

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

BERNARD MORIN

La classe fondamentale d'un espace fibré

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 1 (1959-1960), exp. n° 8, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A8_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

4 janvier 1960

LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN ESPACE FIBRÉ

par Bernard MORIN

I. Sous-fibrés et fibrés partiels.

Dans tout cet exposé, A désigne un anneau commutatif avec élément unité, B un espace topologique, les lettres en italique, des systèmes locaux sur B de A -modules unitaires.

Rappelons qu'un système local \underline{G} de A -modules unitaires sur un espace topologique B peut être considéré comme la donnée, sur chaque composante connexe par arcs B_i de B , d'un A -module unitaire G_i et d'une représentation linéaire du groupe de Poincaré

$$\pi_1(B, b_i), \quad (b_i \in B_i) \text{ dans } G_i.$$

Chacun des G_i se trouve ainsi muni d'une structure de $A(\pi_1(B, b_i))$ -module à gauche.

Soient \underline{G} , \underline{G}' deux systèmes locaux : les A -modules $\text{Hom}_A(G_i, G'_i)$ et $G_i \otimes_A G'_i$ sont munis de structures de $\pi_1(B, b_i)$ -modules par les formules :

$$\begin{aligned} \pi.x &= \pi \circ x \circ \pi^{-1} \\ \text{et} \quad \pi(g \otimes g') &= (\pi g) \otimes (\pi g') \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \in \pi_1(B, b_i) \\ x \in \text{Hom}_A(G_i, G'_i) \\ g \in G_i \\ g' \in G'_i \end{array} \right.$$

On définit ainsi des systèmes locaux notés

$$\text{Hom}_A(\underline{G}, \underline{G}') \quad \text{et} \quad \underline{G} \otimes_A \underline{G}'$$

respectivement.

Si, en particulier, \underline{G} est un système local libre à un générateur (c'est-à-dire si chacun des G_i est un A -module libre à un générateur), le système local $\text{Hom}_A(\underline{G}, \underline{G})$ est isomorphe au système local trivial A . Sur chaque composante connexe, cet isomorphisme s'obtient en faisant correspondre l'unité de A à l'application identique de G_i . Plus généralement, si \underline{G} est libre à un générateur et \underline{G}' quelconque, on a :

$$\text{Hom}_A(\underline{G}, \underline{G}) \otimes_A \underline{G}' \cong \underline{G}'$$

Homologie et cohomologie de B à valeurs dans G. - Lorsque B est connexe, soit $\Sigma(B) = \bigcup_n \Sigma_n(B)$ l'ensemble des simplexes singuliers de B dont tous les sommets sont en $b \in B$, munis des opérateurs de face ∂_i et des opérateurs de dégénérescence s_i .

$\Sigma_1(B)$ est l'espace des lacets $\Omega(B, b)$.

Soit $h : \Sigma_1(B) \rightarrow \pi_1(B, b)$ l'application qui associe à chaque simplexe de dimension 1 l'élément du groupe de Poincaré qu'il définit.

$$\bar{\Sigma}(B) = \pi_1(B, b) \times \Sigma(B)$$

est un ensemble simplicial muni des opérateurs de face

$$\partial_i(\pi, \sigma) = (\pi, \partial_i \sigma) \quad 0 < i \leq n$$

$$\partial_0(\pi, \sigma) = (\pi \cdot h(\partial_2 \partial_2 \dots \partial_n \sigma), \partial_0 \sigma)$$

$$s_i(\pi, \sigma) = (\pi, s_i \sigma) \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \in \pi_1(B, b) \\ \sigma \in \Sigma_n \end{array} \right.$$

L'application $(\pi, \sigma) \rightarrow \sigma$ identifie la réalisation topologique du complexe $\bar{\Sigma}$ au revêtement universel de la réalisation topologique de Σ .

Le module libre $\bar{C}_*(B, A)$, de base $\bar{\Sigma}(B)$, se trouve ainsi muni d'une structure de $\pi_1(B, b)$ -module à gauche pour laquelle les opérateurs ∂_i et s_i sont linéaires. On pose

$$C_*(B, \underline{G}) = \underline{G}' \otimes_{\pi_1(B, b)} \bar{C}_*(B, A)$$

et

$$C^*(B, \underline{G}) = \text{Hom}_{\pi_1(B, b)}(\bar{C}_*(B, A), \underline{G})$$

où \underline{G}' désigne le $\pi_1(B, b)$ -module à droite déduit de \underline{G} en posant :

$$g\pi = \pi^{-1}g \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \in \pi_1(B, b) \\ g \in \underline{G} \end{array} \right.$$

L'homologie du complexe $C_*(B, \underline{G})$, (resp. $C^*(B, \underline{G})$), s'appelle l'homologie (resp. la cohomologie) de B à coefficients dans le système local \underline{G} .

Si B n'est pas connexe, son homologie (resp. sa cohomologie) à coefficients dans \underline{G} est, en chaque dimension, la somme directe (resp. le produit direct)

des homologies (resp. des cohomologies) à coefficients dans \underline{G} de chacune des composantes connexes de B .

DÉFINITION 1. - Soit $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} B$ un fibré au sens de SERRE, de base B , et de fibre F au-dessus d'un point $b \in B$:

a. On dira qu'un sous-espace $X' \subset X$ définit un sous-fibré de X si l'application $\pi|_{X'}$ est une application fibrée au sens de SERRE sur B . Alors, $F' = F \cap X'$ sera appelé la sous-fibre au-dessus de b . La paire (F, F') sera appelée la fibre relative du fibré relatif (X, X') .

b. On dira qu'un sous-espace $X'' \subset X$ définit un fibré partiel de X s'il existe un sous-espace $B'' \subset B$ tel que $\pi^{-1}(B'') = X''$.

Dans ces conditions, l'application $\pi|_{X''}$ est évidemment une application fibrée au sens de SERRE. B'' sera appelée la base du fibré partiel X'' , la paire (B, B'') sera appelée la base relative du fibré relatif (X, X'') .

Nous donnerons sans démonstration le résultat suivant qui complète les remarques de DOUADY ([1], paragraphe 6, B et C).

PROPOSITION 1. - Soit $F \rightarrow X \rightarrow B$ un fibré au sens de SERRE, $F' \rightarrow X' \rightarrow B$ un sous-fibré de X , $F \rightarrow X'' \rightarrow B''$ un fibré partiel de X . Soit \underline{G} un système local de A -modules unitaires sur B . On notera encore \underline{G} les systèmes locaux induits par \underline{G} sur X, X', X'', F' et B'' .

a. Dans ces conditions, il existe une suite spectrale notée

$$(E_r^{p,q}(X, (X', X''), \underline{G}))$$

telle que

$$E_2^{p,q}(X, (X', X''), \underline{G}) = H^p(B, B''; H^q(F, F'; \underline{G}))$$

et dont le terme E_∞ est isomorphe à un gradué associé à $H^*(X, X' \cup X''; \underline{G})$.

b. Si de plus, \underline{G}' et \underline{G}'' sont deux autres systèmes locaux de A -modules unitaires sur B , et h un homomorphisme de systèmes locaux $\underline{G}' \otimes_A \underline{G} \rightarrow \underline{G}''$, il existe un accouplement naturel de modules différentiels gradués :

$$E_r^{p',q'}(X, \underline{G}') \otimes_A E_r^{p,q}(X, (X', X''), \underline{G}) \rightarrow E_r^{p'+q',q'+q'}(X, (X', X''), \underline{G}'')$$

qui satisfait aux trois conditions suivantes :

1° Sur $E_2(X, \underline{G}') \otimes_A E_2(X, (X', X''), \underline{G})$ cet accouplement est donné par le cup-produit gauche :

$$\begin{aligned} H^{p'}(B, H^{q'}(F, \underline{G}')) \otimes_A H^p(B, B''; H^q(F, F'; \underline{G})) \\ \rightarrow H^{p'+p'}(B, B''; H^{q'+q'}(F, F'; \underline{G}'')) \end{aligned}$$

(Lorsqu'on a des systèmes locaux \underline{H} , \underline{H}' , \underline{H}'' de A -modules unitaires gradués sur B , et un homomorphisme $\underline{H}' \otimes_A \underline{H} \rightarrow \underline{H}''$, on définit le cup-produit gauche en appliquant la règle de Koszul au cup-produit usuel au sens des systèmes locaux \underline{H} , \underline{H}' , \underline{H}'' de A -modules).

$$2^\circ \quad d_r(a.b) = (d_r a).b + (-1)^{p'+q'} a.(d_r b) \quad \begin{cases} a \in E_r^{p',q'}(X, \underline{G}') \\ b \in E_r^{p,q}(X, (X', X''); \underline{G}) \end{cases},$$

et l'accouplement entre les E_{r+1} s'identifie à l'accouplement entre les d_r -homologies des E_r .

$$3^\circ \quad \text{Sur les gradués associés} \quad \begin{cases} GH^*(X, \underline{G}') \\ GH^*(X, X' \cup X''; \underline{G}) \end{cases}$$

cet accouplement coïncide avec l'accouplement induit par le cup-produit :

$$H^*(X, \underline{G}') \otimes_A H^*(X, X' \cup X''; \underline{G}) \rightarrow H^*(X, X' \cup X''; \underline{G}'')$$

Remarquons que, si $X_1 \supset X'$ définit un sous-fibré, et $X_2 \supset X''$ définit un fibré partiel de X , il existe de même un accouplement :

$$E_r(X, (X_1, X_2); \underline{G}') \otimes_A E_r(X, (X', X''); \underline{G}) \rightarrow E_r(X, (X', X''); \underline{G}'')$$

satisfaisant à des conditions analogues à celles énoncées dans la proposition 1.

Lorsque X' (resp. X'') est vide, on note $(E_r(X, X''; \underline{G}))$ (resp. $(E_r(X, X'; \underline{G}))$) la suite spectrale définie dans la proposition 1.

II. L'obstruction dans un espace fibré.

A. NOTATIONS. - Dans la suite, $\tilde{H}^*(F)$ (resp. $\tilde{H}_*(F)$) désigne la cohomologie réduite (resp. l'homologie réduite) de l'espace F .

Soit $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$ un fibré au sens de SERRE. On note $M(X)$ le mapping-cylindre de l'application π . C'est encore un fibré au sens de SERRE, de base B et de fibre le cône $C(F)$ sur F . On note $\bar{\pi}$ la projection $M(X) \rightarrow B$, et \bar{i} l'injection de la fibre $C(F) \rightarrow M(X)$,

j et s désignent les injections canoniques de X et de B dans $M(X)$.

Puisque $\tilde{H}^*(C(F), \underline{G})$ est nul,

$\bar{\pi}^* : H^*(B, \underline{G}) \rightarrow H^*(M(X), \underline{G})$ est un isomorphisme ;

$s : B \rightarrow M(X)$ est une section du fibré $M(X)$, et $s^* = \bar{\pi}^{*-1}$. Toute autre

section s' étant homotope à s , on a $s'^* = s^*$.

B. L'homomorphisme de Thom-Gysin. - Désignons par n le plus grand entier tel que $\tilde{H}_i(F, A) = 0$ pour tout $i < n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{H}^i(F, \underline{G}) &= 0 \text{ pour } i < n, \\ \underline{H}^n(F, \underline{G}) &\approx \text{Hom}_A(\underline{H}_n(F, A), \underline{G}). \end{aligned}$$

Comme on a un isomorphisme $\tilde{H}^i(F, \underline{G}) \xrightarrow{\delta_0} H^{i+1}(B(F), F; \underline{G})$, on a $E_2^{p,q}(M(X), X; \underline{G}) = 0$ pour $q < n$.

On a donc un edge-homomorphisme, permettant de définir l'application :

$$\psi : E^p(B, \tilde{H}^n(F, \underline{G})) \approx E_2^{p,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \rightarrow E^{p+n+1}(M(X), X; \underline{G}).$$

ψ s'appelle l'homomorphisme de Thom-Gysin.

Si toutes les différentielles de la suite spectrale aboutissant à $E_r^{p,n+1}(M(X), X; \underline{G})$ sont nulles, alors l'application ψ est un monomorphisme.

Si en outre, $\tilde{H}^i(F, \underline{G}) = 0$ pour tout $i \neq n$, ψ est un isomorphisme.

C. La suite exacte de Gysin. - Soit

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^i(M(X), X; \underline{G}) &\xrightarrow{\psi} H^i(M(X), \underline{G}) \xrightarrow{j^*} H^i(X, \underline{G}) \\ &\xrightarrow{\delta} H^{i+1}(M(X), X; \underline{G}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

la suite exacte de cohomologie de la paire $(M(X), X)$.

On pose $\theta = s^* \circ \psi \circ \psi$. Avec ces notations, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 2. - Si ψ est un isomorphisme, la suite suivante est une suite exacte

$$\begin{aligned} (1) \dots \rightarrow H^i(B, \tilde{H}^n(F, \underline{G})) &\xrightarrow{\theta} H^{i+n+1}(B, \underline{G}) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+n+1}(X, \underline{G}) \\ &\xrightarrow{\bar{\psi}^{-1} \circ \delta} H^{i+1}(B, \tilde{H}^n(F, \underline{G})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

lorsque $i \geq -n-1$, à condition de poser

$$H^i(B, \tilde{H}^n(F, \underline{G})) = 0 \text{ pour } i < 0.$$

DÉMONSTRATION. - (1) s'obtient en remplaçant dans le diagramme suivant les termes de la première ligne par les termes de la deuxième ligne qui leur sont isomorphes.

$$\begin{array}{ccccc} \dots \rightarrow H^{i+n+1}(M(X), X; \underline{G}) & \xrightarrow{\psi} & H^{i+n+1}(M(X), \underline{G}) & \xrightarrow{j^*} & H^{i+n+1}(X, \underline{G}) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+n+2}(M(X), X; \underline{G}) \rightarrow \dots \\ & \approx \uparrow \psi & & \approx \uparrow \pi^* & & \approx \uparrow \psi & \\ & H^i(B, \tilde{H}^n(F, \underline{G})) & & H^{i+n+1}(B, \underline{G}) & & H^{i+1}(B, \tilde{H}^n(F, \underline{G})) & \end{array}$$

(1) s'appelle la suite exacte de Gysin.

REMARQUE. - Lorsque $n > 1$, on peut écrire une suite (1') analogue à (1) en étudiant les propriétés de la suite spectrale : $(E_r(M(X), G))$ (cf. [3], paragraphe 5C). Mais alors, le premier et le troisième homomorphisme de (1') diffèrent par leurs signes des homomorphismes correspondants de (1). Ce fait résulte de la proposition 5 ci-dessous (cf. paragraphe 3).

D. Cas où $G = \tilde{H}_n(F, A)$. - L'élément de $\tilde{H}^n(F, \tilde{H}_n(F, A)) \approx \text{Hom}_A(\tilde{H}_n(F, A), \tilde{H}_n(F, A))$ correspondant à l'application identique de $\tilde{H}_n(F, A)$ s'appelle la classe fondamentale de la fibre et se note ε .

Sur chaque composante connexe B_i de B , cet élément définit dans :

$$\text{Hom}_A(\tilde{H}_n(F, A), \tilde{H}_n(F, A))$$

un élément ε_i invariant par les opérations de $\pi_1(B, b_i)$.

A l'élément ε_i correspond, par augmentation, un élément γ_i :

$$\gamma_i \in H^0(B_i, \text{Hom}_A(\tilde{H}_n(F, A), \tilde{H}_n(F, A))) \approx A \otimes_{\pi_1(B, b_i)} \text{Hom}_A(\tilde{H}_n(F, A), \tilde{H}_n(F, A))$$

La famille $(\gamma_i) \in \prod_i H^0(B_i, \tilde{H}^n(F, \tilde{H}_n(F, A)))$ s'identifie à un élément de $H^0(B, \tilde{H}^n(F, \tilde{H}_n(F, A)))$, noté γ .

On pose

$$u = \psi(\gamma) \in H^{n+1}(M(X), X; \tilde{H}_n(F, A))$$

DÉFINITION 2. - La classe $\gamma = s^* \circ \psi(u) = \theta(\gamma) \in H^{n+1}(B, \tilde{H}_n(F, A))$ s'appelle la classe fondamentale du fibré X .

REMARQUE. - Les classes u et γ sont définies de façon naturelle. En particulier, u induit $\delta_0(\varepsilon) \in H^*(G(F), F; A)$ sur la fibre relative $(C(F), F)$.

E. Cas où $\tilde{H}_n(F, A)$ est un système local libre à un générateur. - Lorsque $\tilde{H}_n(F, A)$ est un système local \underline{A} , libre à un générateur, l'isomorphisme

$$\tilde{H}_n(F, A) = \text{Hom}_A(\underline{A}, \underline{A}) \approx A$$

permet d'identifier

$$\gamma \in H^0(B, \text{Hom}_A(\underline{A}, \underline{A}))$$

à l'élément unité de $H^*(B, A)$.

L'application ψ , relative au système local \underline{A} , s'écrit alors

$$\psi : H^p(B, A) \rightarrow H^{p+n+1}(M(X), X; \underline{A})$$

et

$$\theta : H^p(B, A) \rightarrow H^{p+n+1}(B, \underline{A}) .$$

On a $u = \psi(1)$ et $\gamma = \theta(1)$.

Enfin l'isomorphisme :

$$(2) \quad \tilde{H}^n(\underline{F}, \underline{G}) \otimes_{\underline{A}} \underline{A} \simeq \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G}) \otimes_{\underline{A}} \underline{A} \simeq \underline{G}$$

permet de définir le cup-produit :

$$H^*(M(X), \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \otimes_{\underline{A}} H^*(M(X), X; \underline{A}) \rightarrow H^*(M(X), X; \underline{G}) .$$

PROPOSITION 3. - Si $\tilde{H}^n(\underline{F}, \underline{A})$ est un système local \underline{A} libre à un générateur les homomorphismes ψ et θ vérifient les propriétés multiplicatives suivantes :

$$(3) \quad \psi(x \cup y) = \bar{\pi}^*(x) \cup \psi(y)$$

$$(4) \quad \theta(x \cup y) = x \cup \theta(y) \quad \begin{cases} x \in H^p(B, \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \\ y \in H^q(B, \underline{A}) \end{cases} .$$

DEMONSTRATION. - On peut factoriser $\bar{\pi}^*$ et ψ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^* : H^p(B, \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) &\xrightarrow{\bar{\pi}_1^*} E_2^{p,0}(M(X), \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \\ &\xrightarrow{\bar{\pi}_2^*} E_{\mathcal{O}}^{p,0}(M(X), \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \xrightarrow{\bar{\pi}_3^*} H^p(M(X), \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \end{aligned} .$$

$$\begin{aligned} \psi : H^q(B, \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) &\xrightarrow{\psi_1} E_2^{p,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \xrightarrow{\psi_2} E_{\mathcal{O}}^{p,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \\ &\xrightarrow{\psi_3} H^{p+n+1}(M(X), X; \underline{G}) . \end{aligned}$$

On écrit l'accouplement des suites spectrales associées à $M(X)$ et $(M(X), X)$, relatif à l'accouplement de coefficients (2) :

$$E_r(M(X), \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \otimes_{\underline{A}} E_r(M(X), X; \underline{A}) \rightarrow E_r(M(X), X; \underline{G}) .$$

D'après la proposition 1b, 1°, on a :

$$\psi_1(x \cup y) = \bar{\pi}^*(x) \cdot \psi_1(y) \quad \begin{cases} x \in H^p(B, \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \\ y \in H^q(B, \underline{A}) \\ x \cup y \in H^{p+q}(B, \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \end{cases} .$$

Par application répétée de la proposition 1b, 2°, il vient, puisque

$$E_r^{*,0}(M(X), \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G})) \simeq E_{r+1}^{*,0}(M(X); \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{G}))$$

et que :

$$E_r^{*,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \rightarrow E_{r+1}^{*,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \quad (\text{edge-homomorphismes})$$

$$\Psi_2(x'.y') = \bar{\pi}_2^*(x').\Psi_2(y') \quad \begin{cases} x' \in E_2^{p,0}(M(X), \text{Hom}_A(\underline{A}, \underline{G})) \\ y' \in E^{q,n+1}(M(X), X; \underline{A}) \\ x'.y' \in E^{p+q,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \end{cases}$$

La proposition 1b, 3° donne enfin

$$\Psi_3(x''.y'') = \bar{\pi}_3^*(x'') \cup \Psi_3(y'') \quad \begin{cases} x'' \in E_{\mathbb{O}}^{p,0}(M(X), \text{Hom}_A(\underline{A}, \underline{G})) \\ y'' \in E_{\mathbb{O}}^{q,n+1}(M(X), X; \underline{A}) \\ x''.y'' \in E_{\mathbb{O}}^{p+q,n+1}(M(X), X; \underline{G}) \end{cases}$$

En combinant ces trois résultats, on voit que

$$\begin{aligned} \Psi(x \cup y) &= (\Psi_3 \circ \Psi_2) \circ (\bar{\pi}_1^*(x).\Psi_1(y)) \\ &= \Psi_3((\bar{\pi}_2^* \circ \bar{\pi}_1^*)(x).(\Psi_2 \circ \Psi_1)(y)) \\ &= \bar{\pi}^*(x) \cup \Psi(y) \end{aligned}$$

ce qui démontre (3).

Pour obtenir (4), il suffit d'appliquer aux deux membres de (3) l'homomorphisme $s^* \circ \Psi$ en utilisant les propriétés multiplicatives usuelles de Ψ :

$$\Psi(x \cup y) = x \cup \Psi(y) \quad \begin{cases} x \in H^p(M(X), \text{Hom}_A(\underline{A}, \underline{G})) \\ y \in H^q(M(X), X; \underline{A}) \\ x \cup y \in H^{p+q}(M(X), X; \underline{G}) \end{cases}$$

En posant $y = 1$ il vient le corollaire suivant:

COROLLAIRE. - Si $\tilde{H}_n(F, A)$ est un système local \underline{A} libre à un générateur, on a

$$(5) \quad \Psi(x) = \bar{\pi}^*(x) \cup \Psi(1) = \bar{\pi}^*(x) \cup u$$

$$(6) \quad \Theta(x) = x \cup \Theta(1) = x \cup \gamma$$

$$x \in H^*(B, \text{Hom}_A(\underline{A}, \underline{G})) .$$

Cas où B est triangulable.

PROPOSITION 4. - Soit X un espace fibré localement trivial, dont la base B est triangulable. On suppose de plus que

$A \approx \pi_n(\mathbb{F})$ (comme groupe abélien)

et que

$A = \mathbb{Z}_2 \approx \pi_0(\mathbb{F})$ (comme ensemble) lorsque $n = 0$, de façon que

$$\check{H}_{\infty}^n(\mathbb{F}, A) = \check{\pi}_n(\mathbb{F}) .$$

Dans ces conditions, la classe fondamentale γ du fibré X (cf. définition 2), coïncide avec la classe fondamentale de X au sens de la théorie des obstructions.

(C'est la première obstruction à l'existence d'une section $B \rightarrow X$; pour la définition de cette classe, cf. [1] et [4].

Pour s'en convaincre, on déformera la section $B \xrightarrow{s} M(X)$ en une application, $B \xrightarrow{\sigma} M(X)$ appliquant le n -squelette de B dans le sous-espace $X \subset M(X)$.

X étant localement trivial, la restriction de σ à un $(n+1)$ -simplexe de B définit un élément de $\pi_{n+1}(G(\mathbb{F}), \mathbb{F})$. On construit par ce moyen une $(n+1)$ -cochaîne de B à valeurs dans

$$\check{\pi}_{n+1}(G(\mathbb{F}), \mathbb{F}) \approx \check{H}_{\infty}^n(\mathbb{F}, A) = \check{A} .$$

On montrera sans peine que cette cochaîne est un cocycle dont la classe de cohomologie est γ . Par l'isomorphisme

$$\check{\pi}_{n+1}(G(\mathbb{F}), \mathbb{F}) \rightarrow \check{\pi}_n(\mathbb{F})$$

ce cocycle s'identifie d'autre part au cocycle de la première obstruction à l'existence d'une section de B dans X .

REMARQUE. - Si l'on donne un fibré partiel $X'' \rightarrow B''(X)$, on peut généraliser les constructions qui précèdent au fibré relatif

$$(X, X'') \rightarrow (B, B'')$$

et étendre par ce moyen aux fibrés de SERRE la théorie des classes d'obstruction relatives.

III. La transgression dans un espace fibré.

Dans ce paragraphe, on suppose que E est connexe et que

$$G = \check{H}_{\infty}^n(\mathbb{F}, A) .$$

Toutes les cohomologies et les suites spectrales sont prises à coefficients dans

$$\check{H}_{\infty}^n(\mathbb{F}, A) .$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{H}^n(F) & \xrightarrow{\delta_1} & H^{n+1}(X, \mathbb{F}) & \xrightarrow{\chi} & H^{n+1}(X) \\
 & & \uparrow \tilde{\pi}^* & & \uparrow \pi^* \\
 & & H^{n+1}(B, b) & \xrightarrow[\cong]{h} & H^{n+1}(B)
 \end{array}$$

En écrivant la suite spectrale associée à la paire (X, \mathbb{F}) on constate que $\tilde{\pi}^*$ est injective dans la dimension $n+1$. Comme

$$\text{Im}(\delta_1) = \text{Im}(\tilde{\pi}^*) ,$$

$\tilde{\pi}^{*-1}$ est définie sur l'image de δ_1 .

DÉFINITION 3. - On appelle transgression et on note τ l'application composée

$$h \circ \tilde{\pi}^{*-1} \circ \delta_1 .$$

Lorsque $n > 0$, τ se calcule à l'aide de la différentielle d_{n+1} de la suite spectrale $(E_r^{p,q}(X))$ de la manière suivante :

$$\tau : H^n(F) \approx E_{n+1}^{0,n}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1}^{n+1,0}(X) \approx H^{n+1}(E) .$$

Il suffit pour le voir, de remonter à la définition des différentielles d_r d'une suite spectrale.

PROPOSITION 5. - Soit $F \rightarrow X \rightarrow B$ un fibré au sens de SERRE dont la base B est connexe. L'image par transgression de la classe fondamentale de la fibre F est l'opposé de la classe fondamentale du fibré X .

Avec les notations de la définition 3 et du paragraphe 2D, on a donc :

$$(7) \quad \tau(\varepsilon) = - \chi .$$

DÉMONSTRATION. - Considérons le système d'espaces

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i} & X \\
 \downarrow j_0 & & \downarrow j \\
 C(F) & \xrightarrow{\bar{i}} & M(X)
 \end{array}$$

A l'aide de la suite spectrale attachée à la paire

$$(M(X), (X, C(F)))$$

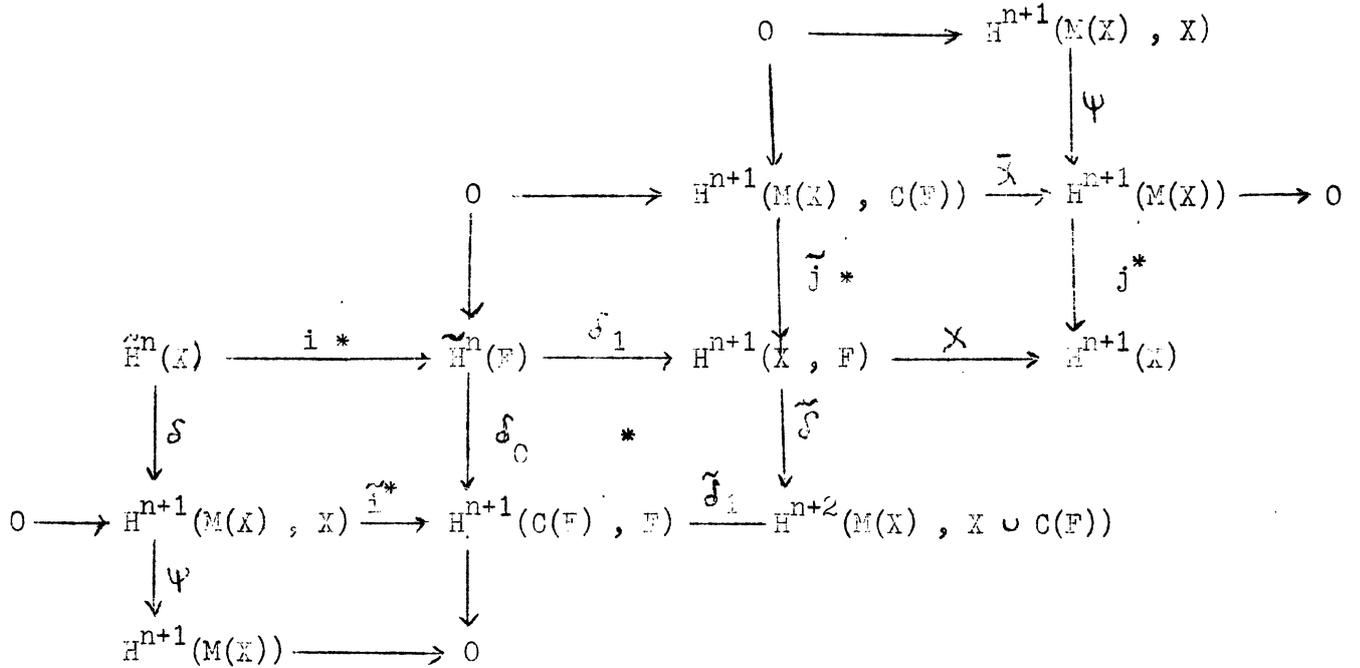
on voit que

$$H^i(M(X), X \cup C(F)) = 0 \quad \text{pour tout } i \leq n+1 .$$

En tenant compte du fait que

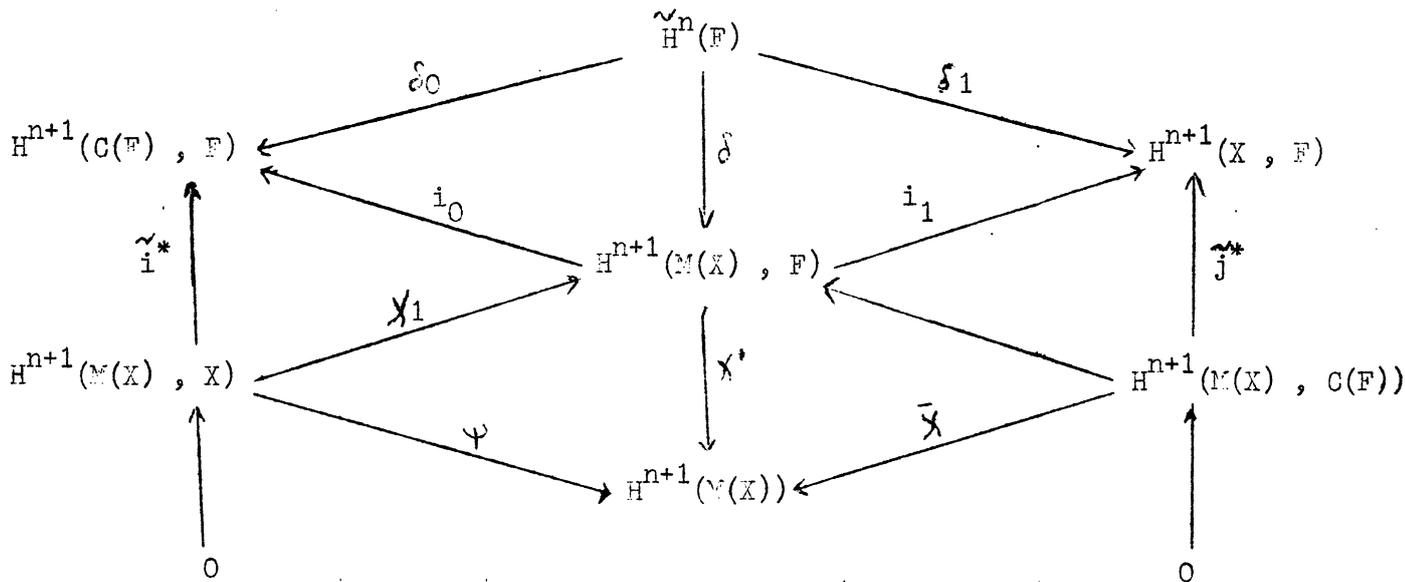
$$\tilde{H}^*(C(F)) = 0$$

le diagramme de cohomologie du système d'espaces précédent où tous les carrés sont commutatifs, sauf celui marqué d'une étoile qui est anticommutatif, s'écrit :



En combinant ce diagramme avec la suite exacte de cohomologie de la paire $(M(X), F)$,

on obtient le diagramme suivant, où toutes les lignes sont exactes :



Si on identifie $H^*(F)$, $H^*(F, b)$ et k , à $H^*(M(X))$, $H^*(M(X), C(F))$ et \tilde{H}^* respectivement, on a :

$$\tau = \bar{\chi} \circ \tilde{j}^{*-1} \circ \delta_1$$

et $\Psi(u) = \chi$.

En vertu de la remarque du paragraphe 2D

$$\tilde{i}^*(u) - \delta_0(\varepsilon) = i_0(\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)) = 0$$

et par suite :

$$\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon) \in \text{Im}(\chi_0)$$

Soit donc $x \in H^{n+1}(i^*(X), C(F))$ vérifiant :

$$\chi_0(x) = \chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)$$

Comme $i_1(\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)) = -i_1 \delta'(\varepsilon) = -\delta_1(\varepsilon)$

$$\tilde{j}^*(x) = -\delta_1(\varepsilon)$$

et en vertu de la définition 3

$$\chi(x) = -\tau(\varepsilon)$$

On voit ainsi que :

$$\Psi(u) = \chi(\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)) = -\tau(\varepsilon),$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Problèmes d'homotopie et de prolongement : théorie des obstructions, Séminaire Cartan, t. 2, 1949/50 : Espaces fibrés et homotopie, n° 3.
- [2] DOUADY (Adrien). - La suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 2.
- [3] DOUADY (Adrien). - Applications de la suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 3.
- [4] WU MEN TSUN. - Les classes caractéristiques d'un espace fibré, Séminaire Cartan, t. 2, 1949/50 : Espaces fibrés et homotopie, n° 18.