Séminaire Henri Cartan

Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. III. Produits fibrés d'espaces analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A6_0>

23 janvier 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

III. PRODUITS FIBRÉS D'ESPACES ANALYTIQUES.

1. Détermination des morphismes dans $\underset{\sim}{E}^n$.

Soit n un entier ≥ 0 , et considérons les fonctions coordonnées

$$z_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

sur $\underset{\sim}{E}^n$. Ce sont des sections du faisceau structural de $\underset{\sim}{E}^n$. Pour tout élément $a = (a_1 , \ldots , a_n)$ de $\underset{\sim}{E}^n$, on a

$$a_i = z_i(a) = \varepsilon_a(z_i)$$

où

$$\varepsilon_a : \mathcal{O}_a \to k$$

est l'homomorphisme d'augmentation, et où pour une section h du faisceau structural de $\underset{\sim}{E}^n$ au-dessus d'un ouvert U contenant a , on écrit $\varepsilon_a(h)$ au lieu de $\varepsilon_a(h_a)$.

Soit alors

$$f : X \to \underset{\sim}{E}^n$$

un morphisme d'espaces analytiques, posons

$$\varphi_i(f) = f^*(z_i) \ , \qquad \varphi(f) = (\varphi_i(f))_{1 \leq i \leq n} \quad .$$

De cette façon, on obtient une application canonique

$$\varphi = \varphi(X) : \operatorname{Hom}(X , \underset{\sim}{E}^n) \to \Gamma(X , \mathcal{O}_X)^n \quad .$$

Par construction, pour X variable, cette application est <u>fonctorielle</u> en X . Appliquant ceci aux ouverts de X , et désignant par $\mathfrak{A}$ le faisceau des morphismes d'ouverts de X dans $\underset{\sim}{E}^n$, on trouve un homomorphisme canonique de faisceaux, également noté φ :

$$\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{O}_X^n \quad .$$

THÉORÈME 1.1. - L'application fonctorielle $\varphi : \mathrm{Hom}(X, \underset{\sim}{E}^n) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ est bijective, i. e. définit un isomorphisme de foncteurs.

Il revient au même de dire que l'homomorphisme de faisceaux φ est un isomorphisme, pour tout X.

a. L'application φ est injective. Montrons d'abord comment la connaissance de $\varphi(f)$ détermine l'application ensembliste sous-jacente à f. Comme pour tout $x \in X$, en posant $a = f(x)$, l'homomorphisme

$$f_x^* : \mathcal{O}_a \to \mathcal{O}_x$$

est compatible avec les augmentations, il résulte d'une formule écrite plus haut qu'on aura

$$z_i(f(x)) = \varepsilon_x(\varphi_i(f)) \quad ,$$

ce qui détermine $f(x)$ à l'aide des $\varphi_i(f)_x$. D'autre part, si on pose $a_i = z_i(a) = z_i(f(x))$, les

$$z'_i = z_i - a_i$$

forment un système régulier de générateurs de l'anneau local $\mathcal{O}_a$, et la connaissance des $\varphi_i(f)$ implique la connaissance des

$$f_x^*(z'_i) = \varphi_i(f)_x - a_i \quad ,$$

donc de l'homomorphisme déduit de f_x par passage aux complétés

$$\hat{\mathcal{O}}_a \simeq k[[z'_1 , \dots , z'_n]] \to \hat{\mathcal{O}}_x \quad .$$

Comme $\mathcal{O}_x$ est un anneau local noethérien, il se plonge dans son complété par le théorème de Krull, donc f_x^* est connu quand on connaît son prolongé au complété. Ainsi, les homomorphismes f_x^* sont également connus quand on connaît $\varphi(f)$.

b. L'application φ est bijective. Il suffit de le prouver pour l'homomorphisme de faisceaux, donc de montrer que pour toute suite $(f_1 , \dots , f_n)$ de sections de $\mathcal{O}_X$, il existe un morphisme f d'un voisinage de x dans $\underset{\sim}{E}^n$, tel que l'on ait $\varphi_i(f)_x = (f_i)_x$ pour tout i. La question étant locale, on peut supposer que X est un sous-espace analytique fermé dans un ouvert U d'un $\underset{\sim}{E}^m$, et que les f_i sont les restrictions de sections g_i de $\mathcal{O}_U$. Comme nous l'avons dit dans l'exposé précédent, les f_i définissent une application holomorphe $g' : U \to k^n$, d'où un morphisme $g = (g', g'') : U \to \underset{\sim}{E}^n$ par $g''(h) = h \circ g''$. On a, par définition de g,

$$\varphi_i(g) = g_i \quad .$$

Soit alors f le morphisme de X dans $\underset{\sim}{E}^n$ induit par g, i. e. le composé

$$f = g \circ j \quad ,$$

où $j : X \to U$ est l'immersion canonique. On a alors

$$\varphi_i(f) = j^*(\varphi_i(g)) = j^*(g_i) = f_i \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.2. - Le foncteur contravariant

$$X \rightsquigarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$$

défini sur la catégorie (An) des espaces analytiques, à valeurs dans (Ens), est représentable par l'objet $\underset{\sim}{E}^n$.

On en conclut :

COROLLAIRE 1.3. - L'espace $\underset{\sim}{E}^{m+n}$, muni des deux morphismes naturels

$$\underset{\sim}{E}^{m+n} \longrightarrow \underset{\sim}{E}^m \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{E}^{m+n} \to \underset{\sim}{E}^n$$

définis respectivement par $z_1, \dots, z_m$ et par $z_{m+1}, \dots, z_{m+n}$, est un produit de $\underset{\sim}{E}^m$ et $\underset{\sim}{E}^n$ dans la catégorie (An) des espaces analytiques.

En particulier :

COROLLAIRE 1.4. - L'espace $\underset{\sim}{E}^n$, muni des n-morphismes $z_i : \underset{\sim}{E}^n \to \underset{\sim}{E}^1$, est une puissance cartésienne n-ième de $\underset{\sim}{E}^1$ dans la catégorie (An) des espaces analytiques.

Lorsque $n = 0$, cet énoncé reste valable et signifie que l'espace $\underset{\sim}{E}^0$ (réduit a un seul point, avec le faisceau réduit au corps k) est un <u>objet final</u> dans (An) ; fait qu'il est trivial de toute façon.

2. Théorème d'existence des produits fibrés.

THÉORÈME 2.1. - Dans la catégorie (An) des espaces analytiques, les limites projectives finies existent. Le foncteur canonique

$$T : (An) \to (Top) \quad ,$$

qui associe à tout espace analytique l'espace topologique sous-jacent, commute aux dites limites projectives.

Remarquons tout de suite que cet énoncé équivaut au suivant :

a. Dans (An) existe un objet final, et le produit fibré de deux objets sur un troisième ;

b. le foncteur T transforme objet final en objet final, et commute au produit fibré de deux objets sur un troisième.

L'assertion relative à l'objet final est triviale. Nous commencerons alors par établir l'assertion relative aux produits fibrés dans le cas particulier d'un produit ordinaire (i. e. le produit fibré sur l'objet final). La démonstration étant essentiellement formelle à partir de (1.3), et tout analogue à celle qu'on fait dans le cas des préschémas pour l'existence du produit fibré [2], nous esquisserons seulement les étapes de la démonstration.

LEMME 2.2. - Soient X et Y des espaces analytiques, et soit (Z, p_1, p_2) un produit de X et Y, où $p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ sont des morphismes. Soit X' (resp. Y') un sous-espace analytique de X (resp. Y), et soient i l'immersion canonique $X' \to X$, j l'immersion canonique $Y' \to Y$. Alors le produit $X' \times Y'$ existe, et $i \times j$ est une immersion de $X' \times Y'$ dans $X \times Y$, et est une immersion ouverte, resp. fermée, lorsque i et j le sont.

En effet, on voit aussitôt à partir des définitions, que si $Z_1 = Z \times_X X'$, $Z_2 = Z \times_Y Y'$ et $Z' = Z_1 \times_Z Z_2$ existent, alors Z' est un produit de X' et Y', et le morphisme structural $Z' \to Z$ n'est autre que $i \times j$. Or on a vu dans l'exposé précédent que Z_1 existe, et est un sous-espace analytique de Z, à savoir le sous-espace analytique ouvert induit sur l'image inverse $\overset{-1}{p_1}(X')$ lorsque X' est un sous-espace analytique ouvert de X, et le sous-espace analytique fermé de Z défini par l'Idéal $p_1(\mathcal{J}_1).\mathcal{O}_Z$ lorsque X' est le sous-espace analytique fermé de X défini par un Idéal de type fini $\mathcal{J}_1$, ce qui donne la détermination de Z_1 dans le cas général, en deux étapes. On a de même le sous-espace analytique Z_2 de Z, et il reste à remarquer que le produit fibré (même dans la catégorie de <u>tous</u> les espaces annelés) de deux sous-espaces analytiques Z_1 et Z_2 de Z existe, et est un sous-espace analytique, à savoir le sous-espace analytique ouvert induit dans $Z_1 \cap Z_2$ si les Z_i sont des sous-espaces analytiques ouverts, et le sous-espace analytique fermé défini par $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$ si chaque Z_i est un sous-espace analytique fermé défini par un Idéal de type fini $\mathfrak{I}_i$.

LEMME 2.3. - Soient X et Y deux espaces analytiques ; soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X, et $(Y_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de Y, et supposons que les $X_i \times Y_j$ existent. Alors $X \times Y$ existe.

En effet, posons $Z_{ij} = X_i \times Y_j$, et pour un deuxième couple (i', j') $(i' \in I\ , \ j' \in J)$ soit

$$Z_{ij;i'j'} = X_{ii'} \times Y_{jj'}$$

qui existe en vertu de (2.3), et est isomorphe à un ouvert de Z_{ij} et à un ouvert de $Z_{i'j'}$. Ces isomorphismes permettent de recoller les Z_{ij} en un espace analytique Z, muni de deux projections

$$p_1 : Z \to X , \qquad p_2 : Z \to Y$$

ayant les propriétés suivantes : pour tout couple $(i, j) \in I \times J$, les morphismes induits par p_1 et p_2

$$p_1^{-1}(X_i) \cap p_2^{-1}(Y_j) \rightrightarrows X_i , Y_j$$

font du premier membre un produit de X_i et Y_j. On vérifie enfin que cette propriété implique que Z est bien un produit de X et Y par p_1 et p_2.

Soient alors X et Y des espaces analytiques quelconques. Pour prouver que $X \times Y$ existe, on peut se ramener, grâce à (2.3), au cas où X et Y sont isomorphes à des sous-espaces analytiques d'espaces $\underset{\sim}{E}^m$ et $\underset{\sim}{E}^n$. Le lemme 2.2 nous ramène alors à prouver l'existence du produit $\underset{\sim}{E}^m \times \underset{\sim}{E}^n$, qui est donné dans (1.4). De plus, pour montrer que l'application canonique

$$T(X \times Y) \to T(X) \times T(Y)$$

est un isomorphisme (i. e. un homéomorphisme), on est ramené par le raisonnement précédent au cas où $X = \underset{\sim}{E}^m$, $Y = \underset{\sim}{E}^n$, où cela résulte également de (1.4).

Pour traiter le produit fibré $X \times_S Y$ en général, on note qu'il s'identifie au produit fibré de $X \times Y$ et S sur $S \times S$, où $X \times Y \to S \times S$ est le produit cartésien des morphismes de projection donnés $X \to S$ et $Y \to S$, et où $S \to S \times S$ est le morphisme diagonal. Or on a le lemme suivant.

LEMME 2.4. - Soit S un espace analytique. Alors le morphisme diagonal $\mathrm{diag}_S : S \to S \times S$ est une <u>immersion</u>.

Utilisant (2.2), on est ramené aussitôt au cas où $S = \underset{\sim}{E}^n$. Alors $S \times S = \underset{\sim}{E}^{n+n}$, et pour un morphisme $f : X \to S \times S$ donné, défini en vertu de (1.1) par $2n$ sections $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ de $\mathcal{O}_X$ sur X, on a $p_1 f = p_2 f$ si et seulement si $f_i = g_i$ pour tout i, i. e.:

$$f_i - g_i = f^*(z_i - z_{i+n}) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad .$$

Cela prouve que le sous-objet diagonal de $S \times S$ est le sous-espace analytique fermé de $\underset{\sim}{E}^{n+n} = \underset{\sim}{E}^{2n}$ défini par l'Idéal de type fini engendré par les sections $z_i - z_{i+n}$ de son faisceau structural (puisque ces deux sous-objets définissent le même sous-foncteur du foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X, S \times S)$ défini par $S \times S$).

Utilisant (2.4) et (2.2), on voit donc que le produit fibré de $X \times Y$ et S sur $S \times S$ existe, et son espace topologique sous-jacent est le produit fibré des espaces topologiques. Cela achève d'établir le théorème 2.1. On a établi en même temps le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.5. - Le morphisme canonique $X \times_S Y \to X \times Y$ est un morphisme d'immersion, et est un morphisme d'immersion fermée si S est séparé.

Dire que S est séparé signifie en effet que le morphisme d'immersion $S \to S \times S$ a une image fermée, i. e. est une immersion fermée.

COROLLAIRE 2.6. - Le morphisme diagonal $\mathrm{diag}_{X/S} : X \to X \times_S X$ est un morphisme d'immersion, et est une immersion fermée si X est séparé.

En effet, en le composant avec le morphisme d'immersion $X \times_S X \to X \times X$, on obtient en vertu de (2.4) un morphisme d'immersion, qui est une immersion fermée si X est séparé.

Nous admettrons par la suite toutes les propriétés formelles générales des divers types de limites projectives finies dans une catégorie (dont un certain nombre sont explicitées dans [2]). Ainsi, si on considère un produit fibré $X \times_S S'$

comme un objet de (An) au-dessus de S' , alors $X \rightsquigarrow X \times_S S'$ est un foncteur

$$(An)_{/S} \to (An)_{/S'}$$

qui s'appelle <u>foncteur de changement de base</u> par le morphisme $S' \to S$, (lequel prend le nom de <u>morphisme de changement de base</u>). C'est le foncteur adjoint du foncteur trivial

$$(An)_{/S'} \to (An)_{/S}$$

consistant à regarder un objet au-dessus de S' comme un objet au-dessus de S (grâce au morphisme donné $S' \to S$). L'opération de changement de base est transitive, i. e. on a un isomorphisme canonique fonctoriel :

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' \xrightarrow{\sim} X \times_S S''$$

lorsqu'on a des morphismes $S' \to S$ et $S'' \to S'$.

Un cas important de changement de base est celui où S' est le sous-espace analytique réduit $\{s\}$ de S défini par un point s de S . L'espace analytique $X_s = X \times_S \{s\}$ est alors un sous-espace analytique fermé de X , dont l'espace topologique sous-jacent est la fibre $f^{-1}(s)$, et dont l'anneau local de $x \in f^{-1}(s)$ est le quotient $\mathcal{O}_X/m_s\, \mathcal{O}_X$ (m_s étant l'idéal maximal de $\mathcal{O}_s$). X_s est appelé <u>la fibre de</u> X/S <u>au point</u> s .

Comme cas particulier de la notion de limite projective, notons aussi celle de <u>noyau</u> d'un couple de morphismes

$$f\ ,\ g :\ X \rightrightarrows Y \quad ,$$

qui est un objet Z de (An) , muni d'un morphisme $i :\ Z \to X$, tel que $fi = gi$, et qui est <u>universel</u> pour cette propriété. Si h est le morphisme $X \to Y \times Y$ défini par f et g , alors Z peut aussi se construire comme le produit fibré de X et de Y sur $Y \times Y$, lorsque Y est envoyé dans $Y \times Y$ par le morphisme diagonal. Il en résulte par exemple :

COROLLAIRE 2.7. - Soient $f\ ,\ g :\ X \rightrightarrows Y$ deux morphismes d'espaces analytiques ; alors le noyau Z de $(f\ ,\ g)$ existe, et le morphisme canonique $i :\ Z \to X$ est une immersion, et même une immersion fermée si Y est séparé.

REMARQUE 2.8. - Comme en théorie des schémas, il y a lieu d'introduire une variante relative de la notion de séparation. Disons qu'une application continue

$f : X \to Y$ d'espaces topologiques est <u>séparée</u> si l'application diagonale $\mathrm{diag}_f : X \to X \times_Y X$ (qui est en tous cas un homéomorphisme de X sur la diagonale de $X \times_Y X$) a une image fermée. On vérifie facilement comme dans [2] les faits suivants :

(i) Si f est injective (i. e. est un monomorphisme dans (Top)), f est séparé ;

(ii) Si f est séparé, alors pour toute application continue $Y' \to Y$, le morphisme $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ est séparé ;

(iii) La composée de deux applications continues séparées est séparée.

(iv) Si gf est séparé, f est séparé. En particulier, si Y est séparé, alors f est séparé si et seulement si X est séparé, d'où résulte dans le cas général que f est séparé si et seulement si Y est réunion d'ouverts Y_i tels que les $f^{-1}(Y_i)$ soient des ouverts séparés.

Ceci dit, un morphisme d'espaces analytiques $f : X \to Y$ est dit <u>séparé</u> si c'est une application continue séparée, ou, ce qui revient au même, si le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée ; on dit aussi que X est séparé sur Y . Les propriétés formelles précédentes s'appliquent donc. Par exemple, si X et Y sont des espaces analytiques sur S , et si on a un couple de S-morphismes $f , g : X \rightrightarrows Y$, de noyau Z , alors $Z \to X$ est une immersion fermée pourvu que Y soit séparé sur S .

3. <u>Anneaux locaux d'un produit fibré</u>.

Soient A , B , C des anneaux linéairement topologisés séparés et complets, et considérons des homomorphismes continus $u : A \to B$ et $v : A \to C$. On définit alors le <u>produit tensoriel complété</u> $B \hat{\otimes}_A C$ <u>de</u> B <u>et</u> C <u>sur</u> A , comme la limite projective des anneaux $B/J \otimes_A C/K$, où J et K parcourent chacun un système fondamental d'idéaux ouverts de B , resp. C . Noter d'ailleurs que pour J et K donnés, il existe un idéal ouvert I dans A tel que $IB \subset J$, $IC \subset K$, et que le produit tensoriel écrit plus haut s'écrit aussi $B/J \otimes_{A/I} C/K$. Il résulte de la construction que $B \hat{\otimes}_A C$ est une <u>somme amalgamée</u> de B et C sous A dans la catégorie des anneaux topologiques du type envisagé, i. e. que la donnée d'un homomorphisme continu $B \hat{\otimes}_A C \to D$ équivaut à la donnée d'un diagramme commutatif d'homomorphismes continus

$$\begin{array}{ccc} B & \dashrightarrow & D \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{v} & C \end{array} \quad .$$

On dit que ce diagramme fait de D un produit tensoriel complété de B et C sur A , s'il correspond à un isomorphisme $B \hat{\otimes}_A V \to D$. Nous aurons à utiliser cette notion pour des anneaux locaux noethériens munis de leur topologie habituelle, complets pour cette topologie, et des homomorphismes $A \to B$ et $A \to C$, continus (i. e. locaux), à extension résiduelle triviale. Alors les B/J et C/K sont des algèbres finies sur A , donc sur l'anneau artinien A/I , et leur produit tensoriel est également un anneau local fini sur A/I , donc artinien, d'où on peut conclure que $B \hat{\otimes}_A C$ est alors un anneau local noethérien complet ; sa topologie est sa topologie habituelle d'anneau local, et l'homomorphisme $A \to B \otimes_A C$ est également un homomorphisme local à extension résiduelle triviale.

Supposons par exemple $B = A[[t_1 , \dots , t_m]]$, $C = A[[t_1 , \dots , t_n]]$; alors $B \hat{\otimes}_A C$ s'identifie à $A[[t_1 , \dots , t_{m+n}]]$. D'autre part (B et C étant de nouveau des anneaux locaux complets quelconques), si J est un idéal de B , K un idéal de C (J et K sont donc nécessairement fermés, mais on ne les suppose pas ouverts), $(B/J) \hat{\otimes}_A (C/K)$ s'identifie à $D/(JD + KD)$, où $D = B \hat{\otimes}_A C$. La conjonction de ces deux remarques permet de réaliser tout $B \hat{\otimes}_A C$ (où B et C satisfont aux conditions énoncées plus haut, impliquant qu'ils sont isomorphes à des quotients d'algèbres de séries formelles sur A), comme un quotient d'une algèbre de séries formelles sur A .

PROPOSITION 3.1. - Soient X et Y deux espaces analytiques sur un troisième S , Z leur produit fibré sur S , z un point de Z , x , y , s les points de X , Y , S qu'il définit, et considérons le diagramme d'homomorphismes d'anneaux locaux complets :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{O}}_x & \to & \hat{\mathcal{O}}_z \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{\mathcal{O}}_s & \to & \hat{\mathcal{O}}_y \end{array} \quad .$$

Ce diagramme identifie $\hat{\mathcal{O}}_z$ au produit tensoriel complété $\hat{\mathcal{O}}_x \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_s} \hat{\mathcal{O}}_y$.

En d'autres termes, le foncteur contravariant $(X , x) \rightsquigarrow \mathcal{O}_{X,s}$ de la catégorie des espaces analytiques ponctués, dans la catégorie des anneaux locaux complets, transforme limites projectives finies en limites inductives finies. Procédant comme au numéro précédant, on est ramené à prouver cette propriété de commutation dans les deux cas suivants :

a. le produit $X \times Y$, i. e. S réduit à un point ;

b. un produit fibré $P \times_Q Q'$, où $Q' \to Q$ est une immersion.
Utilisant (2.2) et une remarque précédant (3.1) sur la détermination du produit tensoriel complété d'anneaux quotients, le cas (b) devient trivial, et le cas (a) est ramené au cas où $X = \underset{\sim}{E}^m$, $Y = \underset{\sim}{E}^n$. Ce dernier résulte de la détermination indiquée plus haut du produit tensoriel complété d'algèbres de séries formelles, du fait que $\underset{\sim}{E}^m \times \underset{\sim}{E}^n = \underset{\sim}{E}^{m+n}$ et que les complétés des anneaux locaux de $\underset{\sim}{E}^m$, $\underset{\sim}{E}^n$, $\underset{\sim}{E}^{m+n}$ sont des algèbres de séries formelles sur k à m , n et $m + n$ générateurs précisés.

REMARQUES

1° Considérons l'homomorphisme canonique

$$B \otimes_A C \to B \hat{\otimes}_A C \quad .$$

On vérifie facilement que si B ou C est fini sur A , c'est là un isomorphisme. (Cf. [2], 0.7.7.7). Utilisant le fait, cité dans l'introduction de l'exposé numéro 9 de ce Séminaire que si B est une algèbre analytique au-dessus d'une algèbre analytique A , quasi-finie sur A , alors B est fini sur A , on trouve :

COROLLAIRE 3.2. - Supposons que $\mathcal{O}_x$ ou $\mathcal{O}_y$ soit fini sur $\mathcal{O}_s$; alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{O}_y \quad .$$

2° *Il est connu que si A est un anneau analytique intègre, alors son complété est également intègre. De plus, CHEVALLEY a démontré ([1], proposition 12) que si A et B sont deux algèbres sur un corps parfait k , isomorphes à des quotients d'algèbres de séries formelles, alors le produit tensoriel complété $A \hat{\otimes}_k B$ est intègre si les deux facteurs le sont. Il résulte d'ailleurs de ces énoncés que les résultats analogues sont vrais en remplaçant "intègre" par