Samuel Eilenberg

La suite spectrale. I : construction générale

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. nº 8, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A8_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique

LA SUITE SPECTRALE. I : CONSTRUCTION GÉNÉRALE.

(Exposé de Samuel EILENBERG, le 22.1.1951).

1.- Fondations.

Nous considérerons un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle), notée $A < B$, qui est réflexive $(A < A)$ et transitive ($A < B$ et $B < C$ entraînent $A < C$) . On supposera que l'ensemble contient un plus petit élément, noté 0 , et un plus grand élément, noté 1 ; on a donc $0 < A < 1$ pour tout A . Nous considérerons des paires (A , B) où $B < A$, et nous écrirons $(A , B) < (A' , B')$ lorsque $A < A'$ et $B < B'$. De même, nous considérerons des triples (A , B , C) où $C < B < A$, et nous écrirons $(A , B , C) < (A',B',C')$ lorsque $A < A'$, $B < B'$, et $C < C'$. Le triple $(A , B , 0)$ sera identifié à la paire (A , B) , et la paire $(A , 0)$ sera identifiée à l'élément A .

Nous supposerons qu'à toute paire (A , B) l'on ait associé un groupe abélien (ou un module sur un anneau), noté $H(A , B)$, qu'à toute inégalité $(A , B) < (A', B')$ l'on ait associé un homomorphisme $H(A , B) \longrightarrow H(A', B')$, et qu'à tout triple (A , B , C) l'on ait associé un homomorphisme d : $H(A , B) \longrightarrow H(B , C)$.

Ces trois termes primitifs seront assujettis aux axiomes suivants :

(H.1) $H(A , B) \longrightarrow H(A , B)$ est l'identité .

(H.2) Si $(A , B) < (A' , B') < (A'' , B'')$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H(A , B) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(A'' , B'') \\ & H(A', B') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(H.3) Si $(A , B , C) < (A', B', C')$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H(A , B) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & H(B , C) \arrow[d] \\ H(A', B') \arrow[r, "d"] & H(B', C') \end{tikzcd}$$

(H.4) Pour tout triple (A , B , C) , les inégalités $(B , C) < (A , C) < (A , B)$ donnent lieu à la suite exacte :

$$\cdots \to H(A,B) \xrightarrow{d} H(B,C) \longrightarrow H(A,C) \longrightarrow H(A,B) \xrightarrow{d} H(B,C) \longrightarrow \cdots$$

Le fait que $H(A) \longrightarrow H(A)$ est un isomorphisme, joint à l'exactitude de la suite :

$$H(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A , A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A)$$

entraîne :

(1.1) $$H(A , A) = 0$$

<u>Remarque</u> : Il suffit de supposer que l'homomorphisme d : $H(A , B) \longrightarrow H(B , C)$ est défini seulement pour les paires, c'est-à-dire quand $C = 0$. Les axiomes (H.3) et (H.4) devront être énoncés avec C (et C') égal à 0. On pourra alors définir $d : H(A , B) \longrightarrow H(B , C)$ pour un triple (A , B , C) par la composition des homomorphismes :

$$H(A , B) \xrightarrow{d} H(B) \longrightarrow H(B , C) \quad ,$$

et l'on pourra démontrer les axiomes (H.3) et (H.4) sous la forme énoncée plus haut.

2.- <u>Les suites fondamentales</u>.

Supposons maintenant que, dans notre ensemble partiellement ordonné, nous nous soyons donné un élément A , et une suite $A_p (-\infty < p < +\infty)$ telle que :

$$\ldots < A_p < A_{p+1} < \ldots < A \quad .$$

Les groupes ci-dessous sont définis comme noyau-image du groupe du milieu de la suite exacte à trois termes écrite à droite :

$$\begin{array}{lllll}
B_p & : & H(A_p) \longrightarrow & H(A) \longrightarrow & H(A , A_p) \\
C_p & : & H(A_p) \longrightarrow & H(A_p , A_{p-1}) \longrightarrow & H(A_{p-1}) \\
D_p & : & H(A , A_p) \xrightarrow{d} & H(A_p , A_{p-1}) \longrightarrow & H(A , A_{p-1}) \\
C_p^k & : & H(A_p , A_{p-k}) \longrightarrow & H(A_p , A_{p-1}) \xrightarrow{d} & H(A_{p-1} , A_{p-k}) \\
D_p^k & : & H(A_{p+k-1} , A_p) \xrightarrow{d} & H(A_p , A_{p-1}) \longrightarrow & H(A_{p+k-1} , A_{p-1})
\end{array}$$

(avec $k = 1 , 2 , \ldots$) . Si nous convenons de poser $A_{-\infty} = 0$ et $A_{+\infty} = A$, alors $C_p = C_p^\infty$ et $D_p = D_p^\infty$. Nous avons les relations suivantes :

(2.1) $$\ldots \subset B_{p-1} \subset B_p \subset \ldots \subset H(A)$$

(2.2) $$0 = D_p^1 \subset \ldots \subset D_p^k \subset D_p^{k+1} \subset \ldots \subset D_p \subset C_p \subset \ldots \subset C_p^{k+1} \subset C_p^k \subset \subset \ldots \subset C_p^1 = H(A_p , A_{p-1})$$

Ces inclusions proviennent des relations de commutation dans les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} H(A_{p-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(A) \\ & H(A_p) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H(A_p , A_{p-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(A_{p+k-1}, A_{p-1}) \\ & H(A_{p+k-1}, A_{p-1}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H(A_p,A_{p-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(A,A_{p-1}) \\ & H(A_{p+k},A_{p-1}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H(A,A_p) \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & H(A_p,A_{p-1}) \\ & H(A_p) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H(A_p) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(A_p,A_{p-1}) \\ & H(A_p,A_{p-k}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H(A_p,A_{p-k-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(A_p,A_{p-1}) \\ & H(A_p , A_{p-k}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Posons

(2.3) $\qquad E_p = C_p/D_p \qquad$ et $\qquad E_p^k = C_p^k/D_p^k \quad .$

En particulier, on a :

(2.4) $\qquad E_p^1 = H(A_p , A_{p-1}) \quad .$

Démontrons maintenant :

(2.5) $\qquad E_p \approx B_p/B_{p-1} \quad .$

Cet isomorphisme résulte directement du diagramme ci-dessous, dont toutes les lignes et toutes les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} H(A_p,A_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H(A , A_p) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & D_p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ H(A_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H(A_p) \arrow[r] \arrow[d] & C_p \arrow[r] & 0 \\ B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_p \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & 0 & & \end{tikzcd}$$

Nous considérerons maintenant le diagramme suivant :

(2.6)
$$\begin{tikzcd} H(A_p,A_{p-k}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & H(A_p,A_{p-1}) \arrow[d, "\delta"] \\ H(A_{p-k},A_{p-k-1}) \arrow[r, "\beta"] & H(A_{p-1},A_{p-k-1}) \end{tikzcd}$$

Nous avons :

$$\text{Image de } \alpha = C_p^k \supset C_p^{k+1} = \text{Noyau de } \delta$$

$$\text{Image de } \gamma = D_{p-k}^{k+1} \supset D_{p-k}^k = \text{Noyau de } \beta$$

Pour tout $x \in C_p^k$, choisissons un $y \in H(A_p, A_{p-k})$ tel que $\alpha y = x$. Alors $\gamma y \in H(A_{p-k} , A_{p-k-1})$; ceci définit un homomorphisme :

$$\triangle : C_p^k \longrightarrow H(A_{p-k}, A_{p-k-1}) \quad , \text{ avec}$$

$$\text{Noyau de } \triangle = C_p^{k+1}$$

$$\text{Image de } \triangle = D_{p-k}^{k+1}/D_{p-k}^k \quad .$$

Puisque $D_p^k \subset C_p^{k+1}$ et $D_{p-k}^{k+1} \subset C_{p-k}^k$, il s'enseuit que D_p^k est contenu dans le noyau de $\triangle$, et que C_{p-k}^k/D_{p-k}^k contient l'image de $\triangle$. Ainsi, $\triangle$ définit un homomorphisme :

$$d_p^k : C_p^k/D_p^k \longrightarrow C_{p-k}^k/D_{p-k}^k \quad , \text{ ou :}$$

$$d_p^k : E_p^k \longrightarrow E_{p-k}^k \quad ,$$

avec :

$$\text{Noyau de } d_p^k = C_p^{k+1} / D_p^k \quad \text{et} \quad \text{Image de } d_p^k = D_{p-k}^{k+1} / D_{p-k}^k$$

Si nous considérons la suite :

$$(2.7) \quad \ldots \longrightarrow E_{p+k}^k \xrightarrow{d_{p+k}^k} E_p^k \xrightarrow{d_p^k} E_{p-k}^k \longrightarrow \ldots$$

alors :

$$(2.8) \quad \text{Noyau de } d_p^k = C_p^{k+1}/ D_p^k \quad \text{et} \quad \text{Image de } d_{p+k}^k = D_p^{k+1}/ D_p^k \quad .$$

Ainsi $d_p^k d_{p+k}^k = o$, et (2.7) est un complexe de chaînes, dont le groupe d'homologie, calculé en E_p^k n'est autre que :

$$C_p^{k+1}/ D_p^{k+1} = E_p^{k+1} \quad .$$

<u>Exemple</u> : $k = 1$.

Si $k = 1$ les homomorphismes α et β du diagramme (2.6) sont les applications identiques, et $\gamma = \delta = \triangle$ est l'opérateur

$$d : H(A_p , A_{p-1}) \longrightarrow H(A_{p-1} , A_{p-2})$$

du triple $(A_p , A_{p-1} , A_{p-2})$. Puisque $D_p^1 = D_{p-1}^1 = 0$, il s'ensuit que l'opérateur

$$d_p^1 : E_p^1 \longrightarrow E_{p-1}^1$$

coïncide avec l'opérateur d :

$$d : H(A_p , A_{p-1}) \longrightarrow H(A_{p-1} , A_{p-2}) \quad .$$

<u>Résumé</u> : Les résultats précédents peuvent être résumés comme suit .

Posons :

$$E^k = \sum_p E^k_p \qquad k \geqslant 1 \quad .$$

Les opérateurs d^k_p définissent alors une dérivation $d^k : E^k \longrightarrow E^k$, de degré $-k$; et par rapport à cette dérivation, on a :

$$E^{k+1} = H(E^k) \quad .$$

3.- Le cas gradué.

Dans les applications, le groupe $H(A , B)$ sera fréquemment donné comme un groupe gradué $\sum_n H_n(A , B)$, n entier ; l'homomorphisme de $H(A , B)$ dans $H(A', B')$ préservera le degré, tandis que l'opérateur d augmentera le degré de ε (les cas les plus fréquents sont $\varepsilon = \pm 1$) . La suite exacte de l'axiome (H.4) prend alors la forme :

$$\ldots \longrightarrow H_{n-\varepsilon}(A,B) \longrightarrow H_n(B,C) \longrightarrow H_n(A,C) \longrightarrow H_n(A,B) \longrightarrow H_{n+\varepsilon}(B,C) \longrightarrow \ldots$$

Tous les groupes qui ont été définis ci-dessus se décomposent en sommes directes :

$$B_p = \sum_n B_{n,p} \ , \ \ldots \ , \ E^k_p = \sum_n E^k_{n,p} \quad .$$

L'isomorphisme (2.5) préserve les degrés, et prend la forme :

$$E_{n,p} = B_{n,p}/B_{n,p-1} \tag{3.1}$$

Le diagramme (2.6) devient :

$$\begin{array}{ccc} H_n(A_p , A_{p-k}) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & H_n(A_p , A_{p-1}) \\ \big\downarrow \gamma & & \big\downarrow \delta \\ H_{n+\varepsilon}(A_{p-k} , A_{p-k-1}) & \xrightarrow{\ \beta\ } & H_{n+\varepsilon}(A_{p-1} , A_{p-k-1}) \end{array}$$

avec :

$$\text{Image de } \alpha = C^k_{n,p} \subset C^{k+1}_{n,p} = \text{Noyau de } \delta$$

$$\text{Image de } \gamma = D^{k+1}_{n+\varepsilon,p-k} \subset D^k_{n+\varepsilon,p-k} = \text{Noyau de } \beta \quad .$$

Il s'ensuit que l'homomorphisme d^k_p donne :

$$d^k_{n,p} \ : \ E^k_{n,p} \longrightarrow E^k_{n+\varepsilon,p-k} \quad ,$$

avec $C^{k+1}_{n,p}/D^k_{n,p}$ pour noyau, et $D^{k+1}_{n+\varepsilon,p-k}/D^k_{n+\varepsilon,p-k}$ pour image .

La suite (2.7) devient :

$$\ldots \longrightarrow E^k_{n-\varepsilon,p+k} \longrightarrow E^k_{n,p} \longrightarrow E^k_{n+\varepsilon,p-k} \longrightarrow \ldots \tag{3.2}$$

et son groupe d'homologie, calculé en $E^k_{n,p}$ est $E^{k+1}_{n,p}$.

Nous supposerons maintenant que, pour tout n fixé, l'on a :

(3.3) $\quad H_n(A_p) = 0 \quad$ pour p assez petit

(3.4) $\quad H_n(A,A_p) = 0 \quad$ pour p assez grand.

Il suit de (3.3) que :

(3.5) $\quad B_{n,p} = 0 \quad$ pour p assez petit,

tandis que (3.4) entraîne que $H_n(A_p) \longrightarrow H_n(A)$ est sur. On a donc

(3.6) $\quad B_{n,p} = H_n(A) \quad$ pour p assez grand.

Fixons maintenant les indices n et p . Puisque $H_{n+\varepsilon}(A_{p-k}) = 0$ pour k assez grand, il en résulte que $H_n(A_p) \longrightarrow H_n(A_p\ ,\ A_{p-k})$ est sur, ce qui donne :

(3.7) $\quad C_{n,p} = C^k_{n,p} \quad$ pour k assez grand.

Puisque $H_{n+\varepsilon}(A\ ,\ A_{p+k-1}) = 0$ pour k assez grand, il en résulte que $H_{n-\varepsilon}(A_{p+k-1}\ ,\ A_p) \longrightarrow H_{n-\varepsilon}(A\ ,\ A_p)$ est sur. Ceci donne :

(3.8) $\quad D_{n,p} = D^k_{n,p} \quad$ pour k assez grand .

En combinant (3.7) et (3.8) , on obtient :

(3.9) $\quad E_{n,p} = E^k_{n,p} \quad$ pour k assez grand.

Puisque le noyau de $d^k_{n,p}$: $E^k_{n,p} \longrightarrow E^k_{n+\varepsilon,p-k}$ est $C^{k+1}_{n,p}/D^k_{n,p}$, on a :

(3.10) $\quad d^k_{n,p} = 0 \quad$ pour k assez grand.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la suite $\{A_p\}$ était croissante, c'est-à-dire que $A_p < A_{p+1}$. On aurait pu aussi bien considérer des suites descendantes vérifiant $A_{p+1} < A_p$. Le passage des suites ascendantes aux suites descendantes peut se faire par changement du signe des indices. Dans (2.1) et (2.3), $p-1$ devra être remplacé par $p+1$. Dans le diagramme du paragraphe 2 , $p-1$ $p-k$, $p-k-1$ devront être remplacés par $p+1$, $p+k$, $p+k+1$. Ainsi :

$$d^k_p \ :\ E^k_p \longrightarrow E^k_{p+k} \quad .$$

Dans les formules (3.3) à (3.6) , les mots "grand" et "petit" devront être échangés.

4.- Le cas contravariant.

Le foncteur H considéré dans ce qui précède se comporte comme une théorie de l'homologie, et, en particulier, est covariant. En théorie de la cohomologie, on a à considérer des foncteurs $H(A , B)$ pour lesquels une inégalité $(A , B) < (A', B')$ donne naissance à un homomorphisme $H(A', B') \longrightarrow H(A , B)$, et un triple (A , B , C) donne naissance à un homomorphisme d : $H(B , C) \longrightarrow H(A , B)$. On énonce les axiomes (H.1) , ... , (H.4) en renversant le sens des flèches. Dans les définitions du début du paragraphe 2 , les flèches sont renversées, et les relations (2.1) et (2.2) deviennent :

$$(4.1) \qquad \ldots \subset B_p \subset B_{p+1} \subset \ldots \subset H(A)$$

$$(4.2) \qquad 0 = C_p^1 \subset \ldots \subset C_p^k \subset C_p^{k+1} \subset \ldots \subset C_p \subset D_p \subset \ldots \subset D_p^{k+1} \subset D_p^k \subset \ldots \subset D_p^1 = \\ = H(A_p , A_{p-1}) .$$

Les définitions (2.3) deviennent :

$$(4.3) \qquad E_p = D_p / C_p \qquad\qquad E_p^k = D_p^k / C_p^k .$$

L'isomorphisme (2.5) devient :

$$(4.4) \qquad E_p \approx B_{p-1} / B_p$$

et se démontre en utilisant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
H(A_p) & \longrightarrow & H(A_{p-1}) & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H(A,A_p) & \longrightarrow & H(A,A_{p-1}) & \longrightarrow & D_p & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
B_p & \longrightarrow & B_{p-1} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & & & &
\end{array}$$

Le diagramme (2.6) devient, après avoir élevé tous les indices de k :

$$\begin{array}{ccc}
H(A_{p+k},A_p) & \xleftarrow{\alpha} & H(A_{p+k},A_{p+k-1}) \\
\uparrow{\scriptstyle\gamma} & & \uparrow{\scriptstyle\delta} \\
H(A_p,A_{p-1}) & \xleftarrow{\beta} & H(A_{p+k-1},A_{p-1})
\end{array}$$

avec :

$$\text{Image de } \beta = D_p^k \supset D_p^{k+1} = \text{Noyau de } \gamma$$

$$\text{Image de } \delta = C_{p+k}^{k+1} \supset C_{p+k}^k = \text{Noyau de } \alpha .$$

Ainsi $\delta\beta^{-1}$ donne :

$$\Delta : D_p^k \longrightarrow H(A_{p+k},A_{p+k-1})/C_{p+k}^k$$, qui définit les

$$d_p^k \; : \; E_p^k \longrightarrow E_{p+k}^k \qquad ,$$

avec les mêmes propriétés que ci-dessus.

La discussion séparée du cas contravariant peut être évitée en utilisant l'astuce suivante : on considère l'ensemble partiellement ordonné S^* obtenu en renversant l'ordre de l'ensemble original S. La théorie contravariante H sur S donne alors une théorie covariante sur S^*. Ceci permet de transporter les résultats par un simple changement de notations.

5.- Le cas algébrique.

Soit A un module (sur un certain anneau Λ) muni d'une dérivation d. Nous considérerons l'ensemble de tous les sous-modules de A, stables vis-à-vis de d, avec la relation d'ordre définie par l'inclusion. Si (A', B') est une paire dans cet ensemble, alors A'/B' est un module à dérivation, et nous pouvons poser :

$$H(A', B') = H(A'/B') \quad .$$

Une inclusion $(A', B') < (A'', B'')$ définit un homomorphisme permis de A'/B' dans A''/B'', et induit donc un homomorphisme $H(A', B') \longrightarrow H(A'', B'')$. Un triple (A', B', C') donne une suite exacte :

$$0 \longrightarrow B'/C' \longrightarrow A'/C' \longrightarrow A'/B' \longrightarrow 0 \quad ,$$

qui donne un opérateur $d : H(A', B') \longrightarrow H(B', C')$. Les axiomes (H.1), ... , (H.4) se vérifient tout de suite.

Supposons maintenant que nous nous soyons donné une suite :

$$\ldots \subset A_p \subset A_{p+1} \subset \ldots \subset A \quad .$$

La théorie précédente donne des groupes gradués E^k, avec dérivations d^k telles que $E^{k+1} = H(E^k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Posons :

$$E_p^o = A_p/A_{p-1} \quad , \quad E^o = \sum_p A_p/A_{p-1} \quad ,$$

soit d_p^o l'opérateur de dérivation de E_p^o induit par celui de A, et soit d^o la dérivation que en résulte dans E^o. Puisque $E_p^1 = H(A_p/A_{p-1})$, on a :

$$E^1 = H(E^o) \quad .$$

Ainsi, dans le cas algébrique, on peut étendre la suite des $\{E^k\}$, en acceptant la valeur $k = o$.