BERNARD MALGRANGE

Le théorème de préparation en géométrie différentiable. IV. Fin de la démonstration

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 22, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A10_0>

Séminaire Henri CARTAN
(Topologie différentielle)
15e année, 1962/63, n° 22

20 mai 1963

LE THÉORÈME DE PRÉPARATION EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIABLE

par Bernard MALGRANGE

IV. Fin de la démonstration.

1. Introduction.

Dans l'exposé 11, nous avions ramené la démonstration du théorème de préparation à un cas particulier (théorème 3, p. 11-09), que nous allons établir maintenant. En fait, pour la commodité de la démonstration, nous en donnerons ici un énoncé légèrement différent, en apparence un plus général.

Fixons d'abord quelques notations ; $x = (x_1 , \dots , x_n)$ désigne un point de $\mathbb{R}^n$, et (x , t) un point de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si X_0 désigne un germe analytique en 0 dans $\mathbb{R}^n$, $\hat{X}_0$ désignera le germe en 0 de $X_0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et $\mathcal{E}(X_0)$ (resp. $\mathcal{E}(\hat{X}_0)$) l'espace des germes en 0 de fonctions différentiables au sens de WHITNEY sur X_0 (resp. $\hat{X}_0$). Si $Y_0 \subset X_0$ est un autre germe analytique en 0 dans $\mathbb{R}^n$ (qui pourra éventuellement être vide ; tant pis pour les puristes), $\mathcal{I}(Y_0 ; X_0)$ désignera, en conformité avec l'exposé 12, le sous-espace de $\mathcal{E}(X_0)$ formé des germes dont la restriction à Y_0 est nulle, et l'on définira de même $\mathcal{I}(\hat{Y}_0 ; \hat{X}_0)$. Enfin, lorsque nous aurons affaire à des ensembles analytiques (et non à des germes), nous utiliserons sans les rappeler les définitions de l'exposé 12.

Cela posé, le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

THÉORÈME 1. - *Soit* Π *un polynôme distingué en* t

$$\Pi(x ; t) = t^p + \sum_1^p a_i(x)\ t^{p-i} \quad ,$$

les a_i *étant des fonctions analytiques de* x *à valeurs réelles, avec* $a_i(0) = 0$. *Pour tout* $f \in \mathcal{I}(\hat{Y}_0 ; \hat{X}_0)$, *il existe* $g \in \mathcal{I}(\hat{Y}_0 ; \hat{X}_0)$ *et des* $\rho_i \in \mathcal{I}(Y_0 ; X_0)$ $(0 \leq i \leq p-1)$ *tels qu'on ait*

$$f = \Pi g + \sum \rho_i\ t^i \quad .$$

Aux notations près, cet énoncé se réduit au théorème 3, exposé 11, lorsque $X_0 =$ (germe en 0 de $\mathbb{R}^n$), $Y_0 = \emptyset$.

Pour l'établir, nous allons procéder ainsi : appelons $Th(Y_o , X_o)$ l'énoncé précédent (dans lequel n et Π sont fixés), et remarquons que, si l'on a $Z_o \subset Y_o \subset X_o$, l'hypothèse "$Th(Z_o , Y_o)$ et $Th(Y_o , X_o)$" entraîne "$Th(Z_o , X_o)$" (évident).

Pour tout X_o, nous allons établir le résultat suivant :

$P(X_o)$. - <u>Pour tout germe analytique</u> $Y_o \subset X_o$, <u>avec</u> $Y_o \neq X_o$, <u>il existe un germe analytique</u> Y'_o, <u>avec</u> $Y_o \subset Y'_o \subset X_o$, $Y'_o \neq X_o$, <u>tel que</u> $Th(Y'_o , X_o)$ <u>soit vrai.</u>

Le théorème 1 **en résultera** bien. Pour prouver $Th(Y_o , X_o)$, considérons l'ensemble $\mathcal{Z}$ des germes Z_o, avec $Y_o \subset Z_o \subset X_o$, tels que $Th(Z_o , X_o)$ soit vrai. Cet ensemble a un élément minimal (puisqu'il contient X_o, et que toute suite décroissante de germes analytiques est stationnaire), soit Z'_o. Montrons que $Z'_o = Y_o$. Si c'était faux, alors, d'après $P(Z'_o)$, il existerait Z''_o, avec $Y_o \subset Z''_o \subset Z'_o$, $Z''_o \neq Z'_o$, tel que $Th(Z''_o , Z'_o)$ soit vrai. Mais alors $Th(Z''_o , X_o)$ serait vrai, et Z'_o ne serait pas minimal.

Nous allons d'abord démontrer (P) dans le cas où $X_o =$ (germe en 0 de $\mathbb{R}^n$). Nous en déduirons ensuite le cas général.

2. Le cas où $X_o = \mathbb{R}^n$.

Soit V un voisinage ouvert borné de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et soit Y un sous-ensemble analytique de V tel que le germe de Y en 0 soit Y_o ; si V a été choisi assez petit, on peut supposer qu'un tel Y existe et aussi que les coefficients de Π convergent au voisinage de $\overline{V}$.

Soit I un intervalle ouvert borné $\subset \mathbb{R}$ tel que toutes les racines réelles de $\Pi(x , t) = 0$ soient contenues dans I lorsque $x \in V$; posons $\hat{Y} = Y \times I$, $\hat{V} = V \times I$.

On peut supposer pour la démonstration que Π est irréductible en 0 (récurrence sur le nombre de facteurs de Π), donc que son discriminant Δ n'est pas identiquement nul ; soient δ l'ensemble des zéros de Δ dans V, et $\hat{\delta} = \delta \times I$. Montrons que l'on peut prendre $Y'_o = Y_o \cup \delta_o$, et, plus précisément, qu'on a le résultat "global" suivant (qui nous servira sous cette forme dans la suite).

PROPOSITION 1. - <u>Posons</u> $Y' = Y \cup \delta$, $\hat{Y}' = Y' \times I$. <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{I}(\hat{Y}' ; \hat{V})$, <u>il existe</u> $g \in \mathcal{I}(\hat{Y}' ; \hat{V})$ <u>et des</u> $\rho_\ell \in \mathcal{I}(Y' ; V)$ $(0 \leq \ell \leq p - 1)$ <u>tels qu'on ait</u> $f = \Pi g + \sum \rho_\ell t^\ell$.

<u>Démonstration</u>. – Soit U_s l'ensemble des points de $V - \delta$ où P a exactement s racines réelles et posons $U'_s = U_s - Y$. On a $V = \delta \cup (\bigcup_s U_s)$ et, $\forall\ s$, l'adhérence de U_s dans V est contenue dans $U_s \cup \delta$. Par conséquent, en décomposant f de manière évidente, on peut supposer que, pour un certain s $(0 \leqslant s \leqslant p)$ f est nul en dehors de $\hat{U}_s$.

Désignons par $\tau_1(x)$, ..., $\tau_s(x)$ les racines réelles de Π dans U_s, rangées par ordre croissant. Ce sont des fonctions quasi-höldériennes de $x \in U_s$ (exposé 13, proposition 2), et elles appartiennent à $\mathfrak{M}(V - U_s\ ;\ V)$ (exposé 13, proposition 5), donc a fortiori à $\mathfrak{M}(V - U'_s\ ;\ V)$.

Posons, dans U_s :

$$f(x\ ,\ t) = (t - \tau_1(x))\ f_1(x\ ,\ t) + f(x\ ,\ \tau_1(x)) \qquad ;$$

nous allons voir que $f_1(x\ ,\ t)$ et $f(x\ ,\ \tau(x))$ (prolongées par 0 dans $\hat{V}_s - \hat{U}_s$) appartiennent à $\mathfrak{I}(\hat{V} - U'_s\ ;\ V)$. Il suffit pour cela de montrer qu'elles appartiennent à $\mathfrak{I}(\hat{V} - \hat{U}_s\ ;\ V)$, puisqu'elles sont visiblement nulles ainsi que toutes leurs dérivées sur $\hat{Y} \cap \hat{U}_s$.

Pour $f(x\ ,\ \tau(x))$, notre assertion résulte du théorème 1 (partie (a)), exposé 13. Pour f_1, nous opèrerons ainsi :

Lorsque $(x\ ,\ t\ ,\ \lambda) \in V \times I \times I$, on a

$$f(x\ ,\ t) - f(x\ ,\ \lambda) = (t - \lambda)\ h(x\ ,\ t\ ,\ \lambda) \qquad ,$$

avec $h(x\ ,\ t\ ,\ \lambda) \in \mathfrak{I}((\hat{V} - \hat{U}_s) \times I\ ;\ \hat{V} \times I)$ (évident) ; substituant $\tau_1(x)$ à λ, on trouve

$$f_1(x\ ,\ t) = h(x\ ,\ t\ ,\ \tau_1(x)) \qquad ,$$

et l'assertion résulte encore du théorème 1, exposé 13.

Recommençant avec f_1 au lieu de f, et τ_2 au lieu de τ_1, on trouve :

$$f(x\ ,\ t) = (t - \tau_1(x))(t - \tau_2(x))\ f_2(x\ ,\ t) + (t - \tau_1(x))\ f_1(x\ ,\ \tau_2(x)) + f(x\ ,\ \tau_1(x))$$

et, comme $\tau_1 \in \mathfrak{M}(V - U'_s\ ;\ V)$, on a

$$\tau_1(x)\ f_1(x\ ,\ \tau_2(x)) \in \mathfrak{I}(V - U'_s\ ;\ V) \qquad .$$

Par racurrence, on trouve finalement

$$f(x\ ,\ t) = (t - \tau_1(x))\ \ldots\ (t - \tau_s(x))\ f_s(x\ ,\ t) + \sum_0^{p-1} \rho_\ell(x)\ t^\ell$$

avec $\rho_\ell \in \mathfrak{I}(V - U'_s \; ; V)$, $f_s \in \mathfrak{I}(\hat{V} - \hat{U}'_s \; ; \hat{V})$.

Nous avons donc un reste de la forme voulue. Posons maintenant, pour $x \in U_s$,

$$\Pi(x \; ; t) = (t - \tau_1(x)) \dots (t - \tau_s(x)) \; \Pi'(x \; ; t) \qquad .$$

Il nous reste à montrer que l'on peut prendre g égal à f_s/Π' dans $\hat{U}_s$, et à 0 dans $\hat{V} - \hat{U}_s$. Pour cela, il suffit de montrer que l'on a $1/\Pi' \in \mathfrak{M}(\hat{V} - \hat{U}'_s ; \hat{V})$; a fortiori, il suffit de montrer que l'on a $1/\Pi' \in \mathfrak{M}(\hat{V} - \hat{U}_s \; ; \hat{V})$.

Pour cela, montrons d'abord qu'on a $\Pi' \in \mathfrak{M}(\hat{V} - \hat{U}_s \; ; \hat{U}_s)$; introduisons à cet effet de nouvelles variables $\lambda_1 , \dots , \lambda_s$, et effectuons la division de Π par le polynôme $(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_s)$; nous trouvons

$$\Pi(x \; ; t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_s) \; \Psi(x \; ; t \; ; \lambda_1 , \dots , \lambda_s) + \text{reste} \qquad ,$$

où Ψ et le reste sont des polynômes en $t , \lambda_1 , \dots , \lambda_s$ à coefficients analytiques en x dans V . Substituant les τ_ℓ aux λ_ℓ , le reste s'annule, et il vient

$$\Pi'(x \; ; t) = \Psi(x \; ; t \; ; \tau_1(x) , \dots , \tau_s(x)) \qquad ,$$

d'où le résultat.

Pour montrer maintenant que l'on a $1/\Pi' \in \mathfrak{M}(\hat{V} - \hat{U}_s \; ; \hat{V})$, il suffit (dérivées d'une fonction inverse!) de montrer que, lorsque (x , t) partout un compact de $V \times W$, x restant dans U_s , Π' est minoré par une puissance > 0 de $d(x , \delta)$. Or, en désignant par σ_j les racines non réelles de Φ , et en remarquant que

$$|t - \sigma_j| \geqslant |\Im \sigma_j| = \frac{1}{2} |\bar{\sigma}_j - \sigma_j| \qquad ,$$

on trouve

$$|\Pi'(x , t)| \geqslant \Pi \frac{1}{2} |\bar{\sigma}_j - \sigma_j| \geqslant C \, \Delta(x)^2$$

(puisque tous les facteurs de Δ sont bornés). On obtient alors le résultat cherché en appliquant l'inégalité de Łojasiewicz à Δ , ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

<u>Remarque</u>. - On notera qu'ici, l'unicité de g et du reste n'est pas assurée ; en fait, nous avons trouvé un reste de degré $s - 1 \leqslant p - 1$, et il est aisé de vérifier que n'importe quel reste R de degré $\leqslant p - 1$ aurait convenu, pourvu que $R \in \mathfrak{I}(\hat{V} - \hat{U}'_s , \hat{V})$, et qu'on ait

$$R(x , \tau_\ell(x)) = f(x , \tau_\ell(x)) \qquad \text{pour } \ell = 1 , \dots , s \qquad .$$

Cela nous montre qu'on n'aura l'unicité dans la proposition 1 (et finalement, dans le théorème de préparation) que si <u>toutes les racines de</u> Π <u>sont réelles</u>.

3. Le cas général.

Pour démontrer (P) dans le cas général, il suffit de traiter le cas où X_o est irréductible. Soit en effet $X_o = \bigcup X_o^{\ell}$ la décomposition de X_o en ses composantes irréductibles, et soit Z_o la réunion des intersections deux à deux des X_o^{ℓ}. Supposons que, $\forall\ \ell$, $P(X_o^{\ell})$ soit vrai ; par hypothèse, étant donné $Y_o \subset X_o$, avec $Y_o \neq X_o$, il existe pour chaque ℓ un $Y_o'^{\ell}$ vérifiant

$$(Y_o \cup Z_o) \cap X_o^{\ell} \subset Y_o'^{\ell} \subset X_o^{\ell} , \qquad Y_o'^{\ell} \neq X_o^{\ell}$$

et tel que $\mathrm{Th}(Y_o'^{\ell}, X_o^{\ell})$ soit vrai. Montrons que, si l'on pose $Y_o' = \bigcup Y_o'^{\ell}$, $\mathrm{Th}(Y_o', X_o)$ est vrai ; pour cela, on prend $f \in \mathfrak{I}(\hat{Y}_o' ; \hat{X}_o)$; la restriction f_ℓ de f à $\hat{X}_o^{\ell}$ appartient à $\mathfrak{I}(\hat{Y}_o'^{\ell} ; \hat{X}_o^{\ell})$, donc on peut trouver $g_\ell' \in \mathfrak{I}(\hat{Y}_o'^{\ell} ; \hat{X}_o^{\ell})$ et des $\rho_{i\ell}' \in \mathfrak{I}(Y_o'^{\ell} ; X_o^{\ell})$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$ tels qu'on ait

$$f_\ell = \Pi g_\ell' + \sum \rho_{i\ell}' \, t^i \qquad .$$

En prolongeant g_ℓ' par 0, on trouve $g_\ell \in \mathfrak{I}(\hat{Y}_o', \hat{X}_o)$, d'après les résultats de l'exposé 12 ; pour obtenir le résultat, on prendra alors $g = \sum g_\ell$, et l'on opèrera de même avec les $\rho_{i\ell}'$.

Supposons donc X_o irréductible, et soit k sa dimension ; en reprenant les notations de l'exposé 13, début du paragraphe 2, on peut supposer que $x_1, \dots, x_k$ sont analytiquement indépendants modulo $\mathfrak{I}$, et que $\mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ est un $\mathcal{O}_k$ module de type fini. On peut aussi supposer, en l'agrandissant au besoin, que Y_o est image réciproque, (pour la projection $X_o \to \underset{\sim}{R}^k$) d'un germe analytique Z_o de $\underset{\sim}{R}^k$, de dimension $< k$ (soit en effet $f \in \mathcal{O}_n$, f nul sur Y_o mais non sur X_o, et soit f' le produit des conjugués de $\overline{f} \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ sur le corps des fractions de $\mathcal{O}_k$; il suffit par exemple de prendre pour Z_o l'ensemble des zéros de f').

Enfin, on peut remplacer Π par un polynôme $\Psi \in \mathcal{O}_n[t]$, possédant les propriétés suivantes

a. Ψ est un multiple de Π dans $\mathcal{O}_n[t]$.

b. $\Psi = \Psi' + \Psi''$, avec Ψ', polynôme distingué en t, à coefficients $\in \mathcal{O}_k$ (i. e. ne dépendant que de $(x_1, \dots, x_k)$), et $\Psi'' \in \mathfrak{I}[t]$ (i. e. les coefficients de Ψ'' sont nuls sur X_o).

En effet, il est clair que si l'on démontre (P), avec Π remplacé par Ψ, et p par $p' = \deg_t \Psi'$, il n'y aura qu'à effectuer ensuite la division (élémentaire) du reste par Π pour obtenir le théorème ; tout revient donc à montrer que Π possède un mutliple de la forme voulue. Pour cela, il suffit de prendre pour Ψ' le produit des conjugués de $\overline{\Pi} \in (\mathcal{O}_n/\mathfrak{I})[t]$ sur le corps des fractions de $\mathcal{O}_k[t]$; on a alors $\Psi' = \overline{\Lambda}\,\overline{\Pi}$, avec $\overline{\Lambda} \in (\mathcal{O}_n/\mathfrak{I})[t]$; on remonte $\overline{\Lambda}$ en un $\Lambda \in \mathcal{O}_n[t]$, et l'on prend $\Psi = \Lambda\,\Pi$.

Soit alors X (resp. Z) un sous-ensemble analytique d'un voisinage ouvert de 0 dans $\underset{\sim}{R}^n$ (resp. $\underset{\sim}{R}^k$), dont le germe en 0 soit X_o (resp. Z_o). Reprenons les notations de l'exposé 13, paragraphe 2 (en particulier, δ aura la signification donnée dans cet exposé, et non celle du présent exposé, paragraphe 2). Si V est supposé assez petit, on peut choisir W de manière que, outre les propriétés exigées (loco citato), les coefficients de Ψ , Ψ' , Ψ'' convergent dans $V \times W$, et que $Z \cap V$ soit fermé dans V (pour simplifier, nous écrirons dans la suite X pour $X \cap (V \times W)$, et Z pour $Z \cap V$).

Soit encore I un intervalle ouvert borné de $\underset{\sim}{R}$, tel que les zéros réels de $\Psi'(x_1 , \dots , x_k ; t)$ appartiennent à I lorsque $(x_1 , \dots , x_k) \in V$. Pour tout sous-ensemble de V , nous écrirons $\tilde{E} = E \times W$, $\hat{E} = E \times I$, $\hat{\tilde{E}} = E \times W \times I$.

D'après la proposition 1, il existe un sous-ensemble analytique Z' de V , avec $Z \cup \delta \subset Z'$, et $\dim Z' < k$, tel que tout $f \in \mathfrak{I}(\hat{Z}' ; \hat{V})$ s'écrive

$$f = \Psi' g + \sum \rho_i\, t^i \qquad (0 \leqslant i \leqslant p' - 1) \quad ,$$

avec $g \in \mathfrak{I}(\hat{Z}' ; \hat{V})$, $\rho_i \in \mathfrak{I}(Z' ; V)$ (ceci à condition d'avoir choisi V assez petit pour pouvoir appliquer la proposition 1 aux divers facteurs irréductibles de Ψ' , ce que nous supposerons désormais). Posons $Y' = \tilde{Z}' \cap X$, et montrons la proposition suivante, qui entraînera $P(X_o)$:

PROPOSITION 2. - <u>Tout</u> $f \in \mathfrak{I}(\hat{Y}' ; \hat{X})$ <u>peut s'écrire sous la forme</u>

$$f = \Psi g + \sum \rho_i\, t^i \qquad (0 \leqslant i \leqslant p' - 1)$$

<u>avec</u> $g \in \mathfrak{I}(\hat{Y}' ; \hat{X})$ <u>et</u> $\rho_i \in \mathfrak{I}(Y' ; X)$.

Nous allons établir ceci : X_r désignant une des "nappes" de X (cf. exposé 13), tout $f \in \mathfrak{I}(\hat{X}_r \cap \hat{Y}' ; \hat{X}_r)$ peut s'écrire

(3.1) $f = \Psi g + \sum \rho_i\, t^i$ avec $g \in \mathfrak{I}(\hat{X}_r \cap \hat{Y}' ; \hat{X}_r)$, et $\rho_i \in \mathfrak{I}(X_r \cap Y' ; X_r)$.

Cela entraînera la proposition 2, puisque d'après la proposition 4, exposé 13 les X_r sont régulièrement séparés (raisonner comme au début du paragraphe).

Pour cela, nous allons utiliser le théorème 1, exposé 13, dont nous garderons les notations, avec le complément suivant : si l'on pose $V'_r = V_r - Z'$, l'application π induit une bijection de $\mathcal{S}(X_r \cap Y' ; X_r)$ sur $\mathcal{S}(V - V'_r ; V)^\Lambda$ ($\Lambda = \underset{\sim}{N}^\ell$) (pour vérifier ce fait, il suffit de se rappeler que l'on a $\delta \subset Z'$, $D \subset Y'$, et de vérifier que si $f \in \mathcal{S}(D ; X_r)$ est nul sur Y', les composantes de πf s'annulent à l'ordre infini sur Z', ce qui est immédiat). De même, l'application π x identité (t), que nous noterons $\hat{\pi}$, définit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\hat{X}_r \cap \hat{Y}' ; \hat{X}_r)$ sur $\mathcal{S}(\hat{V} - \hat{V}'_r ; \hat{V})^\Lambda$.

Soit alors $f \in \mathcal{S}(\hat{X}_r \cap \hat{Y}' ; \hat{X}_r)$; désignons par $\overline{f}^q$ les composantes de $\hat{\pi} f$ et par Ψ^q la fonction définie sur $\hat{V}_s$ comme égale à $D^q\,\Psi(x', \Phi^r(x'), t)$ (D^q, une dérivée en $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$; $x' = (x_1, \dots, x_k)$. On a notamment $\Psi^0(x', t) = \Psi'(x', t)$, puisque Ψ'' est nul sur X (en supposant V assez petit) ; et d'après la proposition 5, exposé 13, on a $\Psi^q \in \mathfrak{M}(\hat{V} - \hat{V}'_r ; \hat{V})$. Cela étant, la formule de Leibniz nous montre que, pour trouver g et ρ_i vérifiant (3.1), il suffit de trouver des $\overline{g}^q \in \mathcal{S}(\hat{V} - \hat{V}'_r ; \hat{V})$ et des $\overline{\rho}_i^q \in \mathcal{S}(V - V'_r ; V)$, satisfaisant aux équations :

$$\overline{f}^q = \Psi' \overline{g}^q + \sum_{q'<q} \binom{q}{q'} \Psi^{q-q'} \overline{g}^{q'} + \sum \overline{\rho}_i^q t^i \tag{3.2}$$

(en effet g et ρ_i seront alors définis par $\hat{\pi} g = (\overline{g}^q)_{q\in\Lambda}$, $\pi\rho_i = (\overline{\rho}_i^q)_{q\in\Lambda}$).

Pour résoudre (3.2), on peut supposer, en raisonnant par récurrence, que l'on connait déjà les $\overline{g}^{q'}$, et les $\overline{\rho}_i^{q'}$, avec $q' < q$; d'après la définition de Z, on pourra alors trouver $\overline{g}^q$ et les $\overline{\rho}_i^q$, et tout est terminé.

Remarque 1. - Supposons que, aux hypothèses du théorème 1, on ajoute la suivante :

En tout point assez voisin de 0, la série de Taylor de Π divise celle de f dans l'anneau des séries formelles.

En reprenant la démonstration du théorème 1, on vérifie qu'on peut alors prendre les ρ_i égaux à 0 (au paragraphe 3, il faudra, bien sûr, travailler avec Λf au lieu de f, puisqu'on remplace Π par $\Psi = \Lambda\,\Pi$). On déduit aussitôt de là le théorème suivant :

(D) Soit Ω un ouvert $\subset \underset{\sim}{R}^n$, et Π une fonction analytique dans Ω ; pour que $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ soit de la forme Πg, $g \in \mathcal{E}(\Omega)$; il faut et il suffit que, en tout point $a \in \Omega$, la série de Taylor de Π divise celle de f.

Ce théorème a été établi (sous la forme duale d'un théorème de "division des distributions" ; voir [3], exposé 25, pour l'équivalence), par ŁOJASIEWICZ [2], et, indépendamment, par HÖRMANDER [1], lorsque Π est un polynôme en $(x_1, \ldots, x_n)$. Nous avons suivi ici une méthode intermédiaire entre celles de ces auteurs, et plus précisément la "dualisée" de la méthode de ŁOJASIEWICZ, ce qui nous a permis d'obtenir en même temps que (D) le théorème de préparation.

Signalons par ailleurs que (D) a été étendu aux idéaux de $\mathcal{E}(\Omega)$ engendrés par une famille de fonctions analytiques [3].

Remarque 2. - Pour démontrer le théorème 3, exposé 11 (donc finalement le théorème de préparation), une voie un peu différente serait concevable. On remarque tout d'abord que, moyennant une substitution évidente (d'ailleurs utilisée exposé 11, p. 14), il suffit d'établir le théorème pour le "polynôme générique distingué", a fortiori pour un polynôme par rapport à toutes les variables. On régionnerait alors l'espace $\underline{R}^n$ suivant la multiplicité et la réalité des racines de $\Pi(x\ ;\ t)$. Si A est une telle région, $\overline{A} - A$ est contenu dans la réunion des régions où en un sens facile à préciser, il y a "strictement plus de racines multiples" que dans A. On établirait alors la formule $f = \Pi g + \Sigma\, \rho_i\, t^i$ pour $f \in \mathcal{S}(\hat{\overline{A}} - \hat{A}\ ;\ \hat{\overline{A}})$, par un calcul direct, d'où l'on déduirait finalement le résultat par une récurrence analogue à celle du paragraphe 1.

Les calculs auxquels cette méthode conduirait seraient très voisins de ceux de HÖRMANDER [1]. (Je ne les ai pas vérifiés en détail : ils semblent plus laborieux que dans la méthode utilisée ici, car nécessitant des interpolations sur des racines multiples. Avis aux gens courageux!)

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (L.). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Matematik, t. 3, 1958, p. 555-568.

[2] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Mathematica, t. 18, 1959, p. 87-136 ; Rozprawy Matematyczne, n° 22, 1961.

[3] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, I-IV, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, Division des distributions, n° 21-25, 29 p.