Séminaire Henri Cartan

Ichiro Satake

Caractérisation de l'espace des spitzenformen

Séminaire Henri Cartan, tome 10, nº 1 (1957-1958), exp. nº 9 bis, p. 32-38
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A10_0>

Supplément à l'exposé 9

CARACTÉRISATION DE L'ESPACE DES SPITZENFORMEN

par Ichiro SATAKE

On se propose de donner ici une démonstration du lemme utilisé dans l'exposé 9 (p. 9-07). On fera usage de notations et de résultats d'exposés suivants, notamment les exposés 12, 14 et 16.

Soit Γ' un groupe commensurable au groupe modulaire Γ ; nous avons défini un produit scalaire de $f , g \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu , \rho)$ par

$$(1) \qquad \langle f , g \rangle_{\Gamma'} = \int_{\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n} \langle \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z) , \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ g(Z) \rangle \, dZ$$
$$= \int_{\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n} \mathrm{Tr}(g(Z)^* \circ \rho(Y) \circ f(Z)) \, dZ ,$$

où l'adjoint * est défini par rapport aux produits scalaires adaptés de F_μ et de F_ρ , et $dZ = \det(Y)^{-n-1} \, dX \, dY$ est la mesure invariante de $\mathfrak{S}_n$; de même, nous avons défini les normes de $f \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu , \rho)$ par

$$(2) \qquad \|f\|_{\Gamma',p} = \left(\int_{\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p \, dZ\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

$$(3) \qquad \|f\|_{\Gamma',\infty} = \sup_{\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|$$

et posé

$$(4) \qquad \mathcal{H}^p_{\Gamma'}(\mu ; \rho) = \{f \; ; \; f \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu , \rho) , \|f\|_{\Gamma',p} < \infty\} \qquad (1 \leq p \leq \infty)$$

En outre on désigne par $\mathfrak{S}_{\Gamma'}(\mu , \rho)$ l'espace des "Spitzenformen" d'espèce (μ , ρ) pour Γ' .

Il est trivial de $\mathcal{H}^\infty_{\Gamma'} \subset \mathcal{H}^p_{\Gamma'} \subset \mathcal{H}^1_{\Gamma'}$ ($\mathcal{H}^p_{\Gamma'}$ est une fonction croissante de p) ; on sait d'ailleurs que

$$(5) \qquad \mathfrak{S}_{\Gamma'}(\mu , \rho) \subset \mathcal{H}^\infty_{\Gamma'}(\mu , \rho)$$

et que l'égalité a lieu si $\alpha_n = 0$ (Exposé 7, n° 3, corollaire 1 au théorème 1 et théorème 2 ; ce résultat démontré pour $\Gamma' = \Gamma$ s'étend facilement au cas de Γ' général). On se propose maintenant de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $0 \leq p < \infty$. <u>Si</u> $p\alpha_n \geq 2n$, <u>on a</u>

(6) $$\mathcal{H}^p_{\Gamma}(\mu, \rho) = \mathcal{S}_{\Gamma}(\mu, \rho) \quad ;$$

<u>si</u> $p\alpha_n < 2n$ <u>et si</u> ρ <u>est de dimension 1</u>, $\mathcal{H}^p_{\Gamma}(\mu, \rho)$ <u>est le sous-espace de</u> $\mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$ <u>formé des</u> f <u>telles que</u>

(7) $$\Phi^n_{p\alpha_n - n-1, \lambda} f = 0 \qquad \text{pour tout } \lambda$$

(il revient au même de dire que $\Phi^n_{p\alpha_n - n-1}(f|M) = 0$ pour toute $M \in \widetilde{\Gamma}$; on notera d'ailleurs que cette condition n'a pas de sens lorsque $p\alpha_n \leq n$). Pour la notation Φ^n_q, voir Exposé 14.

DÉMONSTRATION. - D'abord on va considérer le cas du groupe modulaire. Soit $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$; pour que f appartienne à $\mathcal{H}^p_{\Gamma}(\mu, \rho)$, il faut et il suffit que l'intégrale figurant dans (2) soit convergente dans un voisinage U de chaque point x de $\Gamma \backslash \mathcal{S}^*_n$ (puisque ceci est compact !), i.e. que

$$\int_{U \cap \Gamma \backslash \mathcal{S}_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p \, dZ < \infty \ ;$$

ceci équivaut à

$$\int_{\pi^{*-1}_{\Gamma}(U) \cap \Omega_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p \, dZ < \infty \ ,$$

ou encore, en prenant $x = \pi^*_{\Gamma}(Z_o)$, $Z_o \in \Omega_r$,

(8) $$\int_{V^{(n)}(U_r, K)} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p \, dZ < \infty \ ,$$

où $V^{(n)}(U_r, K)$ désigne l'ensemble des $Z \in \Omega_n$ telles que $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY$ $Y = {}^tWDW$, $D = (d_i \, \delta_{ij})$ avec $Z_1 \in U_r$, $d_{r+1} > K$, U_r étant un voisinage de Z_o dans Ω_r. (Cf. exposé 12).

Il est clair que, pour U_r borné et pour K suffisamment grand, $V^{(n)}(U_r, K)$ est un produit direct d'un ensemble borné dans l'espace de (X, W, D_1) et de l'ensemble

(9) $$\mathfrak{D}_r(K) = \left\{(d_{r+1}, \dots, d_n) \; ; \; d_i < u d_{i+1} (r+1 \leq i \leq n-1) \, , \, d_{r+1} > K \right\} .$$

D'autre part, on a

$$dZ = dX \, dW \prod_{i=1}^{n} d_i^{-i-1} \, d\, d_i \, ,$$

où dX , dW , $d\, d_i$ sont des mesures euclidiennes.

Ceci dit, démontrons la première partie du théorème. Soient $p\alpha_n \geq 2n$, $f \in \mathcal{H}_r^p(\mu, \rho)$ et supposons que $\Phi_{n-1}^n f = f_{n-1}$ ne soit pas identiquement nulle. Si l'on pose

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1^{(n-1)} & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & z_n \end{pmatrix} \, , \quad z_n = x_n + y_n i \, ,$$

on a

$$\|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f_{n-1}(Z_1)\| \leq \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|$$

$$+ \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ (f(Z) - f_{n-1}(Z_1))\| \quad ;$$

on voit facilement que $\|f(Z) - f_{n-1}(Z_1)\| \leq c_1 \, e^{-c_2 y_n}$ dans $V^{(n)}(U_{n-1}, K)$ (exposé 4, n° 4, proposition 2) et que

$$\|\rho(Y^{\frac{1}{2}})\| \leq c_3 \, e^{c_2/2 \, \mathrm{Tr}(Y)} \det(Y)^{\frac{\alpha_n}{2}}$$

(exposé 6, n° 1, lemme 1), avec c_1 , c_2 , $c_3 > 0$, d'où il résulte que

$$\|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ (f(Z) - f_{n-1}(Z_1))\|$$

est borné dans $V^{(n)}(U_{n-1}, K)$; par conséquent, on a

$$\int_{V^{(n)}(U_{n-1}, K)} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f_{n-1}(Z_1)\|^p \, dZ < \infty \, .$$

Mais, comme $f_{n-1}(Z_1) \in \mathrm{Hom}(F_{\mu^{(n-1)}}, F_{\rho^{(n-1)}})$, on a

$$\|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f_{n-1}(Z_1)\|^2 = \mathrm{Tr}(f_{n-1}(Z_1)^* \circ \rho(Y) \circ f_{n-1}(Z_1))$$

$$= \mathrm{Tr}(f_{n-1}(Z_1)^* \circ \rho({}^tW) \circ \rho^{(n-1)}(D_1 W_1) \circ d_n^{\alpha_n} f_{n-1}(Z_1)) ;$$

qui est $\geqslant c_4\, d_n^{\alpha_n}$ dans $V^{(n)}(U_{n-1}\,,\,K)$ pour $Z_o \in \Omega_{n-1}$ telle que $f_{n-1}(Z_o) \neq 0$, où c_4 est une constante positive. Donc la convergence de l'intégrale ci-dessus entraîne que

$$\int_K^{\infty} d_n^{\,p\frac{\alpha_n}{2}-n-1}\, d\, d_n < \infty \quad ,$$

ce qui est une contradiction pour $p\alpha_n \geqslant 2n$. Ainsi pour $p\alpha_n \geqslant 2n$, $f \in \mathcal{H}_r^p(\mu\,,\,\rho)$ entraîne $f \in \mathcal{S}_r(\mu\,,\,\rho)$. (La réciproque est déjà connue).

Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème. Supposons $p\,\alpha_n < 2n$ et dim $\rho = 1$; soit $f \in \mathcal{H}_r^p(\mu\,,\,\rho)$ et supposons que $\Phi_r^n\, f = f_r$ ne soit pas identiquement nulle. Si $f_r(Z_o) \neq 0$, $Z_o \in \Omega_r$, on peut prendre U_r, K tels que

$$\|f(Z)\| \geqslant \varepsilon \qquad \text{dans} \quad V^{(n)}(U_r\,,\,K) \ ;$$

alors il est clair que la convergence de l'intégrale (8) entraîne la convergence de

$$\int_{\mathcal{D}_r(K)} \prod_{i=r+1}^{n} d_i^{\,p\frac{\alpha_n}{2}-i-1}\, d\, d_i$$

$$= \int_K^{\infty} d_{r+1}^{\,p\frac{\alpha_n}{2}-r-2} \int_{n^{-1}d_{r+1}}^{\infty} d_{r+2}^{\,p\frac{\alpha_n}{2}-r-3} \cdots \int_{n^{-1}d_{n-2}}^{\infty} d_{n-1}^{\,p\frac{\alpha_n}{2}-n} \int_{n^{-1}d_{n-1}}^{\infty} d_n^{\,p\frac{\alpha_n}{2}-n-1}$$

d'où l'on déduit

$$i\left(p\,\frac{\alpha_n}{2} - n\right) + \frac{i(i-1)}{2} < 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-r) \ ,$$

i.e.

$$r > p\,\alpha_n - n - 1 \ .$$

Réciproquement, il est facile de voir que, si $r > p\alpha_n - n - 1$, l'intégrale (8) est toujours convergente ; il nous reste à affirmer la convergence de celle-là pour $0 \leqslant r \leqslant p\,\alpha_n - n - 1$, sous l'hypothèse que $\Phi^n_{p\alpha_n-n-1}\, f = 0$. Supposons donc $p\alpha_n > n$, $\Phi^n_{p\alpha_n-n-1}\, f = 0$; alors, par le raisonnement de la démonstration de la proposition 2 de l'exposé 4, on constate facilement que

$$\|f(Z)\| \leqslant c_1\, e^{-c_2(d_1 + \ldots + d_{p\alpha_n-n})} \qquad \text{dans} \quad \Omega_n \ ,$$

de sorte que l'intégrale (8) pour $Z_o \in \Omega_r$ $(0 \leqslant r \leqslant p\alpha_n - n - 1)$ est majorée par

$$\int_{\mathfrak{D}_r(K)} e^{-c_2 \sum_{i=r+1}^{p\alpha_n - n} d_i} \prod_{i=r+1}^{n} d_i^{p\frac{\alpha_n}{2}-i-1} \, d\, d_i$$

dont on voit immédiatement la convergence. La démonstration du théorème 1, dans la cas du groupe modulaire, est donc achevée.

Soit maintenant Γ' un groupe commensurable à Γ , et soient

$$(10) \qquad \Gamma'' = \Gamma \cap \Gamma', \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma'' M_i \ .$$

Comme on l'a fait dans la démonstration du théorème 3 de l'exposé 16, on peut faire correspondre, d'une façon canonique, à $f' \in \mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$ une forme $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$ où μ est un multiplicateur de Γ "induit" par un multiplicateur μ' de Γ' (plus précisément,,par la restriction de μ' à Γ'' et par la décomposition (10)) ; f est définie par

$$(11) \qquad f(Z) \ : \ a = (a_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} (f'|M_i)(Z)\, a_i \ ,$$

où $a_i \in F_{\mu_{M_i}}$ $(1 \leq i \leq k)$.

Soient f' , $g' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu', \rho)$ et soient f , g les éléments correspondante de $\mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$; alors on a

$$(12) \qquad \begin{aligned} <\rho(Y^{\frac{1}{2}})\, f(Z) \,,\, \rho(Y^{\frac{1}{2}})\, g(Z)> &= \operatorname{Tr}(g(Z)^{*} \circ \rho(Y) \circ f(Z)) \\ &= \sum_i \operatorname{Tr}((g'|M_i)(Z)^{*} \circ \rho(Y) \circ (f'|M_i)(Z)) \\ &= \sum_i \operatorname{Tr}(g(M_i Z)^{*} \circ \rho(Y_{M_i Z}) \circ f(M_i Z)) \\ &= \sum_i <\rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ f'(M_i Z), \rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}})\, g'(M_i Z) > , \end{aligned}$$

d'où, en désignant par F un domaine fondamental de Γ , on déduit

$$\begin{aligned} < f \,,\, g >_{\Gamma} &= \int_F < \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z) \,,\, \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ g(Z) > dZ \\ &= \int_F \sum_i <\rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ f'(M_i Z) \,,\, \rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ g'(M_i Z) > dZ \\ &= \int_{\bigcup M_i F} < \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f'(Z) \,,\, \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ g'(Z) > dZ \\ &= < f' \,,\, g' >_{\Gamma''} , \end{aligned}$$

parce que $\bigcup_i M_i F$ est un domaine fondamental de Γ'' ; ce dernier étant visiblement égal à $[\Gamma' : \Gamma''] < f' , g' >_{\Gamma'}$, on obtient la relation suivante

(13) $$< f , g >_{\Gamma} = [\Gamma' : \Gamma''] < f' , g' >_{\Gamma'} .$$

Or, d'après (12), on a

$$\| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z) \|^2 = \sum_i \| \rho(Y_{M_i Z}) \circ f'(M_i Z) \|^2 ,$$

d'où

$$\| \rho(Y_{M_i Z}) \circ f'(M_i Z) \| \leq \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z) \| \leq \sum_i \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}_{M_i Z}) \circ f'(M_i Z) \| .$$

On en conclut que $f' \in \mathcal{H}^p_{\Gamma'}(\mu', \rho)$ si et seulement si $f \in \mathcal{H}^p_{\Gamma}(\mu , \rho)$; en effet, si $f' \in \mathcal{H}^p_{\Gamma'}(\mu', \rho)$, on a

$$\int_{\bigcup_i M_i F} \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f'(Z) \|^p < \infty ,$$

et par suite

$$\sum_i \int_F \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}_{M_i Z}) \circ f'(M_i Z) \|^p < \infty ,$$

d'où (inégalité de Minkowski)

$$\int_F \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z) \|^p < \infty ,$$

i.e. $f \in \mathcal{H}^p_{\Gamma}(\mu , \rho)$; réciproquement, si $f \in \mathcal{H}^p_{\Gamma}(\mu , \rho)$, on a

$$\int_F \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}_{M_i Z}) \circ f'(M_i Z) \|^p < \infty$$

pour chaque i , d'où

$$\int_{\bigcup_i M_i F} \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f'(Z) \|^p < \infty ,$$

donc $f' \in \mathcal{H}^p_{\Gamma'}(\mu', \rho)$, (nous avons supposé $p < \infty$; mais la conclusion ci-dessus est évidemment vraie pour $p = \infty$ aussi).

D'autre part, il est clair, d'après (12), que f' est une Spitzenform pour Γ' si et seulement si f est une Spitzenform pour Γ ; plus généralement, on a $\Phi^n_{r,\lambda} f' = 0$ pour tout λ si et seulement si $\Phi^n_r f = 0$. On a ainsi réduit la démonstration du théorème 1 au cas du groupe modulaire, ce qui achève la démonstration.