J-P. Serre

Applications algébriques de la cohomologie des groupes. I

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A5_0>

Séminaire H. CARTAN
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

APPLICATIONS ALGÉBRIQUES DE LA COHOMOLOGIE DES GROUPES. I.
(Exposé de J-P. SERRE, le 18.12.1950)

1.- Préliminaires.

Dans cet exposé et le suivant, il sera exclusivement question de cohomologie des groupes et non d'homologie.

Rappelons qu'étant donné un groupe G (non nécessairement abélien) et un groupe abélien A sur lequel opère G à gauche, on a défini les groupes de cohomologie $H^i(G , A)$; ces groupes peuvent être définis, par exemple, au moyen des cochaînes sur G à valeurs dans A, munies du cobord habituel :

$$(\delta f)(x_1 , \dots , x_{i+1}) = x_1 . f(x_2 , \dots , x_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(x_1 , \dots , x_j x_{j+1} , \dots , x_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(x_1 , \dots , x_i) .$$

Si A est muni d'un ensemble d'opérateurs S permutant avec les opérateurs de G, alors on peut faire opérer S sur les groupes $H^i(G , A)$: cela résulte de l'axiome (II_c) de l'exposé 1, ou bien d'une définition directe à partir des cochaînes. En particulier, si A est un espace vectoriel sur un corps k, et si les opérations de G sont k-linéaires, $H^i(G , A)$ est un espace vectoriel sur k.

Enfin, signalons le résultat suivant :
Soit G un groupe fini à n éléments, et $h \in H^i(G , A)$, $i > 0$; on a : $nh = 0$.

Soit f un cocycle de la classe h, et écrivons que $(\delta f)(x_1 , \dots , x_{i+1}) = 0$. On obtient une certaine identité faisant intervenir les $i+1$ variables $x_1 , \dots , x_{i+1}$. Faisons parcourir à x_{i+1} le groupe G, et ajoutons les identités ainsi obtenues. Si l'on pose :

$$g(x_1 , \dots , x_{i-1}) = \sum_{x_i \in G} f(x_1 , \dots , x_i) \quad , \text{ on obtient :}$$

$$nf = (-1)^i \delta g \quad , \text{ c.q.f.d.}$$

Autre démonstration. On écrit A comme sous-groupe stable d'un groupe G-injectif ; on s'aperçoit alors, en écrivant la suite exacte de l'axiome (4_c), qu'il suffit de démontrer le résultat en question pour $i = 1$, et que, pour $i = 1$, il est presque évident.

2.- Le premier groupe de cohomologie. Application à l'étude des représentations linéaires.

Les 1-cochaînes sont les applications : $f : G \longrightarrow A$.
Les cocycles sont celles qui vérifient :

$f(xy) = f(x) + x.f(y)$,

on les appelle homomorphismes croisés. Si par hasard G opère trivialement sur A , ce sont simplement les homomorphismes de G dans A .
Les cobords sont les cochaînes de la forme :

$f(x) = x.a - a$, $a \in A$.

On les appelle homomorphismes croisés principaux. Si G opère trivialement sur A , tous les cobords sont donc nuls. D'où : Si G opère trivialement sur A , on a : $H^1(G , A) = \mathrm{Hom}(G , A)$.
(Signalons que l'on a aussi, dans ce cas, $H_1(G , A) = G^o \otimes A$, où G^o désigne le quotient de G par son groupe des commutateurs ; ces deux résultats peuvent aussi s'obtenir par voie topologique, en utilisant le théorème d'Hurewicz et la formule des coefficients universels).

Nous allons maintenant utiliser le groupe H^1 pour étudier les extensions de représentations linéaires.

Considérons une suite exacte :

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0 ,$$

où V , E , W désignent des espaces vectoriels sur un corps commutatif k sur lesquels opère le groupe G ; bien entendu, on suppose d'une part que les opérateurs de k et G commutent (on a donc des représentations linéaires de G) , et d'autre part que les applications $i : V \longrightarrow E$ et $p : E \longrightarrow W$ commutent tant avec k qu'avec G . Nous nous proposons, V et W étant donnés, de chercher tous les E possibles ; on observera que la somme directe $V + W$ convient toujours.

Pour cela nous allons définir une classe caractéristique dont la donnée déterminera E sans ambiguïté (à un isomorphisme près). Désignons par $\mathrm{Hom}(A , B)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de l'espace vectoriel A dans l'espace vectoriel B . On a la suite exacte :

$$\text{(A)} \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,W) \longrightarrow 0 .$$

Que cette suite soit exacte résulte du fait que E est isomorphe, <u>en tant qu'espace vectoriel</u>, à la somme directe de V et W .

On peut faire opérer le groupe G dans chacun des termes de la suite exacte précédente, en faisant correspondre à l'homomorphisme $u : A \longrightarrow B$, l'homomorphisme $x.u$ défini par :

$$(x.u)(a) = x.u(x^{-1}a) \quad .$$

Pour que u soit un G-homomorphisme, il faut et il suffit que $x.u = u$ pour tout $x \in G$ .Autrement dit: $H^0(G , \mathrm{Hom}(A , B)) = \mathrm{Ophom}(A , B)$.

Appliquons alors à la suite (A) l'axiome de la suite exacte. On obtient :

$$\text{(B)} \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ophom}(W,V) \longrightarrow \mathrm{Ophom}(W,E) \longrightarrow \mathrm{Ophom}(W,W) \xrightarrow{\delta} H^1(G,\mathrm{Hom}(W,V))$$

Soit $I \in \mathrm{Ophom}(W,W)$ l'application identique de W sur W , et posons $J = \delta I$. On a $J \in H^1(G,\mathrm{Hom}(W,V))$, c'est la classe caractéristique cherchée.

Pour que E soit somme directe (en tant que représentation) de V et W , il faut et il suffit que l'on puisse trouver un homomorphisme permis : $W \xrightarrow{K} E$, tel que $K \circ p = I$; ceci signifie que I est contenu dans l'image de $\mathrm{Ophom}(W,E)$, ou encore que $J = 0$, puisque (B) est une suite exacte. D'où :

<u>Pour que</u> E <u>soit somme directe des représentations</u> V <u>et</u> W , <u>il faut et il suffit que</u> $J = 0$.

<u>Calcul de la classe fondamentale</u>.

Ecrivons E comme somme directe de V et d'un supplémentaire W' . Si E_x désigne l'automorphisme de E défini par x , on peut écrire E_x sous forme d'une matrice :

$$E_x = \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ R_x & W_x \end{pmatrix}$$

(dans cette formule, V_x et W_x ne sont autres que les automorphismes définis par x sur V et W) .

Considérons la 1-cochaîne : $j(x) = R_x.W_x^{-1}$, à valeurs dans $\mathrm{Hom}(W , V)$; en remontant à la définition de l'homomorphisme δ de la suite exacte on voit que :

<u>La cochaîne</u> $j(x) = R_x.W_x^{-1}$ <u>est un cocycle qui appartient à la classe</u> J .

Ceci permet donc de calculer explicitement J , lorsque E_x est donné.

<u>Corollaire</u> (théorème de Maschke). <u>Soit</u> G <u>un groupe fini à</u> n <u>éléments et supposons que la caractéristique de</u> k <u>ne divise pas</u> n . <u>Alors</u> E <u>est</u>

<u>somme directe de</u> V <u>et</u> W . (D'où le fait que toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles).

En effet, d'après le numéro 1 , on a $nJ = 0$, d'où $J = 0$.

<u>Réciproque</u>. Soit J une classe de cohomologie de $H^1(G , \mathrm{Hom}(W,V))$, et soit $j(x)$ un cocycle de J . Montrons qu'il existe une représentation E_x correspondant à J .

Nous n'avons qu'à définir E_x par la matrice :

$$E_x = \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ j(x)W_x & W_x \end{pmatrix}$$

Il faut simplement vérifier que $E_x . E_y = E_{xy}$. Or on a :

$$\begin{pmatrix} V_x & 0 \\ j(x)W_x & W_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_y & 0 \\ j(y)W_y & W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_xV_y & 0 \\ V_xj(y)W_y + j(x)W_xW_y & W_xW_y \end{pmatrix}$$

Il faut donc voir que :

$$j(xy)W(xy) = V_xj(y)W_y + j(x)W_xW_y \quad , \quad \text{ou :}$$

$$j(xy) = V_xj(y)W_x^{-1} + j(x) \quad ,$$

ce qui exprime bien que $j(x)$ est un cocycle. On voit donc que :

<u>Les classes de représentations</u> E , <u>qui sont des extensions de</u> V <u>par</u> W , <u>correspondent biunivoquement aux éléments de</u> $H^1(G , \mathrm{Hom}(W,V))$.

<u>Remarque</u>. L'ensemble de ces classes se trouve donc muni d'une structure d'espace vectoriel, celle de $H^1(G , \mathrm{Hom}(W,V))$, qui correspond, sous la forme matricielle de la page précédente, à la structure vectorielle des R_x . On peut donner une définition directe de la somme de deux classes. Cf. Bibliographie.

<u>Généralisations diverses</u>.

a) Au lieu d'étudier des représentations linéaires de G , on aurait pu considérer le cas plus général où on se donne des opérateurs S commutant avec les opérateurs de G . Les démonstrations précédentes s'appliquent sans changement, à condition de supposer que E est <u>somme directe de</u> V <u>et</u> W <u>pour les opérateurs de</u> S .

Il n'est même pas nécessaire de supposer W abélien.

b) On peut étudier de façon analogue les représentations linéaires d'algèbres associatives, ou d'algèbres de Lie, moyennant une définition convenable de leur homologie. Par exemple, si L est une algèbre de Lie semi-simple, on démontre en employant le critère de Cartan et les opérateurs de Casimir que $H^1(L , A) = 0$, pour toute représentation de L , d'où la complète réductibilité des représentations (J.H.C. Whitehead, Quat. Jour. 8, 1937, p. 220-237) .

3.- Extensions de groupes à noyau abélien.

On se propose d'étudier les suites exactes de la forme :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 \qquad ,$$

où A est un groupe abélien, noté additivement, sous-groupe invariant d'un groupe E , le quotient étant le groupe (non nécessairement abélien) G . Les groupes E et G seront notés multiplicativement.

Les éléments de E opèrent sur E au moyen des automorphismes intérieurs ; ces derniers respectent A , et opèrent donc sur A . Comme A est abélien, A opère trivialement sur lui-même par la représentation précédente. On obtient alors par passage au quotient une représentation : $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ qui sera notée θ . On a donc, si $y \in E$:

$$p(y).a = y\, a\, y^{-1} \qquad \text{pour tout } a \in A \quad .$$

A partir de maintenant nous étudierons uniquement les extensions E de A par G qui correspondent à des opérateurs donnés sur A . De façon précise, on va voir que ces extensions correspondent biunivoquement aux éléments de $H^2(G , A)$.

Nous aurons besoin pour cela de l'exercice II de l'exposé 2 , exercice qui affirme que l'on ne change rien à la cohomologie de G en se bornant à considérer les cochaînes nulles lorsque l'une des variables vaut 1 (cochaînes normalisées).

Cela étant, soit E une extension, et k une section, c'est-à-dire une application de G dans E telle que $p \circ k = 1$.

On a :

$$k(x)k(y) = u(x,y).k(xy) \qquad (1)$$

avec

$$u(x,y) \in A \qquad (2)$$

En outre, si l'on suppose que $k(1) = 1$, ce qui est licite, on a $u(1,y) = u(x,1) = o$. On a donc défini une 2-cochaîne normalisée sur G à valeurs dans A .

Cette cochaîne (ou système de facteurs de E) détermine la structure de de groupe de E . De façon précise, identifions $A \times G$ à E par l'application : $(a,x) \longrightarrow a.k(x)$. On obtient ainsi une multiplication sur $A \times G$ que l'on détermine en écrivant :

$$\begin{aligned} a.k(x).b.k(y) &= a.k(x)bk(x)^{-1}.k(x)k(y) \\ &= a.k(x)bk(x)^{-1}.u(x,y).k(xy) \end{aligned} \tag{3}$$

D'où la formule du produit :

$$(a,x).(b,y) = (a+x.b + u(x,y)\ ,\ xy) \tag{4}$$

On voit ainsi que deux extensions qui ont même système de facteurs sont isomorphes. Réciproquement, soit u une 2-cochaîne normalisée, et définissons une structure multiplicative sur $A \times G$ au moyen de la formule (4). Cette multiplication est-elle associative ?

On a :

$$((a,x)(b,y))(c,z) = (a+xb+u(x,y)+xyc+u(xy,z)\ ,\ xyz) \tag{5}$$

$$(a,x)((b,y)(c,z)) = (a+xb+xyc+xu(y,z)+u(x,yz)\ ,\ xyz) \tag{6}$$

En comparant (5) et (6) , on voit que l'associativité est équivalente à :

$$xu(y,z) - u(xy,z) + u(x,yz) - u(x,y) = o \tag{7}$$

ce qui signifie exactement que u <u>est un 2-cocycle</u>.

Cette condition étant supposée satisfaite, on vérifie tout de suite que l'élément $(o,1)$ est élément neutre, et que l'inverse de (a,x) est $(-x^{-1}.a - u(x^{-1}.x)\ ,\ x^{-1})$; on a bien obtenu une extension de A par G .

Reste maintenant à voir comment le cocycle u dépend de la section k choisie. Si l'on prend une autre section k' , on peut écrire :

$$k'(x) = v(x)k(x) \qquad \text{avec} \qquad v(x) \in A \qquad \text{et} \qquad v(1) = 1 \tag{8}$$

Calculons le système de facteurs u' relatif à k' :

$$\begin{aligned} k'(x)k'(y) &= v(x)k(x)v(y)k(y) = v(x)k(x)v(y)k(x)^{-1}k(x)k(y) \\ &= v(x).k(x)v(y)k(x)^{-1}.u(x,y).k(xy) \\ &= v(x).k(x)v(y)k(x)^{-1}.u(x,y).v^{-1}(x,y).k'(xy) \end{aligned} \tag{9}$$

ce qui montre que :

$$k'(x)k'(y) = u'(x,y)k'(xy) \tag{10}$$

avec :

$$u'(x,y) = u(x,y) + x.v(y) - v(xy) + v(x) \qquad , \tag{11}$$

ou encore :

$$u' = u + \delta v \quad . \tag{12}$$

La formule (12) montre que u <u>est un cocycle déterminé à un cobord près</u>, autrement dit, définit canoniquement un élément de $H^2(G, A)$.

On a bien montré que <u>les classes d'extensions de</u> A <u>par</u> G <u>correspondent biunivoquement aux éléments de</u> $H^2(G, A)$ (lorsque les opérateurs définis par G sur A sont donnés).

<u>Exemple</u> - L'extension de A par G qui correspond à l'élément o de $H^2(G, A)$ s'appelle le <u>produit direct croisé</u> de A par G ; elle est caractérisée par l'existence d'une section k correspondant à un système de facteurs nul, c'est-à-dire par l'existence d'<u>une section qui soit un homomorphisme</u>. E est alors le produit de A et du sous-groupe section, image de k . On notera que ce dernier sous-groupe n'est <u>invariant</u> que si G opère trivialement sur A , auquel cas on a : $E = A \times G$.

Deux sections qui sont des homomorphismes diffèrent par une 1-cochaîne v qui, d'après (12) , doit être un cocycle. En particulier, si l'on sait que $H^1(G, A) = 0$, v est un cobord, ce qui se traduit par l'existence d'un $a \in A$ tel que :

$$k'(x) = ak(x)a^{-1} \tag{13}$$

Donc :

<u>Si</u> $H^1(G, A) = 0$, <u>deux sous-groupes sections sont conjugués par un élément de</u> A . (Dans la théorie des algèbres de Lie, le résultat analogue, valable pour les algèbres semi-simples, est connu sous le nom de théorème de Malcev)

D'après le numéro 1, ce sera en particulier le cas si G est fini d'ordre n , et si la division par n est possible d'une seule manière dans A .

<u>Exemple de produit direct croisé</u>.

Le groupe des déplacements de R^3 , E , est un produit direct croisé du sous-groupe $A = R^3$ des translations par le groupe $SO(3)$ des rotations. Les différents groupes sections sont les rotations autour d'un point de R^3 , ce sont bien des groupes conjugués par des translations, conformément au théorème de Malcev. Pour montrer qu'il n'y a pas d'autres sous-groupes sections (sans utiliser ce dernier théorème), on peut utiliser le fait que tout groupe compact de déplacements a un point fixe (évident, au moyen des centres de gravité).

Bibliographie

On la trouvera dans :

Samuel EILENBERG, Bull. amer. math. Soc., <u>55</u>, 1949, p. 3-27 .