Henri Cartan

Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, III

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 18, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A8_0>

DÉMONSTRATION HOMOLOGIQUE DES THÉORÈMES DE PÉRIODICITÉ DE BOTT, III.

par Henri CARTAN

Dans cet exposé, il nous reste à démontrer que les applications Φ_i $(0 \leqslant i \leqslant 6)$ définies dans l'exposé 16 induisent des isomorphismes pour l'homologie à coefficients entiers. Lorsqu'il s'agit d'espaces dont l'homologie à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ est sans torsion (donc libre), il revient au même de prouver que Φ_i induit un isomorphisme pour les cohomologies à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$. Au lieu d'étudier l'application induite par Φ_i sur les homologies à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, on pourra aussi considérer : 1° les homologies à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}_2$; 2° les homologies à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}_2$; il suffira de montrer que, dans chacun des deux cas, on obtient un isomorphisme des homologies (cf. la remarque de la fin du numéro 3 de l'exposé 16). Enfin, pour montrer que Φ_i induit un isomorphisme des homologies à coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$, il revient au même de montrer que Φ_i induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$.

Pour Φ_0, la démonstration d'isomorphisme a déjà été donnée dans l'exposé 11 (théorème 5, page 10). On n'y revient pas.

<u>Démonstration pour</u> $\Phi_6 : \mathrm{Sp}(X_H)/U(X) \to \Omega(\mathrm{Sp}(X_H))$.

Considérons le diagramme (Δ_1) de l'exposé 16 (n° 4) ; on a vu qu'il est commutatif. En cohomologie à coefficients entiers, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Omega(SU(X \oplus X')) ; \underset{\sim}{Z}) & \xrightarrow{(\Phi_0)^*} & H^*(U(X \oplus X')/U(X) \times U(X') ; \underset{\sim}{Z}) \\ \Big\downarrow (g_1)^* & & \Big\downarrow (f_1)^* \\ H^*(\Omega(\mathrm{Sp}(\underset{\sim}{X_H})) ; \underset{\sim}{Z}) & \xrightarrow{(\Phi_6)^*} & H^*(\mathrm{Sp}(\underset{\sim}{X_H})/U(X) ; \underset{\sim}{Z}) \end{array} .$$

L'application $(f_1)^*$ est surjective, d'après (23) de l'exposé 17. Puisque $(\Phi_0)^*$ est bijective, $(\Phi_6)^* \circ (g_1)^*$ est surjective, donc $(\Phi_6)^*$ est surjective. Or les deux algèbres graduées $H^*(\Omega(\mathrm{Sp}(X_H)) ; \underset{\sim}{Z})$ et $H^*(\mathrm{Sp}(X_H)/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ sont $\underset{\sim}{Z}$-libres et ont même rang en chaque degré, d'après (80) et (25) de l'exposé 17 ; il s'ensuit que l'application surjective $(\Phi_6)^*$ est bijective.

C. Q. F. D.

<u>Démonstration pour</u> $\Phi_3 : U(Y)/Sp(X) \to \Omega(SO(Y)/U(Y))$.

Il suffira de montrer que l'application $(\Phi_3)_*$ des algèbres d'homologie à coefficients dans Z est <u>surjective</u> ; en effet, les algèbres $H_*(U(Y)/Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ et $H_*(\Omega(SO(Y)/U(Y)) ; \underset{\sim}{Z})$ sont $\underset{\sim}{Z}$-libres et ont même rang en chaque degré, d'après (17) et (86) de l'exposé 17.

Soit $p_3 : \Omega(SO(Y)/U(Y)) \to U(Y)$ l'application naturelle ; définissons h_3 par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} U(Y)/Sp(Y) \arrow[r, "\Phi_3"] \arrow[dr, "h_3"'] & \Omega(SO(Y)/U(Y)) \arrow[d, "p_3"] \\ & U(Y) \end{tikzcd}$$

Si on se réfère à la définition explicite de Φ_3 (exposé 16, numéro 2), on trouve une explicitation de h_3 : h_3 associe à la classe de $T \in U(Y)$ le commutateur $[j_d , T]$, où j_d désigne la multiplication à droite par j dans l'espace Y . Autrement dit, $h_3 : U(Y)/Sp(Y) \to U(Y)$ est induit par l'application $h'_3 : U(Y) \to U(Y)$ qui, à T , associe $[j_d , T]$.

LEMME 1. - <u>L'application</u> $H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>induite par</u> h'_3 <u>multiplie par</u> -2 <u>chaque générateur</u> $a_{4k+1} \in H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$.

DÉMONSTRATION. - L'application h'_3 est composée des applications

$$U(Y) \xrightarrow{\Delta} U(Y) \times U(Y) \xrightarrow{\alpha \times \sigma} U(Y) \times U(Y) \xrightarrow{P} U(Y)$$

où Δ désigne l'application diagonale, P la loi de composition du groupe $U(Y)$, σ l'application $T \to T^{-1}$, et α l'application $T \to - j_d T j_d$ (qui est endomorphisme du groupe $U(Y)$) . Si on applique le foncteur d'homologie (à coefficients entiers), on sait que $\sigma_* : H_*(U(Y)) \to H_*(U(Y))$ transforme chaque générateur a_{2k+1} en son opposé $- a_{2k+1}$. Quant à α_* , il transforme a_{2k+1} en $\varepsilon^{k+1} a_{2k+1}$ (où $\varepsilon = \pm 1$), d'après la fin du numéro 2 de l'exposé 17 ; il reste à déterminer ε . Pour cela, il suffit de regarder quel est l'effet de α_* sur le générateur a_1 ; or l'élément T qui consiste à multiplier les coordonnées, dans l'espace Y , par $e^{i\theta}$, se transforme en la multiplication par $- je^{i\theta} j = e^{-i\theta}$; donc a_1 est changé en $- a_1$, et par suite $\varepsilon = - 1$. Finalement, Δ_* transforme a_{4k+1} en $a_{4k+1} \otimes 1 + 1 \otimes a_{4k+1}$; si on applique $\alpha_* \otimes \sigma_*$, on obtient $- a_{4k+1} \otimes 1 - 1 \otimes a_{4k+1}$, et P_* transforme ceci en $- 2a_{4k+1}$, ce qui démontre le lemme 1.

D'autre part, on a vu en (87) (exp.17) que $(p_3)_* : H_*(\Omega(SO(X)/U(X)) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ applique, en degré $4k + 1$, les "indécomposables" de la première algèbre sur le <u>double</u> des indécomposables de la seconde. Par comparaison avec le lemme 1, on voit que $(p_3)_*$ induit une bijection des indécomposables de $H_*(\Omega(SO(X)/U(X))\ ;\ \mathbb{Z})$ sur l'image de $(h_3)_*$ (modulo les décomposables). Il s'ensuit que $(\Phi_3)_*$ est surjective modulo les décomposables, et comme c'est un homomorphisme d'algèbres, $(\Phi_3)_*$ est surjective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour $\Phi_1\ :\ B(Sp(Y)) \to \Omega(SU(Y \oplus Y')/Sp(Y \oplus Y'))$.

Considérons le diagramme (Δ_2) de l'exposé 16 (n° 4). Il est homotopiquement commutatif. En cohomologie à coefficients entiers, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^*(\Omega(SU(Y \oplus Y))) \arrow[r, "(\Phi_0)^*"] \arrow[d, "(g_2)^*"] & H^*(BU(Y)) \arrow[d, "(f_2)^*"] \\ H^*(\Omega(SU(Y \oplus Y)/Sp(Y \oplus Y))) \arrow[r, "(\Phi_1)^*"] & H^*(B(Sp(Y))) \end{tikzcd}$$.

L'application $(f_2)^*$ est surjective, d'après (15) de l'exposé 17. Puisque $(\Phi_0)^*$ est bijective, il s'ensuit que $(\Phi_1)^*$ est surjective. Or $H^*(\Omega(SU(Y \oplus Y)/Sp(Y \oplus Y)))$ et $H^*(B(Sp(Y))$ sont $\mathbb{Z}$-libres et ont même rang en chaque degré, d'après (83) et (10) de l'exposé 17. Il s'ensuit que l'application surjective $(\Phi_1)^*$ est bijective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour $\Phi_2\ :\ BO(V) \to \Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/SO(V \oplus V))$.

On va montrer successivement que Φ_2 induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients $\mathbb{Q}_2$, et un isomorphisme des homologies à coefficients $\mathbb{Z}_2$.

Pour le cohomologie à coefficients $\mathbb{Q}_2$, on considère le diagramme (Δ_3) de l'exposé 16 (numéro 4), qui est homotopiquement commutatif. On obtient un diagramme commutatif .

$$\begin{tikzcd} H^*(\Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}))\ ;\ \mathbb{Q}_2) \arrow[r, "(\Phi_0)^*"] \arrow[d, "(g_3)^*"] & H^*(BU(V_{\mathbb{C}})\ ;\ \mathbb{Q}_2) \arrow[d, "(f_3)^*"'] \\ H^*(\Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/SO(V \oplus V))\ ;\ \mathbb{Q}_2) \arrow[r, "(\Phi_3)^*"] & H^*(BO(V)\ ;\ \mathbb{Q}_2) \end{tikzcd}$$

L'application $(f_3)^*$ est surjective, d'après (56) de l'exposé 17. Puisque $(\Phi_0)^*$ est bijective, il s'ensuit que $(\Phi_2)^*$ est surjective ; or

$$H^*(\Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/SO(V \oplus V)) \,;\, \mathbb{Q}_2) \qquad \text{et} \qquad H^*(BO(V) \,;\, \mathbb{Q}_2)$$

ont même $\mathbb{Q}_2$-rang en chaque degré, d'après (89) et le numéro 9 de l'exposé 17. Il s'ensuit que $(\Phi_2)^*$ est bijective.

Pour l'homologie à coefficients $\mathbb{Z}_2$, soit

$$p_2 \,:\, \Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}/SO(V \oplus V)) \to SO(V \oplus V)$$

l'application naturelle ; définissons h_2 par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} BO(V) \arrow[r, "\Phi_2"] \arrow[dr, "h_2"'] & \Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/SO(V \oplus V)) \arrow[d, "p_2"] \\ & SO(V \oplus V) \end{tikzcd}$$

Si on se réfère à la définition explicite de Φ_2 (exposé 16, numéro 2), on trouve que $h_2 \,:\, O(V \oplus V)/O(V) \times O(V) \to SO(V \oplus V)$ provient de $h_2' \,:\, O(V \oplus V) \to SO(V \oplus V)$ qui associe à $T \in O(V \oplus V)$ le commutateur $[\alpha\,,\,T]$, où α désigne la transformation $(x\,,\,y) \to (-x\,,\,y)$ de $V \oplus V$. Il résulte de l'exposé 5 (théorème 1, page 20) que

$$(h_2)_* \,:\, H_*(BO(V) \,;\, \mathbb{Z}_2) \to H_*(SO(V \oplus V) \,;\, \mathbb{Z}_2)$$

envoie les générateurs z_k de $H_*(BO(V) \,;\, \mathbb{Z}_2)$ sur les générateurs c_k de $H_*(SO(V \oplus V) \,;\, \mathbb{Z}_2)$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_*(BO(V) \,;\, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\Phi_2)_*"] \arrow[dr, "(h_2)_*"'] & H_*(\Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/SO(V \oplus V)) \,;\, \mathbb{Z}_2) \arrow[d, "(p_2)_*"] \\ & H_*(SO(V \oplus V) \,;\, \mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

Puisque $(h_2)_* = (p_2)_* \circ (\Phi_2)_*$ est bijective sur les indécomposables, et que les espaces d'indécomposables de $H_*(\Omega(SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/SO(V \oplus V)) \,;\, \mathbb{Z}_2)$ et de $H_*(SO(V \oplus V) \,;\, \mathbb{Z}_2)$ ont même rang en chaque degré (cf. (30) et (89') de l'exposé 17), il s'ensuit que $(\Phi_2)_*$ induit une bijection des indécomposables. Comme c'est un homomorphisme d'algèbres, $(\Phi_2)_*$ est surjective. Or $(\Phi_2)_*$ applique une algèbre graduée sur une algèbre graduée qui a même rang en chaque degré, d'après (47) et (89') de l'exposé 17. Il s'ensuit que $(\Phi_2)_*$ est bijective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour $\Phi_4 : U(V_{\mathbf{C}})/O(V) \to \Omega(Sp(V_{\mathbf{H}})/U(V_{\mathbf{C}}))$.

On montrera successivement que Φ_4 induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients $\mathbf{Q}_2$ et un isomorphisme des homologies à coefficients $\mathbf{Z}_2$.

Pour la cohomologie à coefficients $\mathbf{Q}_2$, soit $p_4 : \Omega(Sp(V_{\mathbf{H}})/U(V_{\mathbf{C}})) \to U(V_{\mathbf{C}})$ l'application naturelle ; définissons h_4 par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} U(V_{\mathbf{C}})/O(V) \arrow[r, "\Phi_4"] \arrow[dr, "h_4"'] & \Omega(Sp(V_{\mathbf{H}})/U(V_{\mathbf{C}})) \arrow[d, "p_4"] \\ & U(V_{\mathbf{C}}) \end{tikzcd} .$$

Si on se réfère à la définition explicite de Φ_4 , on trouve que h_4 provient, par passage au quotient, de l'application $h'_4 : U(V_{\mathbf{C}}) \to U(V_{\mathbf{C}})$ qui, à $T \in U(V_{\mathbf{C}})$, associe le produit $\overline{T}T^{-1}$, en notant $\overline{T}$ la transformation "imaginaire conjuguée" de T . On a vu (exposé 17, fin du numéro 2, exemple) que l'application $H_*(U(V_{\mathbf{C}}) ; \mathbf{Z}) \to H_*(U(V_{\mathbf{C}}) ; \mathbf{Z})$ induite par $T \to \overline{T}$ envoie a_{2k-1} en $(-1)^k a_{2k-1}$. En raisonnant exactement comme pour la démonstration du lemme 1, on prouve le :

LEMME 2. - <u>L'application $H_*(U(V_{\mathbf{C}}) ; \mathbf{Z}) \to H_*(U(V_{\mathbf{C}}) ; \mathbf{Z})$ induite par h'_4 multiplie par -2 chaque générateur a_{4k+1}</u> .

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^*(U(V_{\mathbf{C}}) ; \mathbf{Q}_2) \arrow[d, "(p_4)^*"] \arrow[dr, "(h_4)^*"] & \\ H^*(\Omega(Sp(V_{\mathbf{H}})/U(V_{\mathbf{C}})) ; \mathbf{Q}_2) \arrow[r, "(\Phi_4)^*"] & H^*(U(V_{\mathbf{C}})/O(V) ; \mathbf{Q}_2) \end{tikzcd} .$$

D'après le lemme 2, et la formule (74') de l'exposé 17, $(h_4)^*$ est surjective. Il s'ensuit que $(\Phi_4)^*$ est surjective ; en comptant les $\mathbf{Q}_2$-rangs (cf. (74') et (84) de l'exposé 17), on conclut que $(\Phi_4)^*$ est bijective.

Passons à l'homologie à coefficients $\mathbf{Z}_2$. Considérons le diagramme (Δ_4) de l'exposé 16 (numéro 4), qui est homotopiquement commutatif. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_*(U(V_{\mathbf{C}})/O(V) ; \mathbf{Z}_2) \arrow[r, "(\Phi_4)_*"] \arrow[d, "(f_4)_*"] & H_*(\Omega(Sp(V_{\mathbf{H}})/U(V_{\mathbf{C}})) ; \mathbf{Z}_2) \arrow[d, "(g_4)_*"] \\ H_*(BO(V) ; \mathbf{Z}_2) \arrow[r, "(\Phi_2)_*"] & H_*(\Omega(SU(V_{\mathbf{C}} \oplus V'_{\mathbf{C}})/SO(V \oplus V)) ; \mathbf{Z}_2) \end{tikzcd}$$

D'après (75) de l'exposé 17, l'application $(f_4)_*$ est injective ; et on sait déjà que $(\Phi_2)_*$ est bijective. Il s'ensuit que $(\Phi_4)_*$ est injective. Or les algèbres graduées $H_*(U(V_C)/O(V) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ et $H_*(\Omega(Sp(V_H)/U(V_C)) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ ont même rang en chaque degré, d'après (75) et (84') de l'exposé 17. Il s'ensuit que $(\Phi_4)_*$ est bijective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour $\Phi_5 : SO(X)/U(X) \to \Omega(\mathrm{Spin}\ X)$.

On montrera successivement que Φ_5 induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$, et un isomorphisme des homologies à coefficients $\underset{\sim}{Z}_2$.

Pour la cohomologie à coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$, considérons le diagramme commutatif (Δ_5) de l'exposé 16 (numéro 4). On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Omega(SU(X \oplus X')) ; \underset{\sim}{Q}_2) & \xrightarrow{(\Phi_0)^*} & H^*(BU(X) ; \underset{\sim}{Q}_2) \\ \Big\downarrow (g_5)^* & & \Big\downarrow (f_5)^* \\ H^*(\Omega(\mathrm{Spin}\ X) ; \underset{\sim}{Q}_2) & \xrightarrow{(\Phi_5)^*} & H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Q}_2) \end{array}$$

L'application $(f_5)^*$ est surjective, d'après (70) ; et on sait que $(\Phi_0)^*$ est bijective. Il s'ensuit que $(\Phi_5)^*$ est surjective. Or les algèbres graduées $H^*(\Omega(\mathrm{Spin}\ X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ et $H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ ont même rang en chaque degré, d'après (81) et (69) de l'exposé 17. On conclut que $(\Phi_5)^*$ est bijective.

Passons à l'homologie à coefficients $\underset{\sim}{Z}_2$. Puisque

$$(\Phi_5)_* : H_*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(\Omega(\mathrm{Spin}\ X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$$

est un homomorphisme d'algèbres graduées, et que ces algèbres ont même rang en chaque degré (d'après (71) et (81') de l'exposé 17), il suffira de montrer que $(\Phi_5)_*$ est surjective modulo les éléments décomposables. Notons comme d'habitude $Q(A)$ le quotient d'une algèbre graduée A par le sous-module des éléments décomposables ; on voit qu'il suffit de montrer le :

LEMME 3. - L'application composée

$$H_*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \xrightarrow{(\Phi_5)_*} H_*(\Omega(\mathrm{Spin}\ X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to Q(H_*(\Omega(\mathrm{Spin}\ X) ; \underset{\sim}{Z}_2)))$$

est surjective.

DÉMONSTRATION du lemme 3. – Pour chaque entier n, considérons l'application

$$f : S^1 \divideontimes SO(2n+2) \to SO(2n+2)$$

définie comme suit : identifions $\underset{\sim}{R}^{2n+2}$ à $\underset{\sim}{C}^{n+1}$, ce qui définit sur $\underset{\sim}{R}^{2n+2}$ la structure complexe suivante :

$$i(x_0\ ,\ y_0\ ,\ \dots\ ,\ x_n\ ,\ y_n) = (-\,y_0\ ,\ x_0\ ,\ \dots\ ,\ -\,y_n\ ,\ x_n) \quad .$$

Soit $T \in SO(2n+2)$; on lui associe, pour chaque $\theta \in [0\ ,\ 2\pi]$,

$$[\alpha(\theta)\ ,\ T] \in SO(2n+2) \quad ,$$

où $\alpha(\theta)$ est la multiplication par $e^{-i\theta/2}$. On a bien $[\alpha(\theta)\ ,\ T] = 1$ pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$; d'où f.

Soit $p : SO(2n+2) \to S^{2n+1}$ l'application qui associe à T le point $T(1\ ,\ 0\ ,\ \dots\ ,\ 0)$. Plongeons $SO(2n+1)$ dans $SO(2n+2)$ en envoyant $\underset{\sim}{R}^{2n+1}$ dans $\underset{\sim}{R}^{2n+2}$ par $(y_0\ ,\ x_1\ ,\ y_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n\ ,\ y_n) \to (0\ ,\ y_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots\ ,\ y_n)$. L'application composée

$$S^1 \divideontimes SO(2n+1) \to S^1 \divideontimes SO(2n+2) \xrightarrow{f} SO(2n+2) \xrightarrow{p} S^{2n+1}$$

est la suivante : à $T' \in SO(2n+1)$ associons d'abord

$$T : (x_0\ ,\ y_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots) \to (x_0\ ,\ \varphi(y_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots)\ ,\ \psi(y_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots)) \quad ,$$

où φ (à une composante) et ψ (à $2n$ composantes) sont les applications définissant T' ; puis faisons $\alpha(\theta)\, T\, \alpha(-\theta)\, T^{-1}$, et prenons sa valeur au point $(1\ ,\ 0\ ,\ \dots\ ,\ 0)$. Un calcul élémentaire montre que les coordonnées $(x'_0\ ,\ y'_0\ ,\ \dots\ ,\ x'_n\ ,\ y'_n)$ du point obtenu sont données par les formules :

$$\begin{cases} x'_0 = \cos^2\frac{\theta}{2} + y_0 \sin^2\frac{\theta}{2}\ , \quad y'_0 = -(1-y_0)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ , \\ x'_i = \sin\frac{\theta}{2}\left(x_i\cos\frac{\theta}{2} + y_i\sin\frac{\theta}{2}\right)\ , \quad y'_i = \sin\frac{\theta}{2}\left(-\,x_i\sin\frac{\theta}{2} + y_i\cos\frac{\theta}{2}\right)\ , \end{cases}$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$, où $(y_0\ ,\ \dots\ ,\ x_n\ ,\ y_n)$ désigne le point de $\underset{\sim}{R}^{2n+1}$, transformé de $(1\ ,\ 0\ ,\ \dots\ ,\ 0)$ par T'. Si $(y_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots\ ,\ y_n) \in S^{2n}$, alors $(x'_0\ ,\ y'_0\ ,\ \dots\ ,\ x'_n\ ,\ y'_n) \in S^{2n+1}$; on a donc défini une application continue :

$$S^1 \divideontimes S^{2n} \to S^{2n+1} \quad ,$$

et les formules explicites ci-dessus permettent de vérifier facilement que c'est un <u>homéomorphisme</u> [on vérifie qu'étant donné un point $(x'_0\ ,\ y'_0\ ,\ \dots\ ,\ x'_n\ ,\ y'_n) \in S^{2n+1}$, distinct de $(1\ ,\ 0\ ,\ \dots\ ,\ 0)$, il existe un unique système $(\theta\ ,\ y_0\ ,\ \dots\ ,\ x_n\ ,\ y_n)$ qui l'a comme image ; en fait, on a :

$$-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1 - x'_0}{y'_0}\ , \qquad \text{ce qui détermine } \theta\ ;$$

puis

$$y_0 = x'_0 - \frac{y'^2_0}{1 - x'_0}\ ;$$

on observe que $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, et on calcule ensuite les x_i et y_i par les relations

$$x_i \cos\frac{\theta}{2} + y_i \sin\frac{\theta}{2} = \frac{x'_i}{\sin\frac{\theta}{2}}\ , \quad -x_i \sin\frac{\theta}{2} + y_i \cos\frac{\theta}{2} = \frac{y'_i}{\sin\frac{\theta}{2}}\ .\ ].$$

Observons maintenant que le commutateur $[\alpha(\theta)\ ,\ T]$ ne dépend que de la classe de T dans $SO(2n)/U(n)$, et que l'application

$$S^1 * (SO(2n+2)/U(n+1)) \to SO(2n+2)$$

induite par f n'est autre que l'application (que nous noterons ψ_5) qui a servi à définir Φ_5 (cf. exposé 16, n° 2). En résumé, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S^1 * (SO(2n)/U(n)) \arrow[r, "\psi_5"] \arrow[d] & SO(2n) \arrow[r] & SO(2n+1) \arrow[d] \\
S^1 * (SO(2n+1)/U(n)) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & S^1 * (SO(2n+2)/U(n+1)) \arrow[r] & SO(2n+2) \arrow[d] \\
S^1 * S^{2n} \arrow[rr, "\mu"] & & S^{2n+1}
\end{tikzcd}$$

où λ et μ sont des homéomorphismes.

Or il est classique que si on a une application continue $S^1 * X \to Y$ (X et Y étant des espaces topologiques), l'image de $H_*(S^1 * X) \to H_*(Y)$ se compose d'éléments primitifs de l'homologie. Le diagramme précédent, auquel on applique l'homologie à coefficients Z_2 , permet alors de montrer, par récurrence sur n , que l'image de l'application

$$H_*(S^1 * (SO(2n)/U(n))\ ;\ Z_2) \xrightarrow{(\psi_5)_*} H_*(SO(2n)\ ;\ Z_2)$$

se compose de tous les éléments primitifs dans les degrés impairs ≥ 3 . Ceci reste vrai à la limite quand n tend vers ∞ .

L'application $(\psi_5)_*$ se factorise comme suit :

$$H_*(S^1 * (SO(X)/U(X))\ ;\ Z_2) \xrightarrow{\nu} H_*(\mathrm{Spin}\ X\ ;\ Z_2) \to H_*(SO(X)\ ;\ Z_2)\ ,$$

et puisque la seconde de ces applications induit une bijection des primitifs dans les degrés impairs ≥ 3 (cf. exposé 17, fin du numéro 7), il s'ensuit que ν a pour image l'espace de tous les éléments primitifs de $H_*(\mathrm{Spin}\, X ; Z_2)$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_*(SO(X)/U(X) ; Z_2) \arrow[r, "(\Phi_5)_*"] \arrow[d, "\sigma"] & H_*(\Omega(\mathrm{Spin}\, X) ; Z_2) \arrow[d, "\sigma"] \\
H_*(S^1 \times\!\!\!\times (SO(X)/U(X)) ; Z_2) \arrow[r, "\nu"] & H_*(\mathrm{Spin}\, X ; Z_2)
\end{tikzcd}$$

où σ désigne la suspension en homologie (le premier homomorphisme vertical est, comme bien connu, un isomorphisme). Le deuxième homomorphisme vertical induit une bijection de l'espace des "indécomposables"

$Q(H_*(\Omega(\mathrm{Spin}\, X) ; Z_2))$ sur l'espace des primitifs de $H_*(\mathrm{Spin}\, X ; Z_2)$,

ainsi que cela résulte du théorème V de l'exposé 7 (buméro 7). Et puisque l'image de ν se compose de tous les éléments primitifs, le lemme 3 s'ensuit.