MICHEL HERVÉ

Intégrale d'André Weil

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. nº 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A6_0>

INTÉGRALE D'ANDRÉ WEIL

(Exposé de Michel Hervé, 14-1-1952)

Introduction. L'exposé de M. Hervé, qui suivit de près l'article de Weil cité ci-dessus, a donné lieu à une discussion: car l'intégration n-uple sur les "arêtes" du "polyèdre" soulève des difficultés techniques et nécessite des hypothèses restrictives, assez gênantes pour les applications. L'exposé qu'on va lire constitue une tentative pour éliminer ces difficultés, en substituant à l'intégrale n-uple une intégrale (2n)-uple étendue à tout l'espace. Expliquons sur un exemple très simple quelle est l'idée directrice.

Considérons la formule intégrale classique de Cauchy, pour une fonction holomorphe $f(x)$ d'une seule variable complexe:

$$\int \frac{f(x)dx}{x-y} = 2\pi i\ f(y) .$$

Voici une variante de cette formule: soit u une fonction définie dans tout le plan de la variable x; supposons u fonction continûment dérivable des 2 coordonnées dans ce plan, et supposons que le support de u (ensemble des points au voisinage desquels u n'est pas identiquement nulle) soit compact. Alors, si $f(x)$ est définie et holomorphe au voisinage du support de u, l'élément d'intégrale double $\frac{f(x)dx \wedge du}{x-y}$ est partout défini, et son intégrale (convergente) est:

$$\iint \frac{f(x)}{x-y}\, dx \wedge du = 2\pi i\ u(y)\ f(y) . \quad \text{(Démonstration immédiate.)}$$

L'intégrale (2n)-uple que l'on va étudier ci-dessous est, à l'intégrale de Weil, ce que cette intégrale double est à l'intégrale curviligne de Cauchy.

Plus généralement, soit ω une forme différentielle holomorphe sauf en des points isolés x_k au voisinage de chacun desquels u soit constante. Alors, si le support de u est compact, on a

$$\iint \omega \wedge du = 2\pi i \sum_k c_k\ u(x_k) \quad ,$$

c_k désignant le <u>résidu</u> de la forme ω au point x_k. En particulier, pour une variété compacte de dimension un, on peut prendre u égale à la constante 1, d'ou $\Sigma_k c_k = 0$.

1. Soit D un ensemble ouvert de l'espace C^n; les coordonnées complexes x_k $(1 \leq k \leq n)$ définissent sur D une structure analytique complexe. Nous n'astreignons pas D à être connexe.

On suppose données p $(p \geq n)$ fonctions holomorphes dans D, soient $X_j(x)$ $(1 \leq j \leq p)$, non constantes. Alors, pour chaque j, l'application X_j: $D \to C$ est une <u>application ouverte</u>.

Supposons en outre données np fonctions $P_{jk}(x, y)$ holomorphes dans $D \times D$, telles que

$$(1) \qquad X_j(x) - X_j(y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) P_{jk}(x, y) \text{ pour } x \in D \text{ et } y \in D.$$

On démontrera dans un exposé ultérieur (théorie des idéaux de fonctions analytiques) que, lorsque D est un "domaine d'holomorphie," l'existence de telles fonctions P_{jk} est assurée, pour des X_k arbitrairement données. Cette existence est évidente si les X_k sont des polynômes ou des fonctions rationnelles.

Introduisons, pour chaque j, la forme différentielle (en x):

$$(2) \qquad \alpha_j = \frac{\sum_k P_{jk}(x, y) dx_k}{X_j(x) - X_j(y)}$$

où y est un point de D (cette forme a des singularités). Les relations (1) entraînent les identités suivantes, valables quand $X_j(x) \neq X_j(y)$ pour tout j:

$$(3) \qquad \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n} = \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{j_1} \cdots \widehat{\alpha_{j_k}} \cdots \alpha_{j_n} \right)$$

(les signes de multiplication extérieure ont été omis; le signe $\wedge$ au-dessus d'un terme signifie, comme d'habitude, que ce terme doit être supprimé). La formule est triviale si les indices $j, j_1, \ldots, j_n$ ne sont pas tous distincts.

2. Soit donné, pour chaque j, un compact $\Delta_j \subset \mathbf{C}$, de telle manière que l'ensemble P des points $x \in D$ tels que $X_j(x) \in \Delta_j$ pour tout j, soit <u>compact</u>. Un tel ensemble P s'appelle un <u>polyèdre analytique</u> (ou simplement: <u>polyèdre</u>) subordonné aux fonctions X_j holomorphes dans D. La frontière de P est la réunion des ensembles P'_j définis par $x \in P$ et $X_j(x) \in \Delta'_j$ (Δ'_j : frontière de Δ_j). Cela résulte de ce que les applications X_j sont ouvertes.

Si E est un ouvert de D contenant P, il est clair que P est aussi un polyèdre subordonné aux restrictions des fonctions X_j à l'ouvert E. Mais il faut prendre garde à ceci: étant données des X_j holomorphes dans D, et des compacts Δ_j, il se peut que l'ensemble des points x <u>de</u> E tels que $X_j(x) \in \Delta_j$ (pour tout j) soit compact, mais que l'ensemble des points x <u>de</u> D tels que $X_j(x) \in \Delta_j$ en soit distinct, et même ne soit pas compact. On est ainsi conduit à généraliser la définition d'un polyèdre: P sera un polyèdre subordonné à des fonctions X_j holomorphes dans D si: 1) P est compact; 2) il existe des Δ_j compacts, et un voisinage <u>ouvert</u> E de P, tels que P soit exactement l'ensemble des points x <u>de</u> E où $X_j(x) \in \Delta_j$ pour tout j.

<u>Proposition</u> 1. <u>Si</u> P <u>est un polyèdre analytique subordonné à des fonctions</u> X_j <u>holomorphes dans</u> D, <u>il existe un voisinage</u> $\tilde{P}$ <u>de</u> P <u>qui est aussi un polyèdre analytique subordonné aux fonctions</u> X_j.

On peut d'abord supposer que P est l'ensemble des x <u>de</u> D tels que $X_j(x) \in \Delta_j$ (sinon, remplacer D par un voisinage ouvert de P dans D). Il existe un voisinage ouvert E de P, tel que l'adhérence $\overline{E}$ de E soit compacte. On voit facilement qu'il existe des voisinages compacts $\tilde{\Delta}_j$ des Δ_j, tels que, pour chaque $x \in \overline{E} - E$ (frontière de E) l'un au moins des $X_j(x)$ soit hors de $\tilde{\Delta}_j$: cela tient à la compacité de la frontière de E. Soit alors $\tilde{P}$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $X_j(x) \in \tilde{\Delta}_j$ pour tout j; c'est un ensemble compact, et un voisinage de P, ce qui démontre la proposition.

3. Soit P un polyèdre subordonné à des fonctions X_j holomorphes dans D. La formule intégrale de Weil (cf. l'article cité) exprime, en chaque point intérieur à P, la valeur d'une $f(x)$ (supposée holomorphe au voisinage de P), à l'aide d'une intégrale n-uple portant sur les valeurs de f sur une partie convenable de la frontière de P. Le noyau de cette intégrale est fabriqué au moyen des formes différentielles α_j (formule (3) ci-dessus); il ne dépend pas, bien entendu, de la fonction f. L'intégration se fait, en principe, sur des "arêtes" (à n dimensions réelles) du polyèdre P; mais cela soulève des difficultés que nous voulons éviter.

Pour cela, étant donnée f holomorphe au voisinage de P, prenons un voisinage compact $\tilde{P}$ de P, polyèdre pour les mêmes fonctions X_j, tel que f soit encore holomorphe au voisinage de $\tilde{P}$. Dans le plan des compacts Δ_j et $\tilde{\Delta}_j$, il existe une fonction réelle a_j, que nous pouvons supposer indéfiniment dérivable (par rapport aux coordonnées réelles du plan), et qui soit égale à 1 au voisinage de Δ_j, et à 0 hors de $\tilde{\Delta}_j$. Le support A_j de la fonction a_j est contenu dans $\tilde{\Delta}_j$, et le support A'_j de la différentielle da_j est contenu dans $\tilde{\Delta}_j - \Delta_j$.

4. D'une manière générale, supposons donnée, pour chaque j, une fonction réelle, indéfiniment dérivable, a_j dans le j-ième plan; soit b_j la fonction composée $a_j \circ X_j$, indéfiniment dérivable dans D. Le support B_j de b_j est l'image réciproque (pour l'application X_j) du support A_j de a_j, parce que l'application X_j est ouverte. De même, le support B'_j de db_j est l'image réciproque de support A'_j de da_j. On a évidemment $A'_j \subset A_j$, $B'_j \subset B_j$. Supposons désormais que l'intersection B des B_j soit compacte; B est le support de la fonction b, produit des b_j.

Dans tout ce qui suit, on considérera un point y de D, qui soit hors de la réunion des B'_j (ceci, pour éviter toute difficulté accessoire); cette condition signifie que chaque fonction b_j est constante au voisinage de y, ou encore que chaque a_j est constante au voisinage de $X_j(y)$.

Cette condition est vérifiée dans les circonstances du n° 3, si y appartient au polyèdre P.

La forme α_j ayant été définie par (2), la forme

(4) $\omega_j = \alpha_j \wedge db_j(x)$ n'a pas de singularité, puisque $y \notin B'_j$.

Considérons la forme différentielle de degré $2n$, partout définie dans D:

(5) $$\Omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_n} \frac{b}{b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_n}} \omega_{j_1} \omega_{j_2} \cdots \omega_{j_n} ,$$

forme dont le support est contenu dans B, donc compact. Cette forme dépend du point y; elle dépend aussi des fonctions a_j, et dépend linéairement de chacune d'elles. On écrira $\Omega(y)$, ou $\Omega(y;\, a_1, \ldots, a_p)$ quand on voudra rappeler cette dépendance.

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue au voisinage de la réunion des ensembles

$$B \cap B'_{j_1} \cap \cdots \cap B'_{j_n} \quad (j_1, \ldots, j_n \text{ distincts, mais quelconques});$$

la forme $f\Omega$ est définie dans tout D, et à support compact; on peut donc l'intégrer dans D. On écrira $\int f\Omega$ pour cette intégrale $(2n)$-uple. Le théorème essentiel est le suivant:

<u>Théorème</u> 1. <u>Soit</u> $f(x)$ <u>holomorphe au voisinage de</u> B, <u>et soit</u> y <u>un point de</u> D, <u>hors de la réunion des</u> B'_j. <u>Alors</u>

(6) $$\int f\Omega(y) = (2\pi i)^n\, b(y)\, f(y) .$$

(En particulier, dans les circonstances du n° 3, l'intégrale sera égale à $(2\pi i)^n f(y)$ si y appartient au polyèdre P, à 0 si y est hors du polyèdre $\tilde{P}$).

5. Avant de commencer la démonstration du théorème 1, donnons un:

<u>Lemme</u> 1. Soit j un indice $\leq p$, et supposons $y \notin B_j$. On a alors

(7) $$(-1)^{n(n-1)/2}\, \Omega = \sum \alpha_j \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n}\, d\left(\frac{b}{b_{j_2} \cdots b_{j_n}}\, db_{j_2} \cdots db_{j_n} \right)$$

la sommation étant étendue aux suites strictement croissantes d'entiers $j_2, \ldots, j_n$ tous différents de j.

En effet, l'identité (3) conduit facilement à

$$(-1)^{n(n-1)/2}\,\Omega = \sum_{j_2 < \cdots < j_n} \sum_{j_1} \alpha_j \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n} \frac{b}{b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_n}} db_{j_1} db_{j_2} \cdots db_{j_n}$$

Ceci peut s'écrire, compte tenu du fait que $b_j \alpha_j$ n'a pas de singularité (à cause de l'hypothèse $y \notin B_j$):

$$(-1)^{n(n-1)/2}\,\Omega = \sum_{j_2 < \cdots < j_n} \alpha_j \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n}\, d\left(\frac{b}{b_{j_2} \cdots b_{j_n}}\right) db_{j_2} \cdots db_{j_n} \,,$$

d'où la formule (7).

<u>Lemme</u> 2. Soit f une fonction définie et holomorphe au voisinage de chacun des ensembles $B \cap B'_{j_2} \cap \cdots \cap B'_{j_n}$ $(j_2, \ldots, j_n$ distincts et $\neq$ d'un certain $j)$. Soit y un point de D, tel que $y \notin B_j$ (et, bien entendu, $y \notin B'_{j_i}$ pour tout j_i). Alors

$$\int f\,\Omega(y) = 0\,.$$

En effet, d'après le lemme 1, on a

$$(-1)^{n(n-1)/2} f\Omega = \sum_{j_2 < \cdots < j_n} \alpha_j \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n}\, f\, d\left(\frac{b}{b_{j_2} \cdots b_{j_n}} db_{j_2} \cdots db_{j_n}\right).$$

La forme $f\,\alpha_j \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n}$ est définie au voisinage du support de la forme

$$\frac{b}{b_{j_2} \cdots b_{j_n}} db_{j_2} \cdots db_{j_n}\,,$$

et elle s'écrit $u\,dx_1 \cdots dx_n$, où u est holomorphe; donc sa différentielle extérieure est nulle au voisinage de ce support, et par suite

$$d\left(f\,\alpha_j \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_n} \frac{b}{b_{j_2} \cdots b_{j_n}} db_{j_2} \cdots db_{j_n}\right) = (-1)^{n(n+1)/2} f\Omega\,,$$

ce qui entraîne que l'intégrale de $f\,\Omega$ est nulle.

6. <u>Démonstration du théorème</u> 1. On va prouver la proposition plus générale que voici:

Proposition 2. Soit $y \in D$, $y \notin B'_j$ pour tout j. Notons $C_j(y)$ l'ensemble des points x tels que $X_j(x) = X_j(y)$. Supposons que $f(x)$ soit définie et holomorphe au voisinage des ensembles suivants:

$B \cap B'_{j_2} \cap \cdots \cap B'_{j_n}$ (quels que soient $j_2, \ldots, j_n$ distincts et > 1),

$B \cap C_1(y) \cap B'_{j_3} \cap \cdots \cap B'_{j_n}$ (quels que soient $j_3, \ldots, j_n$ distincts et > 2),

. . . .

$B \cap C_1(y) \cap \cdots \cap C_{n-1}(y)$.

Alors on a la formule (6):

$$\int f\,\Omega(y) = (2\pi i)^n\, b(y)\, f(y) \quad . \tag{6}$$

(Observer que le lemme 2, où l'on ferait $j=1$, est un cas particulier de cette proposition.)

Pour la démonstration, on se ramène d'abord au cas où f est définie et holomorphe au voisinage de B tout entier. Pour cela, considérons des fonctions $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, resp. égales à $a_1, \ldots, a_n$ au voisinage des points $X_1(y), \ldots, X_n(y)$, et de supports arbitrairement petits. Soit $\bar{b}$ le produit des fonctions $\bar{a}_j \circ X_j$ (pour $j \leq n$) et $a_j \circ X_j$ (pour $j > n$). La fonction f est holomorphe au voisinage du support $\bar{B}$ de $\bar{b}$, si les supports des $\bar{a}_j$ $(j \leq n)$ ont été choisis assez petits. Or

$$\int f\,\Omega(y;\, a_1, \ldots, a_p) = \int f\,\Omega(y;\, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots, a_p) \;;$$

en effet, on prouve successivement les relations

$$\int f\,\Omega(y;\, a_1 - \bar{a}_1, a_2, \ldots, a_p) = 0, \ldots, \int f\,\Omega(y; \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}, a_n - \bar{a}_n, \ldots, a_p) = 0$$

par application répétée du lemme 2 (pourvu que les supports de $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ aient été pris assez petits).

Il reste à prouver que $\int f\,\Omega(y;\, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots, a_p) = (2\pi i)^n \bar{b}(y) f(y)$. Pour cela, reprenons les notations de la prop. 2, mais en supposant maintenant que f est holomorphe au voisinage de B. Nous allons supposer de plus que les n premières fonctions X_j ne sont autres que les coordonnées

$x_1, \dots, x_n$ de l'espace ambiant, et que, pour $1 \leq j \leq n$, $P_{jk}(x, y) = \delta_{jk}$ (symbole de Kronecker). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on rajouterait ces fonctions à la collection des X_j et P_{jk} déjà données, et on prendrait $a_j \equiv 1$ pour $j \leq n$. Il est clair que cela ne change pas la forme Ω. Cela étant, le même raisonnement que ci-dessus permet de remplacer $a_1, \dots, a_n$ par des fonctions $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$, identiques à 1 au voisinage de $y_1, \dots, y_n$ respectivement, et de supports arbitrairement petits. Si ces supports sont assez petits, la forme $\Omega(y; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \dots, a_p)$ se réduit à

$$b(x) \frac{dx_1}{x_1 - y_1} d\bar{a}_1 \cdots \frac{dx_n}{x_n - y_n} d\bar{a}_n \quad ,$$

où $b(x)$ désigne le produit des b_j pour $j > n$, produit qui est constant au voisinage du point y. On retombe alors sur l'intégrale de Cauchy, modifiée comme il a été expliqué dans l'Introduction. Donc

$$\int f\,\Omega(y) = (2\pi i)^n\, b(y)\, f(y) \quad .$$

C.Q.F.D.

7. Retour aux polyèdres analytiques.

Appliquons le théorème 1 à la situation du n° 3. Soit $f(x)$ holomorphe au voisinage d'un polyèdre P; choisissons $\tilde{P}$ et les fonctions a_j comme il a été dit au n° 3. Alors, pour tout $y \in P$, on a

$$\int f\,\Omega(y) = (2\pi i)^n f(y) \ .$$

Mais pour obtenir ce résultat il n'est même pas nécessaire de supposer f définie et holomorphe au voisinage de P.

Tout d'abord, rappelons que P'_j désigne l'ensemble des points $x \in P$ tels que $X_j(x)$ appartienne à la frontière Δ'_j de Δ_j (P'_j est la j-ième "face" de P). Soit f définie et holomorphe au voisinage de tous les ensembles $P'_{j_1} \cap \cdots \cap P'_{j_n}$ ($j_1, \dots, j_n$ distincts quelsonques); on peut choisir les fonctions a_j (du n° 3) de manière que f soit holomorphe au voisinage des ensembles $B \cap B'_{j_1} \cap \cdots \cap B'_{j_n}$. Alors la forme $f\,\Omega(y)$ est définie; pour $y \in P$, l'intégrale

$$(8) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^n} \int f\,\Omega(y) = F(y)$$

est indépendante du choix des a_j (raisonner comme pour la prop. 2). Il est clair que $F(y)$ est holomorphe en tout point $y \in P$.

Convenons, une fois toutes, d'appeler fonction holomorphe sur un compact K une fonction holomorphe dans un voisinage de K, en convenant d'identifier deux fonctions quand elles coïncident dans un voisinage de K. Avec cette convention de langage, nous pouvons dire que la formule (8) associe à toute fonction f, holomorphe sur la réunion des compacts $P'_{j_1} \cap \cdots \cap P'_{j_n}$, une fonction $F(y)$ holomorphe sur le polyèdre P. Et F dépend linéairement de f.

Si f est la restriction d'une fonction holomorphe sur P, alors cette dernière n'est autre que F, d'après le théorème 1. Cela montre, en passant, que les ensembles $P'_{j_1} \cap \cdots \cap P'_{j_n}$ ne peuvent être tous vides (en supposant, bien entendu, P non vide): sinon on aurait $F = 0$ pour toute fonction f, ce qui est absurde (considérer la constante 1).

Cela dit, la proposition 2 entraîne immédiatement le théorème:

Théorème 2. Soit f définie et holomorphe sur un compact Q contenu dans P et contenant les ensembles $P'_{j_1} \cap \cdots \cap P'_{j_n}$ ($j_1, \ldots, j_n$ distincts); soit K l'ensemble des $y \in Q$ tels que Q contienne tous les ensembles

$P'_{j_2} \cap \cdots \cap P'_{j_n}$ ($j_2, \ldots, j_n$ distincts et > 1),

$C_1(y) \cap P'_{j_3} \cap \cdots \cap P'_{j_n}$ ($j_3, \ldots, j_n$ distincts et > 2),

. . . .

$C_1(y) \cap \cdots \cap C_{n-1}(y) \cap P$.

Alors la restriction de f au compact K se prolonge en une fonction F holomorphe sur le polyèdre P, et donnée par la formule (8).

Ceci généralise un résultat classique de Hartogs (que nous énonçons, pour simplifier, dans le cas $n = 3$): soit un point (y_1, y_2, y_3) tel que $|y_1| \le 1$, $|y_2| \le 1$, $|y_3| \le 1$. Si une fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ est holomorphe sur chacun des ensembles

$$\begin{array}{lll} |x_1| \leq 1, & |x_2| = 1, & |x_3| = 1, \\ x_1 = y_1, & |x_2| \leq 1, & |x_3| = 1, \\ x_1 = y_1, & x_2 = y_2, & |x_3| \leq 1, \end{array}$$

elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, $|x_3| \leq 1$.

Corollaire du théorème 2: *soit* Q *la réunion des ensembles* $P'_{j_1} \cap \cdots \cap P'_{j_{n-1}}$ ($j_1, \ldots, j_{n-1}$ distincts quelconques); *toute fonction holomorphe sur* Q *se prolonge en une fonction holomorphe sur le polyèdre* P.

En effet, soit $y \in Q$; supposons, par exemple, $y \in P'_1 \cap \cdots \cap P'_{n-1}$, et appliquons le théorème 2. On trouve que $y \in K$ (notations de ce théorème), donc f et F coïncident au voisinage de y.

C.Q.F.D.

Remarque: avec des hypothèses convenables de régularité, les ensembles $P'_{j_1} \cap \cdots \cap P'_{j_{n-1}}$ sont les "faces de dimension n+1" du polyèdre. Dans le cas $n = 2$, elles en constituent la frontière, mais pour $n \geq 3$, ce n'est qu'une partie de cette frontière.

8. Approximation des fonctions holomorphes sur un polyèdre.

Supposons désormais que les Δ_j soient des cercles centrés à l'origine, de rayon 1. Choisissons des fonctions a_j comme il est dit au n° 3. Si $y \in P$ et $x \in B'_j$, on a $|X_j(y)| \leq 1$, $|X_j(x)| > 1$; on peut donc développer en série

$$\frac{1}{X_j(x) - X_j(y)} = \sum_{p \geq 0} (X_j(y))^p (X_j(x))^{-p-1} .$$

Ceci donne un developpement en série pour la forme $\Omega(y)$, normalement convergent pour $y \in P$; comme fonctions de y, les termes de ce développement sont holomorphes pour $y \in D$. D'où:

Théorème 3. *Si un polyèdre analytique* P *est défini par des inégalités* $|X_j(x)| \leq 1$, *où les* X_j *sont holomorphes dans* D, *toute fonction holomorphe sur* P *est limite uniforme de fonctions holomorphes dans* D.

(N.B: il suffit que P possède un voisinage ouvert E tel que P soit l'ensemble des points de E satisfaisant aux inégalitiés $|X_j(x)| \leq 1$; du moment que les X_j sont holomorphes dans D, il s'ensuit que toute fonction holomorphe sur P est limite uniforme de fonctions holomorphes dans D). Remarque: en toute rigueur, ce théorème n'est démontré que moyennant l'existence des $P_{jk}(x, y)$, holomorphes dans $D \times D$.

Complément au théorème 3: si les X_j sont des polynômes (resp. des fonctions rationnelles), on peut prendre pour les P_{jk} des polynômes (resp. des fonctions rationnelles). Donc toute fonction holomorphe sur le polyèdre P est limite uniforme de polynômes (resp. de f. ration).

Remarque: On verra plus tard (théorie des idéaux de f. anal.) que le résultat suivant est toujours valable: si un polyèdre P est défini par des inégalites $|X_j(x)| \leq 1$, toute fonction holomorphe sur P est limite uniforme de polynômes par rapport aux X_j et aux coordonnées x_k.

Bibliographie

A. WEIL, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Annalen, 111 (1935), p. 178-182. Voir aussi:

A. WEIL, Comptes Rendus, 194 (1932), p. 1304.