H. Cartan

Fonctions thêta sur le tore, I

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. nº 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A3_0>

FONCTIONS THÊTA SUR LE TORE, I

(Exposé de H. Cartan, 3-12-1951)

1. Fonction Thêta.

E désigne, dans tout ce qui suit, un espace vectoriel réel (i.e., sur le corps $\mathbf{R}$) de dimension finie, paire, notée $2n$. Une structure vectorielle complexe (i.e., sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes) est définie par la donnée d'un $\mathbf{R}$-automorphisme J tel que $J^2 = -1$: on pose alors $(a+bi)\cdot x = ax + b\cdot(Jx)$ pour tout $x \in E$ et tout nombre complexe $a + bi$. La dimension complexe de E est n.

Soit, dans E, un sous-groupe discret Γ de range maximum $2n$ (ayant une base de $2n$ éléments linéairement indépendants sur le corps $\mathbf{R}$). L'espace quotient E/Γ est homéomorphe à un tore (compact) et est muni d'une structure analytique-complexe: c'est une variété analytique-complexe, compacte, de dimension n; elle est kählérienne (si $z_1, \ldots, z_n$ désignent les coordonnées complexes d'un point de E rapporté à une $\mathbf{C}$-base, prendre la métrique induite par $\sum_k dz_k d\overline{z_k}$ sur l'espace E/Γ).

Une fonction thêta, relative au groupe Γ, est une fonction $F(x)$ définie sur E, holomorphe ou méromorphe, non identiquement nulle ou infinie, et qui est telle que, pour tout $u \in \Gamma$, on ait l'identité

$$F(x+u) = F(x) e^{-2\pi i (L(x,u) + H(u))} \tag{1}$$

où $L(x, u)$ est une fonction $\mathbf{C}$-linéaire (homogène) de x. On a montré dans l'esposé 2, que, pour tout diviseur D sur E/Γ, il existe une fonction thêta dont le diviseur soit exactement D (ou plutôt $\overline{D}$, diviseur défini sur le revêtement universel E de E/Γ, et déduit de D en "remontant" de E/Γ à E). Cette fonction sera holomorphe si le diviseur D est positif. Ce résultat fondamental, qui faisait l'objet du Mémoire cité de Poincaré, est en partie illusoire, car il ne dit pas s'il existe effectivement des diviseurs (autres que le diviseur nul) sur notre tore E/Γ ; il nous dit que ce problème revient à savoir s'il existe des fonctions thêta autres que celles qui n'ont ni zéro ni pôle; une fonction thêta sans zéro ni pôle sera dite triviale. Dans cet exposé et le suivant, on se propose notemment de voir à quelles conditions il existe des fonctions thêta non triviales.

Il est visible que l'inverse d'une fonction thêta est une fonction thêta, et que le produit de deux fonctions thêta est un fonction thêta. Pour que deux fonctions thêta aient le même diviseur, il faut et il suffit que leur quotient soit une fonction triviale. On voit que le groupe (additif) de tous les diviseurs, sur le tore E/Γ, est canoniquement isomorphe au quotient du groupe multiplicatif de toutes les fonctions thêta, par le sous-groupe des fonctions thêta triviales.

Le logarithme d'une fonction triviale est une fonction entière que nous noterons $-2\pi i G(x)$; on trouve aussitôt que les dérivées partielles de G, du second ordre, sont des fonctions invariantes par Γ, donc constantes (puisque bornées); donc $G(x)$ est un polynôme du second degré par rapport aux coordonnées complexes. Cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que $e^{-2\pi i G(x)}$ soit une fonction thêta. On posera $G(x) = \frac{1}{2}G_2(x) + G_1(x) + G_0$, où G_2 est homogène du second degré, G_1 linéaire, G_0 constants. Pour une telle fonction thêta, le multiplicateur de la formule (1) est donné par $L(x, u) = G_2(x, u)$, $H(u) = \frac{1}{2}G_2(u, u) + G_1(u)$; on a noté $G_2(x, y)$ la forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique, telle que $G_2(x, x) = G_2(x)$.

Dans le cas d'une fonction thêta générale, étudions la nature des fonctions $L(x, u)$ et $H(u)$. En égalant deux expressions de $F(x+u+v)$ tirées de (1) (u et v désignant deux éléments du groupe Γ), on trouve

$$L(x, u+v) - L(x, u) - L(x, v) + H(u+v) - H(u) - H(v) - L(u, v) = \text{entier},$$

d'où
$$L(x, u+v) = L(x, u) + L(x, v)$$

(puisque la différence est une fonction continue de x, à valeurs définies modulo les entiers, et nulle pour $x = 0$). Ainsi L se prolonge, d'une seule manière, en une fonction $L(x, y)$ définie pour $x, y \in E$, $\mathbf{C}$-linéaire en x et $\mathbf{R}$-linéaire en y. Il vient ensuite:

$$L(u, v) = H(u+v) - H(u) - H(v) + \text{entier},$$

ce qui prouve que

$$(2) \qquad L(x, y) - L(y, x) = \varphi(x, y)$$

est une fonction ($\mathbf{R}$-bilinéaire alternée) qui prend des valeurs entières pour $x, y \in \Gamma$ (et est donc réelle quels que soient x et y). Il existe donc $M(x, y)$ bilinéaire symétrique, telle que $M(x, y) - L(x, y)$ soit entier pour $x, y \in \Gamma$. Posons, pour $u \in \Gamma$,

$$K(u) = H(u) - \tfrac{1}{2}M(u, u) \ ;$$

alors $K(u+v) \equiv K(u) + K(v)$ modulo les entiers.

Il existe donc une K_1 additive sur Γ telle que $K(u) - K_1(u)$ soit entier pour $u \in \Gamma$.

Résumons les résultats obtenus:

Théorème 1. Une fonction thêta $F(x)$ définit: 1° une fonction $L(x, y)$, $\mathbf{C}$-linéaire en x et $\mathbf{R}$-linéaire en y; 2° une fonction $K(x)$, $\mathbf{R}$-linéaire en x, déterminée à l'addition près d'une fonction à valeurs entières sur Γ. On a alors, pour $u \in \Gamma$,

$$(3) \qquad F(x+u) = F(x)e^{-2\pi i(L(x,u)+\frac{1}{2}L(u,u)+K(u))} \ .$$

Pour une classe de fonctions thêta admettant un même diviseur, la fonction $L(x, y)$ est déterminée à l'addition près d'une $G_2(x, y)$ $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique (arbitraire); la fonction $K(x)$ est déterminée à l'addition près d'une $G_1(x)$, $\mathbf{C}$-linéaire (et d'une fonction $\mathbf{R}$-linéaire à valeurs entières sur Γ). Enfin, la fonction

$$\varphi(x, y) = L(x, y) - L(y, x)$$

est bien déterminée par le diviseur, et prend des valeurs entières quand x et y sont dans Γ.

Le fait que $\varphi(x, y)$ est déterminée par le diviseur résulte du fait que $L(x, y) - L(y, x)$ ne change pas si l'on ajoute à $L(x, y)$ une $G_2(x, y)$, symétrique en x et y.

Interprétation de la fonction $\varphi(x, y)$ attachée à un diviseur.

Un couple (u, v) d'éléments de Γ définit un 2-cycle orienté du tore E/Γ. D'autre part, le diviseur D définit une classe d'homologie (entière) de dimension $2n-2$. Je dis que $\varphi(u, v)$ est le nombre d'intersection de la classe du 2-cycle défini par (u, v) et de la classe d'homologie du diviseur D. Cela pourrait se déduire du n°7 de l'exposé 2; on peut le vérifier directement: on se place dans un plan à 2 dimensions (réelles) contenant un point a et les points $a+u$ et $a+v$, a étant choisi de manière que $F(x) \neq 0$ et $\neq \infty$ pour x sur les côtés du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v d'origine a. En calculant l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int d \log F(x)$ le long de ce parallélogramme, on trouve $L(u, v) - L(v, u)$, ce qui établit l'assertion.

2. Conditions auxquelles doit satisfaire la loi d'intersection $\varphi(x, y)$ du diviseur d'une fonction thêta.

Une première condition nécessaire est donnée par l'énoncé suivant:

Proposition 1. Pour une fonction $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, à valeurs entières lorsque x et y sont dans Γ, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe une $L(x, y)$, $\mathbf{C}$-linéaire en x et $\mathbf{R}$-linéaire en y, telle que

$$\varphi(x, y) = L(x, y) - L(y, x) \; ; \tag{2}$$

(b) $\varphi(x, Jy)$ est symétrique en x et y;

(c) $\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$;

(d) $-\varphi(x, y)$ est la partie imaginaire d'une forme hermitienne;

En outre, si ces conditions sont remplies, la seule forme hermitienne $\Phi(x, y)$ dont $-\varphi(x, y)$ soit la partie imaginaire est

(4) $$\Phi(x, y) = \varphi(x, Jy) - i\varphi(x, y) .$$

<u>Démonstration</u>: (a) entraîne (b); car (2) entraîne

$$\varphi(x, Jy) = L(x, Jy) - L(Jy, x) = -iL(Jx, Jy) - iL(y, x);$$

or φ est à valeurs réelles, et par suite, en notant $L'(x, y)$ la partie imaginaire de $L(x, y)$, on a $\varphi(x, Jy) = L'(Jx, Jy) + L'(y, x)$. Mais, d'après (2), $L'(x, y)$ est symétrique en x et y; il s'ensuit que $\varphi(x, Jy)$ est symétrique en x et y.

(b) et (c) sont équivalents: on passe en effet de l'une à l'autre condition en changeant x en Jx.

Les conditions (b) et (d) sont équivalentes: en effet, pour qu'une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire $\Phi(x, y)$ soit hermitienne, il faut et il suffit que

(5) $\Phi(x, Jy) = -i\,\Phi(x, y)$, (5') $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$.

Or écrivons $\Phi(x, y) = \psi(x, y) - i\varphi(x, y)$, ψ et φ étant réelles; la condition (5) devient $\psi(x, y) = \varphi(x, Jy)$; et (5') devient alors $\varphi(x, Jy) = \varphi(y, Jx)$, ce qui est précisément la condition (b).

Enfin, (d) entraîne (a): car si $-\varphi(x, y)$ est la partie imaginaire d'une $\Phi(x, y)$ hermitienne, il suffit de prendre $L(x, y) = \frac{1}{2}\Phi(x, y)$ pour satisfaire à (2).

La proposition 1 est ainsi entièrement démontrée. Nous désignerons désormais par (I) l'une quelconque des conditions équivalentes (a), (b), (c), (d); par exemple, la condition (c):

(I) $$\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y) .$$

Cette condition est nécessaire pour qu'une $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, à valeurs entières sur Γ, soit la loi d'intersection d'un diviseur.

<u>Remarque</u>: la condition (I) exprime que la forme différentielle de degré 2, associée à la forme bilinéaire alternée $\varphi(x, y)$, est de <u>type</u> (1, 1); on retrouve ainsi le résultat établi dans l'exposé 2, au sujet de la forme σ considérée dans cet exposé, et dont l'interprétation topologique a été donnée au n°7 de l'exposé 2.

La condition (I) n'est pas suffisante, en général, pour qu'une forme bilinéaire alternée $\varphi(x, y)$, à valeurs entières sur Γ, corresponde à un diviseur. Elle l'est toutefois lorsque le tore E/Γ est non dégénéré (voir exposé 5). Pour le moment, nous allons donner une nouvelle condition nécessaire pour que $\varphi(x, y)$ corresponde à un diviseur positif.

Proposition 2. Si $\varphi(x, y)$ est attachée à un diviseur positif, la forme hermitienne $\Phi(x, y)$ définie par φ est positive: on a $\Phi(x, x) \geq 0$ pour tout x, ou, ce qui est équivalent:

$$\text{(II)} \qquad \varphi(x, Jx) \geq 0 \quad \text{pour tout } x.$$

Démonstration: considérons une fonction thêta holomorphe $F(x)$, admettant le diviseur considéré. On peut la "normaliser" en la multipliant par une fonction thêta triviale, et faire en sorte que

$$\text{(6)} \qquad L(x, y) = \frac{i}{2}\Phi(x, y), \qquad K(y) \text{ à valeurs réelles}$$

pour cette fonction normalisée. En effet, $G_2(x, y) = L(x, y) - \frac{i}{2}\Phi(x, y)$ est $\mathbf{C}$-linéaire en x, et symétrique en x et y. On peut donc remplacer $L(x, y)$ par $L(x, y) - G_2(x, y)$, et la nouvelle fonction $L(x, y)$ satisfera à la première condition (6). Pour réaliser la deuxième condition (6), il suffit de retrancher de $K(y)$ une $G_1(y)$, $\mathbf{C}$-linéaire en y, ayant même partie imaginaire que $K(y)$.

Ainsi, il existe une fonction thêta, holomorphe, ayant le diviseur considéré, et satisfaisant à (6). Je dis qu'il existe une constante C telle que cette fonction thêta $F(x)$ satisfasse à

$$\text{(7)} \qquad |F(x)| \leq C e^{\pi/2 \cdot \Phi(x,x)} \quad \text{pour tout } x.$$

Considérons en effet la fonction $e^{\pi i L(x,x)} F(x)$; si on change x en $x+u$ (où $u \in \Gamma$), elle est multipliée par $e^{-2\pi i(\varphi(x,u)+K(u))}$, de valeur absolue égale à un. Donc sa valeur absolue est invariante par le groupe Γ, et par suite est bornée partout par une constante C. D'où la relation (7).

Nous sommes alors en mesure de prouver la proposition 2, en montrant qu'il est impossible d'avoir un point x_0 tel que $\Phi(x_0, x_0) < 0$.

S'il en était ainsi, considérons le sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel engendré par x_0; dans ce sous-espace, F est holomorphe et tend vers 0 à l'infini, d'après (7); donc F est identiquement nulle dans ce sous-espace, d'où $F(x_0) = 0$. Or ceci vaut pour tout point x assez voisin de x_0, et implique donc que $F(x)$ est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse suivant laquelle F est une fonction thêta.

Annonçons dès maintenant le théorème fondamental, dont la démonstration sera achevée dans l'exposé suivant:

Théorème 2. *Pour qu'une fonction $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée $\varphi(x, y)$, à valeurs entières lorsque x et y sont dans Γ, soit celle définie par la loi d'intersection avec un diviseur positif, il faut et il suffit que φ satisfasse aux conditions (I) et (II).*

3. *Etude du sous-espace V des x tels que $\varphi(x, Jx) = 0$, lorsque les conditions (I) et (II) sont satisfaites.*

Il est classique que, pour une forme hermitienne $\Phi(x, y)$ positive, les x tels que $\Phi(x, x) = 0$ forment un sous-espace vectoriel V; cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui montre que V est le sous-espace des x tels que $\Phi(x, y) = 0$ pour tout y; condition équivalente: $\varphi(x, y) = 0$ pour tout y.

Proposition 3. Soit $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, à valeurs entières sur Γ, et satisfaisant à la condition (I). Soit V l'espace des x tels que $\varphi(x, y) = 0$ pout tout y. *L'espace V est un sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel, et le sous-groupe $V + \Gamma$ de l'espace E est fermé dans E.*

La première assertion est évidente: si $x \in V$, alors $Jx \in V$, puisque $\varphi(Jx, y) = -\varphi(x, Jy)$. Quant à la deuxième assertion, rappelons d'abord quelques résultats plus ou moins classiques sur les sous-groupes fermés d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{R}$, de dimension finie.

D'abord, soit G un sous-groupe *fermé* de E; pour qu'un sous-groupe de E, contenant G, soit fermé, il faut et il suffit que son image dans E/G soit fermée. Ceci étant rappelé, soit Γ un sous-groupe discret de E, et V un sous-espace $\mathbf{R}$-vectoriel de E; en appliquant le résultat qui vient d'être rappelé, successivement aux espaces quotients E/V et E/Γ, il vient:

<u>Lemme</u>. Il y a équivalence entre les trois conditions suivantes:

1) le sous-groupe $V + \Gamma$ est fermé;

2) l'image de Γ dans E/V est fermée;

3) l'image de V dans E/Γ est fermée.

Observons en outre que la condition 2) s'énonce aussi:

2 bis) l'image de Γ dans E/V est un sous-groupe discret.

(en effet, V est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans $V + \Gamma$, donc l'image de Γ dans E/V ne contient pas d'autre sous-espace vectoriel que $\{0\}$; dans ces conditions, dire que cette image est fermée revient à dire qu'elle est discrète).

Etant donné un sous-groupe discret Γ de E, nous dirons qu'un sous-espace $\mathbf{R}$-vectoriel V est <u>Γ-propre</u> s'il satisfait à l'une quelconque des 3 conditions (équivalentes) du lemme ci-dessus. Notons ceci: <u>si V est un sous-espace Γ-propre, et si Γ engendre E, alors $V \cap \Gamma$ engendre V.</u> En effet, $V \cap \Gamma$ possède, de toute manière, un supplémentaire Γ' dans Γ (puisque $\Gamma/(V \cap \Gamma)$ est sans torsion); si Γ engendre E, l'image de Γ' dans E/V engendre E/V; si V est Γ-propre, cette image est discrète, donc son <u>rang</u> est égal à la dimension de E/V. Or le rang de Γ est égal à la dimension de E; par différence, on voit que le rang de $V \cap \Gamma$ est égal à la dimension de V, et par suite $V \cap \Gamma$ engendre V.

Achevons maintenant la démonstration de la prop. 3. Il s'agit de montrer que l'image G de Γ dans E/V est fermée; si G n'est pas fermé, l'adhérence $\overline{G}$ contient un sous-espace vectoriel $W \neq 0$. Or la fonction $\varphi(x, y)$ passe au quotient dans E/V; si $y \in G$ est fixe, la fonction $\varphi(x, y)$, comme fonction $\mathbf{R}$-linéaire de x, est à valeurs entières pour $x \in G$, donce, à la limite, pour $x \in \overline{G}$; elle est donc nulle sur W. Alors, si $x \in W$, on a $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in G$, donc pour tout y sans exception. Ceci contredit la définition de V. D'où la contradiction cherchée.

Nous allons, pour terminer, donner de nouvelles interprétations du sous-espace V, dans le cas d'un diviseur positif.

Proposition 4. Soit $\varphi(x, y)$ la fonction $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée définie par un diviseur positif D. Le sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel V formé des x tels que $\varphi(x, Jx) = 0$ jouit des deux propriétés suivantes:

1) si $F(x)$ est une fonction thêta (holomorphe) admettant le diviseur D, et normalisée de manière à satisfaire à (6), $F(x)$ ne dépend que de la classe de x modulo V;

2) V est le plus grand des sous-espaces $\mathbf{R}$-vectoriels W tels que toute translation de W transforme en lui-même l'ensemble des points du diviseur D.

Montrons d'abord 1): si $\Phi(x_0, x_0) = 0$, on va voir que l'on a $F(y) = F(x)$ chaque fois que $y = x + x_0$. Or, x étant fixé, $F(x+ax_0+bJx_0)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $a + ib$; d'après l'inégalité (7), sa valeur absolue est $\leq e^{\pi/2\cdot\Phi(x, x)}$, donc bornée; elle est donc constante, et par suite sa valeur pour $a + ib = 1$ est égale à sa valeur pour $a + ib = 0$. Cela démontre 1).

Appelons maintenant V' le plus grand sous-espace $\mathbf{R}$-vectoriel contenu dans le groupe G des x tels que les translations x et $-x$ transforment en lui-même l'ensemble des points du diviseur D. Le groupe G est évidemment fermé; donc son image dans E/V' est discrète. Comme G contient Γ, l'image de Γ dans E/V' est discrète. Donc (cf. le lemme, p.3-8) le sous-espace $\mathbf{R}$-vectoriel V' est engendré par $V' \cap \Gamma$. D'autre part, V' est un sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel: car si $x_0 \in V'$, la fonction $F(ax_0 + bJx_0)$ est holomorphe en $a + ib$, nulle chaque fois que $b = 0$, donc identiquement nulle.

Il reste à montrer que $V' = V$. Or, d'après 1), il est clair que V' contient V. Pour prouver que $V' \subset V$, montrons que $\varphi(x, Jx) = 0$ pour $x \in V'$; comme $x \in V'$ entraîne $Jx \in V'$, il suffit de montrer que $\varphi(x, y)$ est nul pour $x \in V'$, $y \in V'$. Or soit F une fonction thêta (holomorphe) admettant le diviseur D; si a est un point tel que $F(a) \neq 0$, F est $\neq 0$ en tout point de la variété linéaire (complexe) $a + V'$; la restriction de F à cette variété est un fonction thêta relative au groupe $V' \cap \Gamma$ (qui engendre V', on l'a vu), et cette fonction ne s'annule pas. La restriction de $\varphi(x, y)$ au sous-espace V' est la fonction $\varphi(x, y)$ attachée à cette fonction thêta triviale; elle est donc nulle. Et ceci achève la démonstration.

4. <u>Indications sur la démonstration du théorème</u> 2 (énoncé à la fin du n°2).

On a déjà montré (prop. 1 et 2) que les conditions (I) et (II) sont nécessaires pour que $\varphi(x, y)$ soit attachée à un diviseur positif. Il reste à montrer que, si elles sont remplies, il existe une fonction thêta (holomorphe) donnant naissance à cette fonction $\varphi(x, y)$. Notons toujours V le sous-espace des x tels que $\varphi(x, Jx) = 0$. D'après la prop. 4, toute fonction thêta donnant naissance à $\varphi(x, y)$ est équivalente (modulo une fonction thêta triviale) à une fonction thêta constante sur les classes modulo V. Plaçons-nous donc dans l'espace E/V, muni du groupe Γ' image de Γ, groupe qui est <u>discret</u> en vertu de la prop. 3 (et du lemme). La fonction $\varphi(x, y)$ passe au quotient sur E/V; il suffit alors de chercher les fonctions thêta, holomorphes sur E/V, relatives au groupe Γ', et donnant naissance à $\varphi(x, y)$. Or $\varphi(x, Jx) > 0$ pour tout x non nul de E/V. Finalement, on voit que le théorème 2 résultera de la proposition suivante:

<u>Proposition</u> 5. Soit sur l'espace E, une fonction $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, à valeurs entières sur Γ, et satisfaisant aux conditions

(I) $\varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$;

(II') $\varphi(x, Jx) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Alors il existe une fonction thêta holomorphe, donnant naissance à cette fonction $\varphi(x, y)$.