SAMUEL EILENBERG

Homologie des groupes. II : existence

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 2, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A2_0>

Séminaire H. CARTAN,

E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique

HOMOLOGIE DES GROUPES. II : EXISTENCE.

(Exposé de Samuel EILENBERG, le 20.11.1950).

4.- Π -complexes.

Un Π-complexe C est une suite :

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow C_q \longleftarrow \dots$$

de Π-groupes à gauche et de Π-homomorphismes, tels que $dd = 0$, augmentée d'un Π-homomorphisme $\varepsilon : C_0 \longrightarrow Z$ (Π opérant trivialement sur Z) tel que $\varepsilon_0 d_1 = 0$.

Un Π-complexe est dit Π-libre (ou, en abrégé, libre) si tous les C_q sont Π-libres.

Un Π-complexe est dit acyclique si la suite

$$0 \longleftarrow Z \longleftarrow C_0 \longleftarrow C_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow C_q \longleftarrow \dots$$

est exacte. Cette dernière condition est équivalente à : $H_q(C) = 0$ pour $q > 0$, et ε induit un isomorphisme de $H_0(C)$ sur Z .

Soit alors C un Π-complexe quelconque, et A un Π-groupe à droite. Les produits tensoriels $A \underset{\Pi}{\otimes} C_q$ sont alors définis comme produits tensoriels de $Z(\Pi)$-modules (i.e. ce sont les quotients du produit tensoriel sur Z par l'identification $ax \otimes c_q = a \otimes xc_q$) . La suite :

$$0 \longleftarrow A \underset{\Pi}{\otimes} C_0 \longleftarrow A \underset{\Pi}{\otimes} C_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow A \underset{\Pi}{\otimes} C_q \longleftarrow \dots$$

définit un complexe de chaînes, de groupes d'homologie $H_q(A \underset{\Pi}{\otimes} C)$.

Dans la suite de ce numéro, nous allons donner des conditions portant sur C , suffisantes pour que les groupes $H_q(A \underset{\Pi}{\otimes} C)$ forment, lorsque A varie, une théorie de l'homologie de Π , au sens de l'exposé précédent.

Soit donné un Π-homomorphisme $f : A \longrightarrow B$; il induit un homomorphisme $A \underset{\Pi}{\otimes} C \longrightarrow B \underset{\Pi}{\otimes} C$ qui, à son tour, induit des homomorphismes

$$f_* : H_q(A \underset{\Pi}{\otimes} C) \longrightarrow H_q(B \underset{\Pi}{\otimes} C) .$$

On voit tout de suite que le système $\left\{ H_q(A \underset{\Pi}{\otimes} C) , f_* \right\}$ vérifie les axiomes (1) et (2) .

Supposons maintenant que C soit libre, et soit une suite exacte :

$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Alors, la suite :

$0 \longrightarrow A' \otimes_{\pi} C_q \longrightarrow A \otimes_{\pi} C_q \longrightarrow A'' \otimes_{\pi} C_q \longrightarrow 0$ est exacte , C_q étant π-libre. Il en résulte la suite exacte : $0 \to A' \otimes_{\pi} C \to A \otimes_{\pi} C \to A'' \otimes_{\pi} C \to 0$. Ceci définit classiquement un homomorphisme :

$$\partial : H_q(A'' \otimes_{\pi} C) \longrightarrow H_{q-1}(A' \otimes_{\pi} C) .$$

Il résulte des théorèmes généraux sur l'homologie des complexes et sous-complexes que le système :

$$H = \{ H_q(A \otimes_{\pi} C) , f_* , \partial \}$$

vérifie les axiomes (3) et (4) .

<u>Théorème</u>. <u>Si le</u> π-<u>complexe</u> C <u>est</u> π-<u>libre et acyclique, alors</u> H <u>est une théorie de l'homologie pour</u> π .

<u>Démonstration</u> : Il suffit de vérifier les axiomes (5) et (6) . Visiblement $H_q(A \otimes_{\pi} C) = 0$ pour $q < o$.

Comme la suite $C_1 \xrightarrow{d} C_o \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ est exacte, il résulte des propriétés générales du produit tensoriel que la suite :

$$A \otimes_{\pi} C_1 \longrightarrow A \otimes_{\pi} C_o \longrightarrow A \otimes_{\pi} Z \longrightarrow 0$$

est exacte. D'où le fait que $H_o(A \otimes_{\pi} C)$ s'identifie à $A \otimes_{\pi} Z$ qui, lui-même, s'identifie à A_{π} (au moyen de l'isomorphie canonique de $A \otimes_{\pi} Z$ sur A).

Soit maintenant A un π-groupe à droite, π-libre. A est donc isomorphe à la somme directe d'un certain nombre de copies de $Z(\pi)$ considéré comme π-groupe à droite. Les isomorphismes canoniques :

$$Z(\pi) \otimes_{\pi} C_q \approx Z \otimes C_q \approx C_q$$

entraînent $H_q(Z(\pi) \otimes_{\pi} C) = 0$ pour $q > o$. D'où $H_q(A \otimes_{\pi} C) = 0$ pour $q > o$.

Occupons-nous maintenant de cohomologie et considérons un π-groupe à gauche A . Nous noterons $Hom_{\pi}(C_q , A)$ le groupe de tous les π-homomorphismes : $C_q \to A$. Un tel homomorphisme, composé avec $d : C_{q+1} \longrightarrow C$ donne un homomorphisme $C_{q+1} \longrightarrow A$. D'où un homomorphisme canonique

$$\delta : Hom_{\pi}(C_q , A) \longrightarrow Hom_{\pi}(C_{q+1} , A) \quad , \text{avec} \quad \delta\delta = o .$$

On obtient ainsi un complexe de cochaînes $Hom_{\pi}(C , A)$, de groupes de cohomologie $H^q(Hom_{\pi}(C , A))$. Un π-homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ induit un homomorphisme $Hom_{\pi}(C , A) \to Hom_{\pi}(C , B)$, qui, à son tour, induit des homomorphismes :

$$f_* : H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , A)) \longrightarrow H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , B)) \quad .$$

Si l'on a une suite exacte : $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, alors la suite :

$$0 \to \mathrm{Hom}_\pi(C , A') \to \mathrm{Hom}_\pi(C , A) \to \mathrm{Hom}_\pi(C , A'') \to 0$$

est exacte si C est π-<u>libre</u>. Ceci définit classiquement des homomorphismes :

$$\delta : H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , A'')) \longrightarrow H^{q+1}(\mathrm{Hom}_\pi(C , A')) \quad .$$

Le système $H = \{H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , A)) , f_* , \delta\}$ vérifie les axiomes $(1_c) - (4_c)$.

<u>Théorème</u>. <u>Si le π-complexe C est π-libre et acyclique, alors H est une théorie de la cohomologie pour π</u> .

<u>Démonstration</u> : Il suffit de vérifier les axiomes (5_c) et (6_c) . Visiblement $H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , A)) = 0$ pour $q < 0$. Comme la suite $C_1 \xrightarrow{d} C_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ est exacte, il résulte des propriétés générales de $\mathrm{Hom}_\pi(\ , \ )$ que la suite :

$$\mathrm{Hom}_\pi(C_1 , A) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\pi(C_0 , A) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\pi(Z , A) \longleftarrow 0$$

est exacte. D'où l'identification de $H^0(\mathrm{Hom}_\pi(C , A))$ avec $\mathrm{Hom}_\pi(Z , A)$; et, si nous identifions tout homomorphisme $\varphi : Z \longrightarrow A$ avec l'élément $\varphi(1) \in A$, nous obtenons $\mathrm{Hom}_\pi(Z , A) = A^\pi$.

Supposons maintenant que A soit π-injectif. Soit $\varphi : C_q \longrightarrow A$ $(q > 0)$, un π-homomorphisme qui est un cocycle. Dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} C_{q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{d_q} & C_{q-1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ & & A & & \end{array}$$

la première ligne est exacte, et $\varphi \circ d_{q+1} = \delta\varphi = 0$. Ceci définit un homomorphisme ψ de l'image de d_q dans A , qui , puisque A est π-injectif, peut être prolongé en un homomorphisme $\psi' : C_{q-1} \longrightarrow A$. D'où $\delta\psi' = \psi \circ d_q = \varphi$, et $H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , A)) = 0$ pour tout $q > 0$.

5.- <u>Le complexe non-homogène</u>.

Pour terminer la démonstration d'existence des théories de l'homologie et de la cohomologie d'un système π , il suffit d'exhiber au moins un π-complexe π-libre et acyclique.

Soit $C_q(\pi)$ $(q \geq 0)$ le π-groupe (à gauche) libre qui admet les suites

$$[x_1 , \dots , x_q] \qquad x_1 , \dots , x_q \in \pi$$

comme π-base. En particulier, $C_o(\pi)$ admet le symbole $[\,]$ comme π-base.
Posons, pour $q > o$:

$$d[x_1, \dots, x_q] = x_1[x_2, \dots, x_q] + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i [x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_q] + (-1)^q [x_1, \dots, x_{q-1}]$$

En particulier, on a :

$$d[x] = x[\,] - [\,]$$
$$d[x,y] = x[y] - [xy] + [x]$$
$$d[x,y,z] = x[y,z] - [xy, z] + [x,yz] - [x,y] \quad .$$

On obtient ainsi des π-homomorphismes $d_q : C_q(\pi) \longrightarrow C_{q-1}(\pi)$ avec $dd = 0$, comme on peut le vérifier par un calcul direct. De plus, on définit le π-homomorphisme $\varepsilon : C_o(\pi) \longrightarrow Z$ en posant $\varepsilon[\,] = 1$. On obtient donc un π-complexe $C(\pi)$ appelé le complexe non-homogène de π. Pour montrer que $C(\pi)$ est acyclique, définissons des homomorphismes (qui ne sont pas des π-homomorphismes) :

$$D_q : C_q(\pi) \longrightarrow C_{q+1}(\pi) \qquad q \geq o$$
$$D_{-1} : Z \longrightarrow C_o(\pi) \quad ,$$

en posant

$$D_q(x[x_1, \dots, x_q]) = [x, x_1, \dots, x_q] \quad (q \geq o)$$
$$D_{-1}(1) = [\,] .$$

On vérifie par un calcul direct que :

$$dD_q c + D_q dc = c \qquad c \in C_q(\pi) \qquad q > o$$
$$dD_o c + D_{-1}\varepsilon c = c \qquad c \in C_o(\pi) \quad .$$

D'où, si $dc = o$ (ou si $\varepsilon c = o$ pour $q = o$), $c = dD_q c$. Il en résulte l'exactitude de la suite :

$$0 \longleftarrow Z \longleftarrow C_o(\pi) \longleftarrow \dots \longleftarrow C_q(\pi) \longleftarrow \quad ,$$

ce qui montre bien que $C(\pi)$ est acyclique.

Les groupes d'homologie et cohomologie obtenus en utilisant le complexe non-homogène $C(\pi)$ seront notés $H_q(\pi, A)$ et $H^q(\pi, A)$.
Si l'on a un homomorphisme $\varphi : \pi' \longrightarrow \pi$, alors :

$$[x_1, \dots, x_q] \longrightarrow [\varphi x_1, \dots, \varphi x_q] \qquad x_1, \dots, x_q \in \pi'$$

définit une application $C(\pi') \longrightarrow C(\pi)$, qui à son tour induit des homomorphismes :

$$\varphi_* : H_q(\pi', A) \longrightarrow H_q(\pi, A) \quad \text{et} \quad \varphi^* : H^q(\pi, A) \longrightarrow H^q(\pi', A) \quad .$$

Les homomorphismes φ_* (resp. φ^*) sont définis pour tout π-groupe A à droite (resp. à gauche), et vérifient les conditions du 1er théorème d'unicité (resp. du second).

Si π est un groupe, nous pouvons passer à la définition <u>homogène</u> de $C(\pi)$, en posant :

$$(x_o , \ldots , x_q) = x_o [x_o^{-1}x_1 , x_1^{-1}x_2 , \ldots , x_{q-1}^{-1}x_q] \ , \quad x_o , \ldots , x_q \in \pi \ .$$

Les $(x_o , \ldots , x_q)$ forment une base (mais pas une π-base) de $C_q(\pi)$ et :

$$x(x_o , \ldots , x_q) = (xx_o , \ldots , xx_q)$$

$$d(x_o , \ldots , x_q) = \sum_{i=o}^{q} (-1)^i (x_o , \ldots , \hat{x}_i , \ldots , x_q)$$

$$\varepsilon(x) = 1$$

$$[x_1 , \ldots , x_q] = (1 , x_1 , x_1x_2 , \ldots , x_1x_2 \ldots x_q) \quad .$$

<u>Exercice I</u> - Montrer que, pour tout $y \in \pi$ (π étant un groupe), l'automorphisme de $C(\pi)$ défini par :

$$(x_o , \ldots , x_q) \longrightarrow (x_o y^{-1} , \ldots , x_q y^{-1})$$

induit sur $H_q(\pi , A)$ et $H^q(\pi, A)$ l'automorphisme identique.

<u>Exercice II</u> - Soit $C'_q(\pi)$ le π-sous-groupe de $C_q(\pi)$ engendré par les $[x_1 , \ldots , x_q]$ dont l'une au moins des coordonnées est égale à 1. Montrer que $C^N_q(\pi) = C_q(\pi)/C'_q(\pi)$ forme un π-complexe acyclique.
