Gamma_\Phi(\mathcal{F}(A))$ . Ce sera le cas par exemple si $A$ vérifie la condition :

c) Etant donnée une famille $x_\alpha \in A$ , dont les supports forment une famille localement finie sur $B$ et dont la réunion appartient à $\Phi$ , l'élément $\sum x_\alpha$

est dans $A$ . (Plus brièvement, nous dirons que les $\Phi$ -sommes localement finies de $A$ convergent).

On obtient donc :

<u>Proposition 2</u>.- <u>Soit</u> $(B, \Phi)$ <u>un espace topologique et une "famille $\Phi$ " de cet espace ; soit</u> $A$ <u>une carapace sur</u> $B$ , <u>fine , graduée à degrés</u> $\geq 0$ , <u>munie d'un opérateur cobord de degré</u> $+1$ , <u>et où toute</u> $\Phi$ <u>-somme localement finie converge. Il existe alors une suite spectrale de cohomologie</u> $(E^r)$ , <u>où</u> $E^2_{p+q,p} = H^p_{\Phi}(B, H^q(\mathcal{F}(A)))$ , <u>et où</u> $E^{\infty}$ <u>est le module gradué associé à</u> $H(A_{\Phi})$ <u>convenablement filtré</u>.

2.- <u>La suite spectrale associée à une application continue</u>.

Soit $f : E \longrightarrow B$ une application continue d'un espace $E$ dans un espace $B$ ; on supposera $E$ et $B$ munis de deux familles $\Phi$ , que nous désignerons par $\Psi$ et $\Phi$ respectivement.

Soit $G$ un faisceau sur $E$ , qui jouera le rôle des coefficients. On se propose, en gros, de mettre en rapport la cohomologie de $E$ à valeurs dans $G$ avec la cohomologie de $B$ à valeurs dans le faisceau formé par les cohomologies des "fibres" $f^{-1}(b)$ , $b \in B$ .

Pour cela, il faut revenir à la définition de la cohomologie de $E$ : choisissons donc un faisceau <u>fondamental</u> sur $E$ , que nous supposerons même <u>fin</u> (ceci est possible, voir 16) . Par définition (ou presque), on a :

$$H_{\Psi}(E, G) = H(\Gamma_{\Psi}(C \circ G)) \quad ,$$

si $C$ désigne le faisceau fondamental en question. En d'autres termes, la cohomologie de la carapace $A^o = \Gamma_{\Psi}(C \circ G)$ est celle de $E$ .

Soit $x \in A^o$ , $\sigma(x)$ son support (c'est un élément de $\Psi$ ) ; posons : $\sigma'(x) =$ adhérence de $f(\sigma(x))$ .
L'application : $x \longrightarrow \sigma'(x)$ définit $A^o$ comme une <u>carapace sur</u> $B$ , carapace que nous appellerons $A$ . Notre but est maintenant d'appliquer à $A$ la proposition 2 .

Pour que le résultat obtenu soit intéressant, il faudra évidemment que l'on ait $A_{\Phi} = A$ . Ce sera le cas si la condition suivante est réalisée :

(I) <u>L'image par</u> $f$ <u>d'un ensemble de la famille</u> $\Psi$ <u>est contenue dans un ensemble de la famille</u> $\Phi$ .

Par ailleurs, puisque $C$ est fin sur $E$ , $C \circ G$ est également fin, $A^o = \Gamma_{\Psi}(C \circ G)$ est une carapace fine sur $E$ , et <u>a fortiori</u> $A$ est une carapace fine sur $B$ .

Par ailleurs, puisque $\Gamma_{\psi}(C \circ G)$ est $\psi$-complète (par définition !) , toute $\psi$-somme localement finie de $A^{\circ}$ converge. On ne peut (en) conclure que toute $\Phi$-somme localement finie de $A$ converge que si la condition suivante est vérifiée :

(II) Quelle que soit la famille $A_i \in \psi$ , telle que les $f(A_i)$ soient localement finis sur $B$ , et que $\bigcup_i \overline{f(A_i)} \in \Phi$ , on a $\bigcup_i A_i \in \psi$ .

Deux familles $\psi$ et $\Phi$ vérifiant les conditions précédentes seront dites adaptées.

Appliquant alors la proposition 2 à la carapace A , on obtient :

Proposition 3 : Soit $f : E \longrightarrow B$ une application continue d'un espace $E$ dans un espace $B$ , $\psi$ et $\Phi$ des familles $\Phi$ adaptées de $E$ et de $B$ respectivement ; si $G$ est un faisceau sur $E$ , il existe une suite spectrale de cohomologie $(E^r)$ , où $E^2_{p+q,p} = H^p_{\Phi}(B\, , H^q(\mathcal{F}(A)))$ ($A$ étant la carapace de $B$ qui vient d'être définie), et où $E^{\infty}$ est le module gradué associé à $H_{\psi}(E\, , G)$ convenablement filtré.

3.- Détermination de $H(\mathcal{F}(A))$ dans un cas particulier.

Supposons maintenant que la condition suivante est remplie :

(III) L'image par $f$ d'un ensemble de la famille $\psi$ est fermé.

(Deux familles $\psi$ et $\Phi$ vérifiant les conditions (I) , (II) et (III) seront dites bien adaptées).

On peut alors interpréter commodément le faisceau $H(\mathcal{F}(A))$ : C'est le faisceau formé sur $B$ par les $\psi$-cohomologies des fibres $f^{-1}(b)$ , $b \in B$ (à coefficients dans le faisceau induit sur chaque fibre par $G$ ) .

En effet, soit $b \in B$ ; pour obtenir le module associé à $b$ dans le faisceau $H(\mathcal{F}(A))$ , on doit prendre le module de cohomologie de $A_b$ , en désignant par $A_b$ le quotient de $A$ par les éléments dont le support ne contient pas $b$ . Vu l'hypothèse (III) , $A_b$ est donc identique au quotient de $A^{\circ}$ par les éléments dont le support ne rencontre pas la "fibre" $F_b = f^{-1}(b)$ ; mais alors, il est bien connu que $H(A_b)$ est isomorphe à la cohomologie de $F_b$ , calculée pour la famille $\psi$ induite et le faisceau $G$ induit.

En toute rigueur, le résultat précédent ne suffit pas à définir sans ambiguïté le faisceau $H(\mathcal{F}(A))$ : il faut encore indiquer comment s'organisent

<u>localement</u> les modules $H_{\psi}(F_b , G)$ . Pour cela, on peut associer à toute partie fermée de $B$ la $\psi$-cohomologie (à valeurs dans $G$ ) de son image réciproque par $f$ ; on obtient ainsi un faisceau sur $B$ , au sens du paragraphe 2 de l'exposé 14 , qui est le faisceau cherché.

On obtient donc :

<u>Théorème 1.- Soit</u> $f : E \longrightarrow B$ <u>une application continue d'un espace</u> $E$ <u>dans un espace</u> $B$ , $\psi$ <u>et</u> $\Phi$ <u>deux familles</u> $\Phi$ <u>bien adaptées de</u> $E$ <u>et</u> $B$ . <u>Si</u> $G$ <u>est un faisceau de</u> $E$ , <u>il existe une suite spectrale de cohomologie</u> $(E^r)$ , <u>où</u> $E^2_{p+q,p} = H^p_{\Phi}(B , H^q_{\psi}(F_b , G))$ , <u>et où</u> $E^{\infty}$ <u>est le module gradué associé à</u> $H_{\psi}(E , G)$ <u>convenablement filtré</u>.

<u>Remarque</u> : Nous n'avons démontré ce théorème fondamental que sous des conditions assez restrictives ; il y aurait intérêt à les affaiblir (tout particulièrement la condition (III)). Par exemple, le théorème est-il vrai lorsque $E$ est un espace fibré localement trivial de base $B$ , localement compact et paracompact, et que l'on prend pour familles $\psi$ et $\Phi$ les familles de tous les fermés de $E$ et de $B$ ? Cette question semble étroitement liée à celle de la cohomologie des produits directs.

4.- <u>Exemples de familles bien adaptées</u>.

a) $E$ et $B$ sont des espaces paracompacts, on prend pour $\psi$ et $\Phi$ les familles de <u>tous</u> les sous-ensembles fermés. Les conditions (I) et (II) sont trivialement satisfaites. Pour que (III) le soit, il faut et il suffit que $f : E \longrightarrow B$ soit une application <u>fermée</u> (c'est exactement la définition).

b) $E$ et $B$ sont localement compacts ; on prend pour $\Phi$ une famille quelconque, et pour $\psi$ la famille des parties de $E$ se projetant sur $B$ suivant un ensemble de $\Phi$ et coupant l'image réciproque d'un compact de $B$ suivant un compact. On doit vérifier que la famille $\psi$ ainsi définie remplit bien toutes les conditions imposées à une "famille $\Phi$ " (c'est facile) ainsi que les conditions (I), (II) et (III) (même remarque) .

<u>Cas particuliers de</u> b)

$E$ et $B$ sont localement compacts, et on prend pour $\psi$ et $\Phi$ les familles de tous les compacts.

$E$ et $B$ sont localement compacts, $f : E \longrightarrow B$ est <u>propre</u> , on prend pour familles $\psi$ et $\Phi$ les familles de tous les fermés (il faut donc supposer que $E$ et $B$ sont paracompacts).

5.- Application à la théorie de la dimension (cohomologique) .

Soit B un espace, $\Phi$ une famille de parties de B vérifiant les conditions habituelles, K un anneau principal. On a défini les groupes $H^i_\Phi(B , L)$ , où L est un faisceau dont les groupes ponctuels sont des modules unitaires sur K . A partir de là, on a défini la "$\Phi$-K-dimension" de B : Borne supérieure des entiers i tels qu'il existe un L avec $H^i_\Phi(B , L) \neq 0$ . Nous la noterons $\dim_{\Phi,K}(B)$ .

Ceci étant, on a :

Proposition 4.- *Soit* $f : E \longrightarrow B$ *une application continue,* K *un anneau principal,* $\Psi$ *et* $\Phi$ *des familles bien adaptées de* E *et* B *respectivement. On a alors l'inégalité :*

$$\dim_{\Psi,K}(E) \leqslant \dim_{\Phi,K}(B) + \sup_{b\in B} \dim_{\Psi,K}(F_b) ,$$

*où l'on a posé* $F_b = f^{-1}(b)$ .

Soit $i = \dim_{\Phi,K}(B)$ , $j = \sup_{b\in B} \dim_{\Psi,K}(F_b)$ . Nous ne nous occuperons que du cas où i et j sont finis, laissant les autres cas au lecteur. Il nous faut alors démontrer que, si G est un faisceau quelconque sur E , et $n > i+j$ , on a $H^n_\Psi(E , G) = 0$ . Or, en utilisant la suite spectrale du théorème 1, il suffit de prouver que $E^2_{p+q,p}$ est nul si $p+q = n$ , et p quelconque. Or, si $p+q = n > i+j$ , on a soit $q > j$ , et alors $H^q_\Psi(F_b) = 0$ pour tout $b \in B$ , soit $p > i$ , et alors $H^p_\Phi(B , H^q_\Psi(F_b , G)) = 0$ puisque B est de $\Phi$-K-dimension $< p$ . C.Q.F.D.

Remarque : La proposition précédente est l'analogue cohomologique d'un théorème bien connu de la théorie de la dimension (Voir Hurewicz-Wallman, page 91, théorème VI-7).

6.- Application : théorème de Vietoris.

Plaçons-nous dans les conditions du théorème 1 , et supposons en outre :

a) Que l'image réciproque par f d'un ensemble de $\Phi$ est dans $\Psi$ .

b) Que le faisceau G est constant sur E (donc sur les $F_b$ )

c) Que $F_b$ est "acyclique" pour tout $b \in B$ , c'est-à-dire que $H^q_\Psi(F_b , G)$ est nul pour $q > 0$ , et isomorphe à G pour $q = 0$ (l'isomorphisme étant réalisé par l'augmentation).

Dans ces conditions :

Proposition 5.- *L'application* $f : E \longrightarrow B$ *définit un isomorphisme* $f^*$

<u>de</u> $H_{\Phi}(B , G)$ <u>sur</u> $H_{\psi}(E , G)$ .

Il résulte tout de suite des hypothèses que le faisceau $H^q_{\psi}(F_b , G)$ est nul pour $q > 0$ , et est identique au faisceau constant $G$ pour $q = 0$ . L'application du théorème 1 montre alors que $H_{\Phi}(B , G) \approx H_{\psi}(E , G)$ . Le fait que cet isomorphisme est celui défini par $f$ est laissé au lecteur.

<u>Remarque</u> : Quand $E$ et $B$ sont compacts, et que les familles $\psi$ et $\Phi$ sont celles de tous les compacts, on retrouve un théorème bien connu de Vietoris. A.Borel (J. de Math. pures et appl., <u>29</u>, 1950, p. 313-322 , théorème 5) a généralisé ce théorème de Vietoris dans le cadre de la théorie de Leray, c'est-à-dire de la cohomologie de Čech à supports compacts. Ici, nous l'obtenons dans des cas plus généraux, par exemple dans le cas où $E$ est paracompact et localement compact, $f$ propre, et où $\psi$ et $\Phi$ sont les familles de tous les fermés.

7.- <u>Cas où le faisceau de cohomologie de la fibre est localement constant sur la base</u>.

(Par "faisceau de cohomologie de la fibre" nous entendons le faisceau des $H_{\psi}(F_b , G)$) .

Supposons que $f : E \longrightarrow B$ définisse sur $E$ une structure d'<u>espace fibré localement trivial de base</u> $B$ , <u>fibre</u> $F$ . Supposons en outre que l'on ait deux familles $\psi$ et $\Phi$ bien adaptées sur $E$ et sur $B$ , et que $G$ soit un faisceau <u>constant</u> sur $E$. .Pouvons-nous affirmer alors que $H_{\psi}(F_b , G)$ forme un faisceau <u>localement constant</u> sur $B$ ?

En "localisant par rapport à $B$" le problème précédent, on se ramène tout de suite à la question suivante :
Supposons que $E = B \times F$ , $f$ étant la projection canonique $B \times F \longrightarrow B$ , que $\psi$ et $\Phi$ soient bien adaptées, et que $\Phi$ soit formée de tous les sous-ensembles fermés de $B$ . Peut-on affirmer que $H_{\psi}(F_b , G)$ forme un faisceau constant sur $B$ ?

Pour tout $b \in B$ , la projection canonique $F_b = \{b\} \times F \longrightarrow F$ définit un isomorphisme $k_b$ de $H_{\psi}(F , G)$ sur $H_{\psi}(F_b , G)$ . Mais ceci ne suffit pas à montrer que les $H_{\psi}(F_b , G)$ forment un faisceau constant : il faut encore vérifier que, quel que soit $\alpha \in H_{\psi}(F , G)$ et $b \in B$ , il existe un voisinage $V$ de $b$ tel que , pour tout $c \in V$ , $k_b(\alpha)$ "induise" $k_c(\alpha)$ (ou, si l'on préfère, que les $k_c(\alpha)$ , $c \in V$ , forment une <u>section</u> du faisceau $H_{\psi}(F_c , G)$ au dessus de $V$ ) . Or, supposons que, <u>pour tout</u> $T \in \psi$ , $T \subset F_b$ , <u>on ait</u>

$T \times B \in \Psi$. La projection $p : B \times F \longrightarrow F$ définit alors $p^*$ : $H_\Psi(F_b , G) \longrightarrow H_\Psi(B \times F , G)$, et l'on peut parler de la classe $p^*(\alpha)$. Cette dernière, à son tour, induit des classes dans les fibres $F_c$, et il est clair, à la fois que ces classes forment une section, et que ce sont les $k_c(\alpha)$.

On voit donc que nous avons pu répondre affirmativement à la question précédente, à condition d'introduire une condition supplémentaire (que nous avons soulignée). On peut montrer que cette condition est équivalente à la suivante, en apparence plus faible :

(IV) Quel que soit $T$, $T \in \Psi$, $T \subset F_b$, il existe un voisinage fermé $V$ de $b$ tel que $T \times V \in \Psi$.

(Pour montrer l'équivalence en question, utiliser la paracompacité de $B$ ainsi que la condition (II) )

Ce qui précède n'est correct, comme on le voit tout de suite, que si l'on suppose en outre :

(V) Tout point de $B$ appartient à un ensemble de $\Phi$.

(Sinon, en effet, on pourrait simplement dire que $H_\Psi(F_b , G)$ est localement constant sur le sous-ensemble ouvert de $B$ formé des éléments appartenant à un ensemble de $\Phi$ ).

En définitive, on a donc :

Proposition 6.- Soit $E$ un espace fibré localement trivial de fibre $F$ et de base $B$ ; on suppose $E$ et $B$ munis de deux familles $\Psi$ et $\Phi$ vérifiant les conditions (I), (II), (III), (IV), (V). Alors, si $G$ est un faisceau constant sur $E$, le faisceau formé par $H_\Psi(F_b , G)$ est localement constant sur $B$.

Ce résultat, joint au théorème 1, permet de développer la théorie cohomologique des espaces fibrés localement triviaux. Comme cette théorie est très analogue à celle des exposés 9 et 10, nous ne la développerons pas à nouveau, renvoyant le lecteur aux articles cités de J. Leray.

Remarque : On observera que les conditions (I), (II), (III), (IV) sont vérifiées dans l'exemple b) du numéro 4. La condition (V) doit être postulée en plus. Par exemple, la proposition 6 est valable lorsque $E$ est localement compact et que l'on prend pour familles $\Psi$ et $\Phi$ tous les compacts, ou bien pour famille $\Phi$ tous les fermés de $B$ (supposé paracompact) et pour famille $\Psi$ les fermés de $E$ qui rencontrent l'image réciproque d'un compact de $B$

suivant un compact, ou bien, plus particulièrement, lorsque E est paracompact et localement compact, F compact, et que l'on prend pour familles $\Psi$ et $\Phi$ tous les fermés . Etc, etc .

8.- Généralisations.

Nous nous bornerons à de brèves indications.

Il y a intérêt à établir la proposition 6 sous des hypothèses moins restrictives que celles données plus haut. Par exemple, Leray a montré que si E était un espace localement compact, localement connexe, fibré principal par un groupe connexe, le faisceau $H_{\Psi}(F_b , G)$ était simple (en cohomologie à supports compacts).

Il y aurait également intérêt à récupérer les espaces fibrés à fibres exceptionnelles.